К. П. Арженниковъ.

МЕТОДИКА
НАЧАЛЬНОЙ АРИѲМЕТИКИ.

Изданіе 19-е.

Допущено Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просв. въ учительскія библіотеки низшихъ училищъ и въ библіотеки учительскихъ институтовъ и семинарій.

Цѣна 1 р. 25 к., въ перепл. 1 р. 40 к.

МОСКВА.
Изданіе книжнаго магазина М. Д. НАУМОВА.
Бол Лубянка, д. Страхового Общества «Россія».
1913.

Типографія Г. Лисснера и Д. Собко.
Москва, Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. 9.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Настоящее изданіе нашего методическаго руководства, за небольшими измѣненіями, тожественно со всѣми предыдущими изданіями его, начиная со 2-го.

Курсъ начальной ариѳметики разработанъ согласно «Примѣрнымъ программамъ» Министерства Народнаго Просвѣщенія, утвержденнымъ 7 февраля 1897 года.

«Ариѳметика для учащихъ», составляющая I часть книги, содержитъ основы этого предмета въ такомъ изложеніи и освѣщеніи, въ какомъ это нужно учителю для того, чтобы ясно понимать самую сущность предмета и чрезъ это умѣть разбираться въ тѣхъ средствахъ, которыми могутъ быть достигнуты цѣли, преслѣдуемыя обученіемъ этому предмету.

Въ введеніи мы изложили основанія, служащія къ построенію курса начальной ариѳметики въ зависимости какъ отъ требованій начальнаго обученія вообще, такъ и отъ условій нашей начальной школы въ частности.

Учитель, нуждающійся въ практическихъ указаніяхъ относительно прохожденія отдѣльныхъ статей курса, найдетъ эти указанія въ семи главахъ II части, содержащихъ подробную разработку курса начальной ариѳметики, иллюстрируемую примѣрными уроками.

Предлагаемое руководство находится въ связи съ составленнымъ нами сборникомъ ариѳметическихъ задачъ для начальныхъ народныхъ училищъ.

ЧАСТЬ I.

Ариѳметика для учащихъ.

ГЛАВА I.

Предварительныя понятія. Счисленіе. Понятіе объ ариѳметическомъ дѣйствіи.

1. Понятія о числѣ и дѣйствіяхъ надъ числами берутъ свое начало въ наблюденіи и опытѣ надъ предметами и явленіями окружающаго насъ внѣшняго міра.

2. Величина. Сравнивая между собою предметы, мы обращаемъ вниманіе на признаки, или свойства ихъ, въ которыхъ предметы сходны другъ съ другомъ, и которыми они другъ отъ друга отличаются; какъ-то: на форму, размѣры, цвѣтъ, вѣсъ и т. д.

Нѣкоторые признаки предметовъ, какъ напримѣръ: длина, ширина, высота, поверхность, объемъ, вѣсъ, цѣна, въ явленіяхъ—продолжительность, могутъ принадлежать имъ въ различной степени: одинъ предметъ можетъ быть длиннѣе, больше, тяжелѣе, дороже, одно явленіе продолжительнѣе другого; а въ нѣкоторыхъ случаяхъ признаки эти принадлежатъ имъ въ одинаковой степени. Путемъ сравненія такихъ признаковъ мы получаемъ понятіе о *величинѣ*. Величиною называется все то въ предметахъ и явленіяхъ, что въ однихъ случаяхъ бываетъ больше, въ другихъ меньше, въ иныхъ равно.

3. Счетъ. Число предметное. Число отвлеченное. Мы видимъ предметы то въ отдѣльности, видимъ предметъ только *одинъ*, то видимъ однородные предметы собранными въ группы: *нѣсколько, много* предметовъ (толпа людей, стая

птицъ, купа деревьевъ, куча камней и т. д.). Сравнивая по величинѣ группы, состоящія изъ одинаковыхъ предметовъ, мы можемъ первоначально разсматривать каждую группу какъ отдѣльный предметъ и судить объ ихъ сравнительной величинѣ на глазъ, т.-е. по занимаемому ими мѣсту, или по ихъ вѣсу. Но стремленіе къ болѣе точному сравненію заставляетъ насъ обратить вниманіе на другой признакъ сравниваемыхъ группъ, именно на ихъ *множественность*, или составъ изъ отдѣльныхъ предметовъ. Такимъ образомъ приходимъ мы къ вопросу: *сколько* предметовъ находится въ данной группѣ? и чтобы отвѣтить на него, производимъ счетъ. Путемъ счета образуется понятіе о *числѣ*, на первыхъ порахъ тѣсно связанное съ представленіемъ о считаемыхъ предметахъ: пять человѣкъ, пять овецъ, пять деревьевъ и т. д

Это — *предметное число;* а каждый отдѣльный предметъ во время счета есть *предметная единица. Предметное число есть совокупность предметныхъ единицъ* (а также одна предметная единица). Смотря по цѣли, съ которою производится счетъ, въ одну и ту же группу могутъ быть соединены различные предметы: понятіе объ однородныхъ и разнородныхъ предметахъ есть понятіе относительное, зависящее отъ того, на какіе признаки предметовъ обращено наше вниманіе. Напр. лошадь, корова и овца, — предметы разнородные въ однихъ отношеніяхъ, — становятся однородными, если мы обратимъ вниманіе только на то, что все это домашнія животныя, и потому мы можемъ считать, сколько головъ въ стадѣ, состоящемъ изъ этихъ животныхъ. Можно употребить такое выраженіе: животное, растеніе и камень — это *три* разнородныхъ предмета. Указывая на разнородность этихъ предметовъ, мы, однако, считаемъ ихъ, соединяемъ въ одну группу, высказывая этимъ то, что животное, растеніе и камень, разнородные въ другихъ отношеніяхъ, будутъ однородными, если принять въ расчетъ только тотъ признакъ, что все это — предметы.

Какіе бы предметы мы ни считали, счетъ производится одинаково. Самый процессъ счета можетъ быть отдѣленъ, или *отвлеченъ*, отъ природы считаемыхъ предметовъ.

Предметъ, потерявшій всѣ свои признаки, кромѣ того признака, что онъ *одинъ*, есть *отвлеченная единица;* а *сово-*

купность отвлеченныхъ единицъ есть отвлеченное число (единица также называется числомъ).

4. Измѣреніе. Число именованное. Въ группахъ предметовъ къ числу признаковъ, которые могутъ принадлежать имъ въ различной, а иногда и въ одинаковой, степени (занимаемая ими площадь, объемъ ихъ, вѣсъ), относится и множественность (составъ изъ отдѣльныхъ предметовъ), которую, слѣдовательно, мы можемъ назвать величиною (см. § 2). Это — величина, состоящая изъ отдѣльныхъ частей (величина раздѣльная, прерывная). Для опредѣленія ея мы производимъ счетъ. Другія величины, какъ-то: длина, поверхность, объемъ, вѣсъ, время, называются величинами непрерывными, или сплошными. Для опредѣленія такихъ величинъ мы производимъ *измѣреніе:* представляемъ себѣ величину раздѣленною на равныя части, каждую изъ которыхъ принимаемъ за *единицу,* или *мѣру,* и считаемъ, сколько такихъ единицъ заключается въ измѣряемой величинѣ; иначе говоря — сравниваемъ величину съ другой, ей однородною и принимаемою за единицу; или находимъ отношеніе измѣряемой величины къ величинѣ однородной, которую мы дѣлаемъ единицей. Такъ, измѣряя длину комнаты аршиномъ, мы представляемъ эту длину раздѣленною на части, равныя — каждая аршину, и считаемъ эти части; иначе — сравниваемъ длину комнаты съ длиною, называемою аршиномъ, или находимъ отношеніе длины комнаты къ длинѣ аршина. Отъ измѣренія получаемъ число: восемь аршинъ, пять фунтовъ, шесть часовъ и т. д. Такимъ образомъ, измѣреніе сводится къ счету, но предварительно требуетъ болѣе или менѣе искусственнаго раздѣленія величины на части. Выполняемый при измѣреніи счетъ даетъ намъ число (отвлеченное число, выражающее отношеніе измѣряемой величины къ выбранной единицѣ), къ которому — вслѣдствіе извѣстнаго произвола въ выборѣ единицы — присоединяется названіе (имя) единицы, такъ какъ только въ этомъ случаѣ результатъ измѣренія дастъ возможность судить о размѣрахъ измѣренной величины. Поэтому число, получаемое отъ измѣренія, называется *именованнымъ.*

5. Числа цѣлыя и дробныя. Единица и совокупность единицъ наз. *цѣлыми* числами. Собственно говоря, всякое число, какъ выраженіе множественности (отвѣчаю-

щее на вопросъ: сколько?), можетъ быть только цѣлымъ. Но иногда то, что̀ считаютъ (чему ведутъ счетъ), не принимаютъ за единицу, а разсматриваютъ какъ часть единицы. Тогда получаемое число наз. *дробнымъ*, или *дробью*, Такъ, напр., измѣряя какую-либо длину шестнадцатой частью аршина и принимая за единицу аршинъ, получаемъ дробь, напр. пять шестнадцатыхъ аршина. А если ту же мѣру будемъ считать самостоятельной единицей и дадимъ ей особое названіе — вершокъ, то получимъ цѣлое число — пять вершковъ. Употребляя для измѣренія части единицы, мы избѣгаемъ необходимости имѣть для каждой величины обширную таблицу мѣръ и, находя отношеніе измѣряемой величины въ какой-либо одной единицѣ, иногда приходимъ къ результату, болѣе удобному для пониманія, нежели составное именованное число, выраженное въ мѣрахъ многихъ наименованій (такъ выраженіе $^2/_3$ пуда болѣе говоритъ пониманію, нежели 26 фунт. 21 лотъ 1 зол.). *Дробь есть совокупность нѣсколькихъ одинаковыхъ частей (а также одна часть) единицы.* (Ширина стола равна $^3/_4$ аршина: единицей для измѣренія выбранъ аршинъ; $^2/_3$ поля засѣяны рожью: при измѣреніи пространства подъ рожью единицею служитъ площадь всего поля). Отмѣтимъ сходство (аналогію) дробей съ именованными числами: числитель дроби соотвѣтствуетъ числу мѣръ, знаменатель — наименованію.

Бываютъ случаи, когда ни цѣлая единица и никакая часть ея не содержится безъ остатка въ измѣряемой величинѣ (примѣръ: измѣрить діагональ квадрата его стороною; сторона квадрата равна футу, измѣрить футомъ его діагональ). Тогда величина называется несоизмѣримою съ единицею, и отношеніе ея къ единицѣ, находимое приближенно, наз. числомъ *ирраціональнымъ*.

Итакъ, число вообще выражаетъ отношеніе величины къ единицѣ. Простѣйшій случай этого отношенія выражается цѣлымъ числомъ.

6. Словесное счисленіе. Назвать особымъ, самостоятельнымъ словомъ каждое число изъ сколько-нибудь длиннаго ряда чиселъ невозможно: не хватило бы ни словъ, ни памяти для ихъ удержанія; не было бы и достаточно яснаго представленія чиселъ. Поэтому, должно найти способъ — составлять названія чиселъ при помощи немно-

гихъ словъ. Этотъ способъ наз. *словеснымъ счисленіемъ*, или *словесною нумераціей*. Онъ основанъ на слѣдующемъ свойствѣ числа: если мы станемъ считать предметы данной группы въ различномъ порядкѣ (одинъ разъ начнемъ съ одного предмета, другой разъ — съ другого) или же станемъ считать ихъ не по одному, а группами, напр. по два, по три, то всякій разъ мы будемъ имѣть одно и то же число: *число не измѣняется отъ порядка счета и отъ группировки единицъ* (въ послѣднемъ случаѣ измѣняется только выраженіе числа: восемь, четыре двойки, двѣ четверки, двѣ тройки и двойка — все это различныя выраженія одного и того же числа). Пользуясь этимъ свойствомъ числа, мы можемъ вести счетъ по единицѣ лишь до весьма небольшого предѣла, напр. до пяти, при чемъ каждому числу должно дать особое названіе: одинъ, два, три, четыре и пятокъ. Разбивши считаемые предметы на группы — пятки, станемъ точно такъ же считать и эти группы, т.-е. соединимъ ихъ въ новыя группы по пяти пятковъ; эти послѣднія — въ новыя, изъ которыхъ каждая содержитъ пять предыдущихъ, и т. д., до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ такимъ группамъ, которыхъ окажется меньше пяти. Не трудно понять, что, кромѣ словъ: одинъ, два, три, четыре, мы должны назвать особымъ словомъ первую и каждую изъ слѣдующихъ составленныхъ нами группъ (если желаемъ избѣжать такихъ выраженій, какъ пять пятковъ, пятью пять пятковъ, пять разъ пятью пять пятковъ и т. д.). Сначала, соединяя предметы въ группы — пятки, мы считаемъ по одному предмету: единицей служитъ намъ отдѣльный предметъ; это *простая* единица. Потомъ считаемъ мы пятки, группы въ пять пятковъ и т. д.; группы эти тоже будутъ единицами: это единицы *сложныя*, такъ какъ онѣ слагаются, или состоятъ, изъ другихъ единицъ. Сущность нумераціи заключается въ употребленіи различныхъ счетныхъ единицъ, при чемъ каждая слѣдующая единица образуется изъ одинаковаго числа предыдущихъ. Такъ какъ считать можно различными группами, то возможны различные способы выраженія чиселъ, или различныя системы счисленія; такъ, напр., каждую счетную единицу можно составлять изъ пяти предыдущихъ единицъ (пятеричная система), изъ десяти (система десятеричная), изъ дюжины (двѣнадцатеричная) и проч. Число,

показывающее, сколько счетныхъ единицъ образуютъ слѣдующую единицу, наз. основаніемъ системы счисленія.

Почти повсемѣстное распространеніе десятеричной системы объясняется тѣмъ, что первоначально счетъ производился при помощи пальцевъ обѣихъ рукъ. Такой счетъ на пальцахъ, быть можетъ, привелъ и къ самому способу выраженія чиселъ, основанному на группировкѣ единицъ. Прослѣдимъ подробнѣе, какъ могла бы образоваться наша система счисленія. Представимъ себѣ человѣка, который пересчитываетъ группу предметовъ при помощи пальцевъ обѣихъ рукъ; предположимъ, кромѣ того, что онъ не называетъ чиселъ словами, а только выражаетъ ихъ на пальцахъ и другихъ знакахъ. Ведя счетъ на пальцахъ, онъ отсчитываетъ столько предметовъ, сколько пальцевъ на рукахъ, и невольно дѣлаетъ остановку, потому что пальцы всѣ вышли, и считать дальше не на чемъ. Продолженіе счета возможно въ видѣ повторенія его. Чтобы не забыть сдѣланнаго отсчета, онъ обозначитъ его какой-нибудь мѣткой, напр. отложивъ въ сторону камешекъ, и затѣмъ отсчитываетъ снова столько предметовъ, сколько пальцевъ на рукахъ, и т. д., до тѣхъ поръ, пока не переберетъ всѣхъ предметовъ, откладывая по камешку при каждомъ отсчетѣ. Послѣ этого онъ будетъ считать сдѣланныя мѣтки — камешки — совершенно такъ же, какъ раньше считалъ отдѣльные предметы. Насчитывая столько камешковъ, сколько на рукахъ пальцевъ, онъ для памяти каждый разъ дѣлаетъ новую мѣтку, откладывая, напр., по зерну. Затѣмъ считаетъ зерна и т. д. Счетъ оконченъ тогда, когда какихъ-либо мѣтокъ будетъ менѣе, чѣмъ пальцевъ. Сначала считалъ онъ отдѣльные предметы — простыя единицы (единицы I разряда), потомъ мѣтки: камешки, зерна — сложныя единицы (единицы II, III... разряда), изъ которыхъ каждая слѣдущая содержитъ столько предыдущихъ, сколько пальцевъ на рукахъ. Сосчитанное число предметовъ будетъ выражено при помощи сдѣланныхъ мѣтокъ (зеренъ, камешковъ) и пальцевъ, при чемъ послѣдніе обозначаютъ число простыхъ единицъ.

Чтобы составить словесную систему счисленія, надо только выразить словами изложенный процессъ счета. Прежде всего, конечно, требуется дать названія числамъ, которыя обозначаются пальцами: одинъ, два, три, четыре, пять,

шесть, семь, восемь, девять, десять; послѣднее изъ этихъ названій будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и названіемъ первой сложной единицы (камешекъ). Ежели, произведя первый отсчетъ на пальцахъ, мы не отмѣтимъ его какимъ-либо знакомъ (камешкомъ), а только выразимъ словомъ, то при второмъ отсчетѣ, произнося слова: одинъ, два, три, четыре и т. д., мы для памяти присоединяемъ ихъ къ слову десять: одинъ и десять, два и десять, три и десять,... девять и десять, десять и десять, или два раза десять; третій отсчетъ: два раза десять и одинъ, два раза десять и два,... два раза десять и девять, два раза десять и десять, или три раза десять. Продолжая поступать такъ же и далѣе, мы приходимъ къ числу девять разъ десять и десять, или десять разъ десять, которое принимаемъ за новую счетную единицу (вторая мѣтка — зерно) и, ради удобства, называемъ особымъ словомъ: сто, или сотня, къ которому при дальнѣйшемъ счетѣ присоединяемъ названія предыдущихъ чиселъ: сто и одинъ, сто и два,... сто и десять и т. д. до числа сто и сто, или двѣ сотни; далѣе: двѣ сотни и одинъ, двѣ сотни и два,... три сотни,... четыре сотни,... десять сотенъ; послѣднее число снова принимается за единицу и называется особымъ словомъ: тысяча, которое потомъ послѣдовательно сопровождается названіями всѣхъ чиселъ до тысячи, и т. д.

Итакъ, словесная нумерація, или способъ выраженія чиселъ немногими словами, основана на употребленіи различныхъ счетныхъ единицъ (изъ которыхъ каждая слѣдующая содержитъ одинаковое число предыдущихъ), и заключается въ томъ, чтобы дать особыя названія: во-первыхъ, всѣмъ числамъ, которыя состоятъ только изъ простыхъ единицъ (которыя меньше первой сложной единицы), и во-вторыхъ, каждой сложной единицѣ; изъ этихъ словъ образуются названія всѣхъ прочихъ чиселъ.

Образованіе составныхъ названій — ихъ грамматическая форма — зависитъ отъ особенностей языка. Такъ у насъ въ выраженіи чиселъ между первымъ и вторымъ десяткомъ названія единицъ предшествуютъ названію десятка и связываются съ нимъ (сокращаемымъ въ *дцать*) въ одно слово посредствомъ означающаго прибавленіе предлога *на* (набавить, накинуть и т. п.): одиннадцать, двѣнадцать,... девятнадцать. Въ выраженіи круглыхъ десятковъ названія

единицъ сливаются съ названіемъ десятка иными способами, означающими повтореніе: два раза десять, два десять, двадесять, двадцать; таково же образованіе слова тридцать; пять десятковъ, пять десятъ, пятьдесятъ; такъ же образуются: шестьдесятъ, семьдесятъ и восемьдесятъ; несовсѣмъ удобныя для произношенія слова четыредцать и девятьдесятъ замѣняются названіями: сорокъ (вѣроятно, отъ греческаго названія четырехъ десятковъ: тессара́конта) и девяносто (происхожденіе котораго доподлинно неизвѣстно). Подобно образованію числительныхъ пятьдесятъ, шестьдесятъ и т. д., составляются и названія круглыхъ сотенъ: два ста — двѣсти, три ста — триста, четыре ста — четыреста, пять сотъ — пятьсотъ и т. д.

Въ числительныхъ, выражающихъ числа, состоящія изъ единицъ, десятковъ и сотенъ, названія болѣе крупныхъ единицъ предшествуютъ названіямъ единицъ болѣе мелкихъ (за исключеніемъ чиселъ второго десятка), не сливаясь въ одно слово, при чемъ союзъ, означающій присоединеніе (и, да), опускается: двадцать пять, двѣсти тридцать, триста шесть, пятьсотъ шестьдесятъ восемь.

Почти всюду дѣлается отступленіе отъ того правила, по которому надо дать особое названіе каждой сложной единицѣ; такъ мы не имѣемъ особыхъ названій для единицъ 5-го, 6-го, 8-го, 9-го и т. д. разрядовъ; вообще, начиная съ тысячи, изъ каждыхъ трехъ единицъ называемъ особымъ словомъ только первую, составляя названія двухъ прочихъ изъ того же слова и словъ десятокъ и сотня. Вслѣдствіе этого счетныя единицы могутъ быть соединены въ группы, или классы, по три единицы въ каждомъ.

4. Классъ билліоновъ.			3. Классъ милліоновъ.			2. Классъ тысячъ.			1. Классъ единицъ.		
Сотня билліоновъ.	Десятокъ билліоновъ.	Единица билліоновъ.	Сотня милліоновъ.	Десятокъ милліоновъ.	Единица милліоновъ.	Сотня тысячъ.	Десятокъ тысячъ.	Единица тысячъ.	Сотня.	Десятокъ.	Единица.
XII	XI	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I
№№ разрядовъ.											

Примѣчаніе. Такая классификація принята во Франціи; ея будемъ держаться и мы. Въ Германіи и Англіи соединяютъ въ классы не по три, а по шести счетныхъ единицъ: 1-й классъ, или классъ единицъ, содержитъ: единицу, десятокъ, сотню, тысячу, десятокъ тысячъ и сотню тысячъ; во 2-мъ классѣ (классѣ милліоновъ) находятся: милліонъ, десятокъ милліоновъ, сотня милліоновъ, тысяча милліоновъ, десятокъ тысячъ милліоновъ, сотня тысячъ милліоновъ; 3-й классъ (классъ билліоновъ) составляютъ: билліонъ, десятокъ билліоновъ, сотня билліоновъ, тысяча билліоновъ, десятокъ тысячъ билліоновъ, сотня тысячъ билліоновъ; 4-й классъ — классъ трилліоновъ и т. д. Въ каждомъ классѣ находятся: единица, десятокъ, сотня, тысяча, десятокъ тысячъ и сотня тысячъ. Класса тысячъ нѣтъ. Названія билліонъ, трилліонъ и т. д. принадлежатъ не тѣмъ счетнымъ единицамъ, какія имѣютъ эти названія въ трехразрядной системѣ.

Образованіе классовъ, которое является вторичной, болѣе крупной, группировкой единицъ, быть можетъ, произошло отъ того, что сложныя единицы вводились постепенно, по мѣрѣ надобности (съ расширеніемъ торговли, развитіемъ науки), такъ что — при сравнительно раннемъ появленіи сотни — долгое время ограничивались счетомъ лишь до тысячи и настолько привыкли къ такому счету, что примѣнили его и къ вновь появившейся единицѣ — тысячѣ, а потомъ къ милліону и далѣе.

Представимъ себѣ, что, привыкши къ счету до тысячи и вполнѣ освоившись съ нимъ, мы пересчитываемъ предметы, напр. груду спичекъ, которыхъ значительно болѣе тысячи: мы не станемъ группировать ихъ въ десятки, напр. связывать въ пучки по десяти штукъ, но будемъ составлять группы по тысячѣ спичекъ въ каждой; считая эти послѣднія, мы соединимъ ихъ въ новыя группы, изъ которыхъ каждая содержитъ тысячу прежнихъ; этой группѣ — тысячѣ тысячъ — даемъ особое названіе: милліонъ; считая милліоны, мы соединимъ ихъ въ группы по тысячѣ милліоновъ — въ билліоны и т. д. Легко понять, что дѣлая вторую, третью и дальнѣйшія группировки (соединяя тысячи въ милліоны, милліоны въ билліоны и проч.), мы употребляемъ тѣ же слова, какія произносили при первой группировкѣ (когда соединяли единицы въ тысячи), т. е. числительныя отъ одного до тысячи, съ присоединеніемъ лишь названій тысячи, милліона и т. д. Отсюда можно заключить, что въ нашемъ счисленіи тысяча имѣетъ значеніе, сходное съ значеніемъ десятка, и, какъ нумерація до десяти лежитъ въ основѣ нумераціи до тысячи, — такъ нумерація до тысячи лежитъ въ основѣ нумераціи чиселъ любой величины.

Теоретически возможны различныя классификаціи, т.-е. соединеніе въ классы различнаго числа разрядовъ. Выше мы привели возможное объясненіе трехразрядной системы: это — продолжительное существованіе счисленія лишь до тысячи и привычка къ нему, вслѣдствіе которой оно было перенесено и на новыя единицы. Если принять во вниманіе, что милліонъ появился сравнительно недавно, въ концѣ XV в. (когда появилась тысяча, — мы не знаемъ, но во всякомъ случаѣ за много вѣковъ до милліона), и если предположить, что счетъ до извѣстнаго предѣла, существовавшій въ теченіе долгаго времени, примѣнялся, вслѣдствіе привычки, и ко вновь являющейся единицѣ, то происхожденіе шестиразрядной классификаціи можно объяснить такъ: продолжительное существованіе единицъ только двухъ первыхъ классовъ (единица, десятокъ, сотня; тысяча, десятокъ тысячъ, сотня тысячъ) могло повести къ тому, что различіе между этими единицами въ смыслѣ принадлежности ихъ къ двумъ группамъ (классамъ) исчезло, такъ что каждая единица (начиная со второй) разсматривалась только какъ соединеніе десяти предыдущихъ (какъ это было бы въ томъ случаѣ, если бы каждая изъ шести единицъ имѣла особое, самостоятельное, названіе); счетъ, производившійся при помощи шести счетныхъ единицъ, перенесенъ былъ и на новыя единицы — милліоны (а потомъ и на билліоны, и прочія), которыя стали считать такъ: милліонъ, десятокъ милліоновъ, сотня милліоновъ, тысяча милліоновъ, десятокъ тысячъ милліоновъ, сотня тысячъ милліоновъ (потомъ билліонъ, десятокъ билліоновъ, сотня билліоновъ, тысяча билліоновъ, десятокъ тысячъ билліоновъ, сотня тысячъ билліоновъ). Сравнивая трехразрядную и шестиразрядную классификацію, мы видимъ, что названія сложныхъ единицъ составляются въ нихъ различнымъ образомъ, начиная съ единицы десятаго разряда, которая въ одной системѣ образуетъ единицу четвертаго класса и получаетъ самостоятельное названіе: билліонъ (милліардъ), въ другой принадлежитъ ко второму классу и называется: тысяча милліоновъ; названіе же «билліонъ» имѣетъ единица 13 разряда, начинающая собой третій классъ (въ трехразрядной системѣ это будетъ трилліонъ). Соединеніе счетныхъ единицъ въ классы уменьшаетъ число словъ, необходимыхъ для названія сложныхъ единицъ, а слѣдовательно для выраженія чиселъ вообще. Съ этой точки зрѣнія шестиразрядная классификація имѣетъ нѣкоторое преимущество передъ трехразрядной: въ послѣдней тѣ же самыя счетныя единицы группируются въ большее число классовъ, а первая единица каждаго класса должна быть названа особымъ словомъ. Однако этимъ преимуществомъ едва ли выкупается неудобство первой системы, заключающееся въ томъ, что сложныя единицы получаютъ тройныя названія (состоящія изъ трехъ словъ): десять тысячъ милліоновъ, сто тысячъ билліоновъ и пр.

7. Письменное счисленіе. Письменной нумераціей наз. способъ обозначенія всевозможныхъ чиселъ при помощи немногихъ знаковъ. Тогда какъ словесное счисленіе почти всюду слѣдовало одному и тому же закону, письменное

обозначеніе чиселъ у разныхъ народовъ было различно. Распространенный теперь во всемъ цивилизованномъ мірѣ способъ обозначенія чиселъ при помощи девяти значущихъ цифръ и нуля былъ изобрѣтенъ, какъ полагаютъ, индусами, у которыхъ его заимствовали арабы; черезъ арабовъ способъ этотъ сталъ извѣстенъ европейскимъ народамъ (XII в.); отъ этого и цифры, нами употребляемыя, наз. арабскими.

Примѣчаніе 1. Обратимъ вниманіе на то, что письменное обозначеніе чиселъ существенно отличается отъ нашего письма вообще; въ послѣднемъ случаѣ слова разлагаются на звуки, и письменный знакъ — буква — есть изображеніе звука; между тѣмъ числовые знаки не имѣютъ никакого отношенія къ звукамъ соотвѣтствующаго слова (числительнаго): цифра есть обозначеніе самаго числа (понятія).

Примѣчаніе 2. И въ томъ случаѣ, когда для обозначенія чиселъ употребляются буквы алфавита (напр. ц.-славянская нумерація: способъ, заимствованный у грековъ), буква, становясь цифрою, перестаетъ быть знакомъ для изображенія звука: она становится выраженіемъ самаго понятія объ опредѣленномъ числѣ. Лишь въ видѣ немногихъ исключеній, числовой знакъ связывается съ соотвѣтствующимъ словомъ: именно цифрою служитъ начальная буква числительнаго [римскія цифры для чиселъ сто и тысяча: C (centum) и M (mille)]. Полагаютъ, что цифры произошли отъ т. н. образнаго письма, при которомъ письменные знаки служили не для изображенія звуковъ или словъ, какъ сочетанія звуковъ, но каждый знакъ символически выражалъ цѣлое понятіе (напр. римская цифра V — изображеніе ручной кисти, X — двухъ скрещенныхъ кистей). Думаютъ, что самый древній и естественный способъ обозначенія чиселъ это — посредствомъ черточекъ: вертикальныхъ или горизонтальныхъ, въ которыхъ усматриваютъ изображеніе пальцевъ (римскіе знаки I, II, III; арабская цифра 1; бирки, т.-е. палки съ надрѣзами въ видѣ черточекъ). Неудобство этого способа должно было привести къ изобрѣтенію иныхъ знаковъ, при помощи которыхъ можно было бы короче обозначать числа (римскій знакъ V вмѣсто IIIII и составленныя съ его помощью обозначенія VI, VII, VIII). Какъ произошли наши цифры, представляютъ ли онѣ собою сочетаніе только черточекъ, введены ли сюда, кромѣ того, какіе-нибудь иные символы; вообще какъ образовались наши цифры, — этого, сколько-нибудь достовѣрно, мы не знаемъ.

Для лучшаго уясненія сущности нумераціи укажемъ возможные способы письменнаго обозначенія чиселъ, изъ которыхъ иные дѣйствительно употреблялись. При этомъ мы должны оговориться: утверждать что-либо о томъ, какими путями шло развитіе теперешней письменной нумераціи, — невозможно, такъ какъ на это не имѣется достаточныхъ данныхъ.

Попробуемъ построить письменную нумерацію по тѣмъ же правиламъ, которыя лежатъ въ основѣ словеснаго счисленія (§ 6), т.-е. обозначимъ особыми знаками: во-первыхъ, тѣ числа, которыя состоятъ лишь изъ простыхъ единицъ (которыя меньше первой сложной единицы); пусть эти знаки будутъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; во-вторыхъ, каждую сложную единицу, напр., *a* (десятокъ), *b* (сотня), *c* (тысяча), *d* (десятокъ тысячъ), *e* (сотня тысячъ), *f* (милліонъ) и т. д. Всякое число, выраженное по десятеричной системѣ счисленія, представляется въ видѣ суммы десятичныхъ группъ, т.-е. такихъ группъ, которыя состоятъ — каждая изъ единицъ одного только разряда въ количествѣ не болѣе девяти (въ частномъ случаѣ число можетъ явиться, какъ одна или нѣсколько — не болѣе девяти — единицъ лишь одного разряда). Письменное обозначеніе числа будетъ находиться въ зависимости отъ обозначенія десятичныхъ группъ его, а это послѣднее можетъ быть сдѣлано различнымъ образомъ.

1. Чтобы обозначить нѣсколько сложныхъ единицъ, напримѣръ три десятка, можно написать три раза подъ рядъ знакъ десятка: *aaa*. Напр. число двадцать пять тысячъ четыреста тридцать шесть будетъ по такому способу обозначено такъ: ddcecccbbbbaaa6. Употребленіе этого способа можно замѣтить въ римской нумераціи при обозначеніи двухъ и трехъ десятковъ и сотенъ: XX, XXX; CC, CCC (такъ же обозначалось и соотвѣтствующее число простыхъ единицъ: II, III). Неудобство этого способа очевидно: и писать долго, и, не произведя счета написанныхъ знаковъ, нельзя прочитать число. Въ римской системѣ это неудобство устраняется введеніемъ особаго знака для пяти единицъ: L — пять десятковъ, D — пять сотенъ (а также V — пять единицъ), и выраженіемъ дальнѣйшихъ группъ при помощи этихъ знаковъ: LX = 60, LXX = 70, LXXX = 80; DC = 600, DCC = 700, DCCC = 800, (VI = 6, VII = 7, VIII = 8). Четыре единицы обозначаются постановкой знака одной единицы передъ знакомъ пяти единицъ, что соотвѣтствуетъ вычитанію: XL = 40, CD = 400, (IV = 4); а девять единицъ — постановкой знака единицы передъ знакомъ слѣдующей единицы: XC = 90; CM = 900, (IX = 9).

2. Предыдущій способъ, помимо указаннаго неудобства, не соотвѣтствуетъ и словесному выраженію десятичныхъ

группъ: такъ, группу въ три десятка мы не называемъ «десять, десять и десять» (чему соотвѣтствуетъ *ааа*), а выражаемъ словомъ «тридцать», въ которомъ слова три и десять соединены способомъ, указывающимъ повтореніе десятка три раза. Поэтому, группу въ три десятка лучше и письменно обозначить черезъ 3а, гдѣ 3 явится множителемъ. Приведенное выше число напишется такъ: 2d 5c 4b 3a 6.

3. Для обозначенія трехъ десятковъ напишемъ цифру 3 и, напр. надъ нею, знакъ *a*, который будетъ показывать, что цифра 3 означаетъ десятки: $\overset{a}{3}$. Какъ ни сходно такое обозначеніе съ предшествующимъ, однако оно отличается отъ него не только по внѣшнему виду, но и по внутреннему смыслу: тамъ вниманіе наше сосредоточивается на разрядѣ единицъ (какія единицы: десятки ли, сотни ли и проч.), здѣсь обращается главнымъ образомъ на ихъ число 3, которое знакъ *a* возводитъ на степень десятковъ. По такому способу взятое нами для примѣра число будетъ обозначено такъ $\overset{dcba}{25436}$. Слѣды этого способа можно усмотрѣть въ римской и славянской нумераціи при обозначеніи нѣсколькихъ тысячъ: въ первый изъ нихъ знакомъ, возводящимъ число на степень тысячъ, служитъ приписанная справа буква *m*, а во второй знакъ ҂: XX_m, ҂к (20000).

4. Числа можно писать не свободно, а въ таблицѣ, которая содержитъ рядъ столбцовъ съ надписанными надъ ними знаками единицъ; цифра, помѣщенная въ какомъ-нибудь столбцѣ, означаетъ такія единицы, которыя указываются знакомъ, поставленнымъ вверху. Въ нашей таблицѣ написаны числа: тридцать, двадцать пять тысячъ четыреста тридцать шесть, восемь тысячъ семьсотъ пять, девятьсотъ одна тысяча сорокъ два, сорокъ тысячъ пятьсотъ. Подобный способъ существовалъ въ Европѣ въ средніе вѣка.

e	d	c	b	a	
				3	
	2	5	4	3	6
		8	7		5
9		1		4	2
	4		5		

5. Отъ письма чиселъ въ вышеприведенной таблицѣ очень не труднымъ кажется переходъ къ теперешнему способу обозначенія чиселъ (хотя, повторяемъ, нѣтъ данныхъ утверждать,

чтобы послѣдній дѣйствительно произошелъ отъ письма чиселъ въ столбцахъ). Прежде всего знаки для сложныхъ единицъ становятся излишними, если твердо помнить значеніе столбцовъ. Числа, написанныя въ нашей таблицѣ, могутъ быть обозначены такъ:

3		

,

2	5	4	3	6

,

8	7		5

,

9		1		4	2

4		5		

.

Легко замѣтить, что если всѣ столбцы, или клѣтки, заняты, какъ во второмъ примѣрѣ, то число можетъ быть написано безъ клѣтокъ въ видѣ ряда цифръ 25436: значеніе каждой цифры опредѣляется числомъ слѣдующихъ за ней знаковъ (находящихся вправо отъ нея). Въ другихъ случаяхъ клѣтки не могутъ быть безслѣдно опущены: отъ этого измѣнилось бы значеніе нѣкоторыхъ цифръ; отмѣтить незанятыя мѣста промежуткомъ между цифрами нельзя: по величинѣ промежутка трудно судить о числѣ незанятыхъ мѣстъ; незанятыя же крайнія (правыя) мѣста и совсѣмъ невозможно было бы указать. Но мы можемъ опустить клѣтки, если отмѣтимъ какимъ-либо знакомъ тѣ изъ нихъ, въ которыхъ не поставлено цифръ; пусть этимъ знакомъ будетъ, напр., изображеніе пустой клѣтки; тогда приведенныя выше числа (кромѣ второго) будутъ написаны слѣдующимъ образомъ: 3□, 87□5, 9□1□42, 4□5□□; а если неудобную для письма четыреугольную форму нашего знака мы замѣнимъ болѣе удобной — оваломъ, то придемъ къ употребляемому теперь обозначенію чиселъ: 30, 8705, 901042, 40500.

Наша письменная нумерація состоитъ, какъ извѣстно, въ слѣдующемъ: 1) обозначить особымъ знакомъ (цифрою) каждое число, состоящее только изъ простыхъ единицъ (т.-е. каждое изъ первыхъ девяти чиселъ); 2) тѣми же знаками, но поставленными на второмъ, третьемъ и т. д. мѣстѣ (отъ правой руки къ лѣвой), означать и сложныя единицы: десятки, сотни и т. д.; 3) для постановки цифры на надлежащемъ мѣстѣ отмѣчать особымъ знакомъ — нулемъ — отсутствующіе разряды. Знакъ 0 называется цифрою, какъ и другіе знаки, которые въ отличіе отъ него получили названіе: *значащія* цифры. Такимъ образомъ, числовые знаки имѣютъ двоякое значеніе — по формѣ и по мѣсту: своею формою (внѣшнимъ видомъ) цифра показываетъ число еди-

ницъ, а своимъ мѣстомъ — разрядъ ихъ. Обратимъ вниманіе на то, что употребляемый теперь способъ письменнаго обозначенія чиселъ не только удовлетворяетъ требованію: писать всевозможныя числа при помощи немногихъ знаковъ; вмѣстѣ съ тѣмъ онъ даетъ совершенно ясное обозначеніе числа, какъ суммы десятичныхъ группъ, и черезъ это ведетъ къ весьма удобнымъ способамъ выполненія надъ числами ариѳметическихъ дѣйствій.

8. Ариѳметическія дѣйствія. *Образованіе по двумъ или нѣсколькимъ числамъ новаго числа наз. ариѳметическимъ дѣйствіемъ.* Мысль о дѣйствіяхъ надъ числами порождаютъ многіе вопросы, задаваемые потребностями жизни. Такъ какъ въ вопросахъ этихъ мы имѣемъ дѣло съ числами предметными или именованными, то къ нимъ первоначально и относится понятіе о дѣйствіи; а потомъ оно уже распространяется и на числа отвлеченныя. Такъ, мы приходимъ къ мысли складывать отвлеченныя числа лишь послѣ того, какъ на рѣшеніи практическихъ вопросовъ убѣдились въ томъ, что иногда приходится находить число, равное даннымъ числамъ, вмѣстѣ взятымъ, или одно число увеличивать другимъ, напр., когда къ одной группѣ предметовъ присоединяется другая группа.

Для рѣшенія различныхъ вопросовъ приходится различнымъ образомъ составлять новое число по числамъ даннымъ. Поэтому ариѳметическія дѣйствія весьма разнообразны. Дѣйствіе, производимое надъ двумя данными числами, наз. *простымъ;* если же данныхъ чиселъ болѣе двухъ, то дѣйствіе наз. *сложнымъ.* Простыхъ дѣйствій, называемыхъ *главными,* или *основными,* четыре: *сложеніе, вычитаніе, умноженіе* и *дѣленіе.* Сложное дѣйствіе приводится къ простымъ, представляя собою сочетаніе послѣднихъ.

ГЛАВА II.

Сложеніе.

9. Опредѣленіе. Самое образованіе числа путемъ счета уже заключаетъ въ себѣ понятіе о сложеніи, такъ какъ, считая, мы присоединяемъ, или прибавляемъ, по единицѣ сначала къ одной единицѣ, потомъ къ двумъ, тремъ и т. д.,

хотя мысль о прибавленіи сознается нами при этомъ, можетъ-быть, не совсѣмъ ясно. Понятіе о сложеніи содержится и въ способѣ выражать числа единицами различныхъ разрядовъ. Представляя видоизмѣненіе счета, сложеніе можетъ быть отличено отъ него слѣдующимъ образомъ. Вообразимъ себѣ, что мы соединяемъ (дѣйствительно или мысленно) двѣ группы предметовъ въ одну и желаемъ узнать, сколько предметовъ будетъ въ составленной группѣ. Для этого мы можемъ сосчитать предметы составленной группы: одинъ, два, три и т. д. Это будетъ счетъ. Но можемъ поступить и нѣсколько иначе: сосчитаемъ сначала, сколько предметовъ находится въ каждой группѣ отдѣльно; тогда мы получимъ два числа, напр. пять и четыре; затѣмъ станемъ уже не *сосчитывать* предметы обѣихъ группъ вмѣстѣ, а *присчитывать* къ одной группѣ другую: пять да одинъ — шесть, шесть да одинъ — семь, семь да одинъ — восемь, восемь да одинъ — девять. (Если мы не имѣемъ передъ глазами соединяемыхъ группъ, и, вообще, если присчитываніе происходитъ безъ всякихъ наглядныхъ пособій, то мы должны вести счетъ и прибавляемымъ единицамъ; иначе не будемъ знать, когда окончить: къ пяти прибавить первую единицу — будетъ шесть, къ шести — вторую, будетъ семь и т. д.; или же, если умѣемъ, будемъ всякій разъ опредѣлять, сколько единицъ осталось еще прибавить: пять да одинъ — шесть, осталось прибавить три; шесть да одинъ — семь, осталось прибавить два и т. д.) Это будетъ сложеніе. Такимъ образомъ, производя счетъ, мы сосчитываемъ единицы *одного и того же* числа (предметы одной и той же группы), начиная при этомъ съ одной единицы; дѣлая сложеніе, мы считаемъ, сколько единицъ въ *двухъ* числахъ, начиная не съ одной, а со столькихъ единицъ, сколько ихъ находится въ одномъ изъ этихъ чиселъ; здѣсь уже вполнѣ отчетливо выступаетъ мысль о соединеніи, или прибавленіи. Сложеніе можетъ быть опредѣлено такъ:

Сложить два числа значитъ составить новое число, содержащее столько единицъ, сколько ихъ находится въ данныхъ числахъ.

Или: *сложить два числа значитъ соединить ихъ въ одно число.*

Примѣчаніе. Когда въ ариѳметикѣ говорится объ *одномъ числѣ*, то подразумѣвается число, выраженное въ принятой системѣ счисленія. Собственно 7+7 есть также нѣкоторое число, единицы котораго сгруппированы въ семерки; но мы тогда только совокупность этихъ единицъ назовемъ однимъ числомъ, когда сгруппируемъ ихъ иначе: 10+4, или 14. Такимъ образомъ, сложить два числа значитъ сгруппировать всѣ единицы ихъ по принятой системѣ счисленія, т.-е. опредѣлить, сколько въ обоихъ данныхъ числахъ будетъ простыхъ единицъ, сколько десятковъ и т. д.

10. Правило сложенія. Выполнять сложеніе путемъ присчитыванія по единицѣ было бы затруднительно въ случаѣ сколько-нибудь большихъ чиселъ: надо искать болѣе удобнаго пріема сложенія. Упомянутое выше (§ 6) свойство числа — независимость отъ порядка счета и отъ группировки составляющихъ его единицъ — приводитъ къ слѣдующему свойству сложенія.

Сумма двухъ чиселъ не измѣнится, если мы разобьемъ данныя числа на произвольныя части, сложимъ части одного съ частями другого въ произвольномъ порядкѣ и полученныя суммы соединимъ въ одну.

Дѣйствительно, сумма двухъ чиселъ есть также нѣкоторое число, въ которомъ мы можемъ сдѣлать любую группировку единицъ. Въ частномъ случаѣ можно разбить на группы лишь одно изъ слагаемыхъ, напр. первое, и прибавить второе къ одной изъ этихъ группъ; или же разбить на группы только второе слагаемое и прибавлять эти группы одну за другой.

Иначе: *Для того чтобы прибавить какое-нибудь число къ суммѣ, можно прибавить его къ одному изъ слагаемыхъ.*

Для того чтобы прибавить къ какому-нибудь числу сумму, можно прибавить одно за другимъ ея слагаемыя.

Для того чтобы прибавить сумму къ суммѣ, можно прибавить слагаемыя одной изъ нихъ къ слагаемымъ другой въ любомъ порядкѣ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно и то свойство сложенія, по которому сумма не измѣнится отъ перемѣщенія слагаемыхъ, и которое наз. *свойствомъ перемѣстительности.*

Приведенное свойство сложенія, вмѣстѣ съ системой счисленія и знаніемъ на память нѣкоторыхъ результатовъ сло-

женія, даетъ пріемъ сложенія цѣлыхъ чиселъ любой величины. Въ самомъ дѣлѣ, складывая два числа, мы должны опредѣлить ихъ сумму по принятой системѣ счисленія, т.-е. найти, сколько будетъ въ ней единицъ различныхъ разрядовъ; чтобы достигнуть этого, проще всего разбить данныя числа на десятичныя группы и сложить одноименныя группы обоихъ слагаемыхъ; при этомъ въ однихъ случаяхъ, какъ, напр., при сложеніи чиселъ 245 и 324, уже одно перечисленіе полученныхъ группъ (5 сот. 6 дес. 9 ед.) даетъ намъ искомую сумму; въ другихъ случаяхъ, какъ, напр., при сложеніи чиселъ 358 и 467, въ полученныхъ группахъ (7 сот. 11 дес. 15 ед.) надо сдѣлать новую группировку (7 сот., 1 сотня, 1 дес., 1 дес. 5 ед.=8 сот. 2 дес. 5 ед.).

Итакъ, *чтобы сложить два числа, надо разбить ихъ на десятичныя группы и сложить одноименныя группы обоихъ слагаемыхъ.*

Въ этомъ заключается существенная сторона правила сложенія; все остальное, какъ-то: расположеніе записи, выполненіе дѣйствія, начиная съ простыхъ единицъ, имѣетъ второстепенное значеніе и вводится только для большаго удобства.

11. Таблица сложенія. Такъ какъ всякое число содержитъ единицъ каждаго разряда не болѣе девяти, то сложеніе любыхъ чиселъ приводится къ сложенію двухъ чиселъ, изъ которыхъ каждое меньше десяти, или чиселъ однозначныхъ. Для того, чтобы мы могли возможно быстро производить сложеніе любыхъ чиселъ, намъ надо знать на память всѣ суммы однозначныхъ чиселъ попарно, т.-е. помнить т. н. *таблицу сложенія*. Что же касается составленія этой послѣдней, или сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ, то оно можетъ быть выполнено путемъ присчитыванія по единицѣ. Но и здѣсь число можно придавать не по единицѣ, а по группамъ. Пусть, напр., присчитывая по единицѣ, мы прибавили 2 и 3 къ каждому однозначному числу и полученные результаты запомнили; тогда для прибавленія какого-либо другого числа мы можемъ разбить его на двойки и на тройки; такъ $4+5=4+2+3=6+3=9$. Особенно удобенъ этотъ пріемъ въ томъ случаѣ, когда сумма однозначныхъ чиселъ болѣе десяти, какъ, напр., при сложеніи 8 и 7; здѣсь всего лучше разбить придаваемое число на такія двѣ

группы (2+5), изъ которыхъ одна (придаваемая сначала) дополнитъ первое слагаемое до десяти. Само собою разумѣется, что, поступая такимъ образомъ, мы должны умѣть отнимать однозначное число отъ однозначнаго и отъ десяти.

При составленіи и заучиваніи таблицы сложенія можно воспользоваться и тѣмъ свойствомъ суммы, по которому она не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ: 5+7=7+5.

Для того, чтобы примѣнить таблицу къ сложенію чиселъ любой величины, ее надо предварительно распространить на единицы сложныя: если 5 простыхъ единицъ и 7 простыхъ единицъ составляютъ 12 простыхъ единицъ, то 5 какихъ бы то ни было единицъ и 7 такихъ же единицъ дадутъ 12 такихъ же единицъ (500+700=1200).

12. Сумма нѣсколькихъ чиселъ. Суммою нѣсколькихъ чиселъ наз. такое число, которое будемъ имѣть, прибавивъ къ первому числу второе, къ полученному — третье, къ вновь полученному — четвертое и т. д. Этимъ опредѣленіемъ указывается и способъ сложенія нѣсколькихъ чиселъ.

Основное свойство числа — независимость отъ порядка счета и группировки составляющихъ его единицъ — позволяетъ видоизмѣнить пріемъ сложенія нѣсколькихъ чиселъ, а именно: сначала сложить единицы одного разряда всѣхъ слагаемыхъ, потомъ единицы другого разряда и т. д.

То же основное свойство числа приводитъ къ такимъ свойствамъ суммы нѣсколькихъ чиселъ:

1. *Сумма нѣсколькихъ чиселъ не измѣняется съ измѣненіемъ порядка слагаемыхъ.*

Напр. для вычисленія суммы 5+7+6+3+9 мы можемъ сначала къ пятому слагаемому придать первое, потомъ къ ихъ суммѣ четвертое, къ вновь полученной суммѣ второе и наконецъ — третье. Такимъ образомъ и сумма нѣсколькихъ чиселъ имѣетъ свойство перемѣстительности — свойство результата не измѣняться при перемѣщеніи данныхъ. Это свойство даетъ одинъ изъ способовъ повѣрки сложенія.

2. *Для вычисленія суммы нѣсколькихъ чиселъ мы можемъ сначала сложить любыя слагаемыя въ любомъ количествѣ, а потомъ уже полученныя суммы соединить въ одну.*

Это свойство результата — не измѣняться отъ любого сочетанія данныхъ — наз. иногда *свойствомъ сочетательности.*

Имъ можно бываетъ воспользоваться въ цѣляхъ удобства и быстроты вычисленія, соединяя слагаемыя наиболѣе выгоднымъ образомъ. Напр. сумму $273+48+27+64+336+$ $+152$ удобнѣе всего вычислить такъ: $(273+27)+(48+152)+$ $+(64+336)=300+200+400=900$.

Въ случаѣ большого числа слагаемыхъ удобно разбить ихъ на группы по нѣскольку чиселъ въ каждой, вычислить каждую группу и полученныя суммы соединить въ одну.

ГЛАВА III.

Вычитаніе.

13. Опредѣленіе. Складывая два числа, мы соединяемъ ихъ въ одно, сумму. Часто приходится рѣшать вопросъ *обратный:* разложить данное число на два числа, изъ которыхъ одно извѣстно, или по данной суммѣ и одному изъ слагаемыхъ найти другое слагаемое. Два вопроса наз. взаимно обратными, если то, что въ одномъ изъ нихъ отыскивается, въ другомъ дается; а одно изъ данныхъ перваго вопроса во второмъ отыскивается. Вопросъ этотъ можетъ явиться въ двухъ видахъ: 1) къ какому числу надо прибавить одно изъ данныхъ, чтобы получить другое? къ какому числу надо прибавить 5, чтобы получить 9? 2) сколько надо прибавить къ одному данному, чтобы получить другое? сколько надо прибавить къ 5, чтобы получить 9? Оба приведенные вопроса могутъ быть рѣшены посредствомъ сложенія.

Для рѣшенія одного изъ нихъ — сколько надо прибавить къ 5, чтобы получить 9? — будемъ присчитывать къ 5 по единицѣ, ведя въ то же время счетъ придаваемымъ единицамъ, до тѣхъ поръ, пока получимъ 9. Если же мы умѣемъ выполнять сложеніе не только путемъ присчитыванія по единицѣ, но можетъ прибавить сразу (на память) нѣсколько единицъ, то станемъ прибавлять къ 5 различныя числа (конечно, меньшія 9-ти) до тѣхъ поръ, пока не получимъ въ суммѣ 9.

Рѣшимъ другой вопросъ: къ какому числу надо прибавить 5, чтобы получить 9? — Возьмемъ наугадъ какое-ни-

будь число (меньшее 9) и прибавимъ къ нему 5; если получимъ 9, то мы взяли надлежащее число; если же нѣтъ, то возьмемъ другое число, третье и т. д., пока не нападаемъ на такое число, которое отъ прибавленія къ нему 5 обращается въ 9.

Но и здѣсь можно поступить по предыдущему: такъ какъ сумма не измѣняется отъ порядка слагаемыхъ, то мы поставимъ искомое число на второе мѣсто, т.-е. будемъ попрежнему отыскивать: сколько надо прибавить къ 5, чтобы получить 9?

Научившись считать, прочно и сознательно усвоивши названія чиселъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ идутъ числа, увеличиваясь на единицу, мы вмѣстѣ съ тѣмъ можемъ называть числа и въ порядкѣ обратномъ, въ какомъ они идутъ, уменьшаясь на единицу, или вести *обратный счетъ:* девять, восемь, семь и т. д. Считая предметы, измѣряя величины, мы производимъ *прямой* счетъ; соединяя группы предметовъ или однородныя величины, мы выполняемъ сложеніе. Вопросъ о разложеніи группы предметовъ или величины на двѣ, изъ которыхъ одна дается, приводитъ насъ къ понятію «отнять» и къ обратному счету, въ смыслѣ отсчитыванія по единицѣ: девять безъ одного — восемь, восемь безъ одного — семь и т. д. Поставленные выше два вопроса могутъ явиться не въ той формѣ, въ какой они приведены раньше, а въ иной; именно: 1) отъ одного даннаго числа отнять другое — сколько останется? (уменьшить одно число на другое); отъ 9 отнять 5 — сколько останется? 2) сколько надо отнять отъ одного даннаго числа, чтобы осталось другое? (насколько одно число больше или меньше другого? какова разность между данными числами?); сколько надо отнять отъ 9, чтобы осталось 5? Чтобы рѣшить первый вопросъ, будемъ отъ 9 отсчитывать 5 единицъ по одной, ведя въ то же время счетъ этимъ единицамъ: отъ 9 отнять первую единицу — останется восемь, отъ восьми отнять вторую единицу — останется семь и т. д. Для рѣшенія второго вопроса можно было бы отнимать отъ 9 по единицѣ до тѣхъ поръ, пока останется 5; но и здѣсь мы можемъ поступить по предыдущему, если сообразимъ, что 9 состоитъ изъ 5 и искомаго числа; слѣдовательно, отнимая 5 отъ 9, мы и получимъ искомое. Такимъ образомъ мы при-

ходимъ ко второму дѣйствію: *вычитанію*, которое можемъ опредѣлить такъ:

Вычесть одно число изъ другого значитъ отъ большого изъ нихъ отнять столько единицъ, сколько ихъ находится въ меньшемъ.

Такъ какъ вопросы, рѣшаемые вычитаніемъ, являются обратными вопросу, который рѣшается сложеніемъ, то *вычитаніе есть дѣйствіе обратное сложенію* и можетъ быть опредѣлено еще слѣдующимъ образомъ:

Вычитаніемъ наз. такое ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго по данной суммѣ и одному изъ слагаемыхъ отыскивается другое слагаемое.

Данная сумма получаетъ названіе: уменьшаемое, данное слагаемое — вычитаемое; искомое слагаемое — остатокъ (первый вопросъ) или разность (второй вопросъ).

Примѣчаніе. Сложеніе двухъ чиселъ имѣетъ два обратныхъ дѣйствія, смотря по тому, какое слагаемое отыскивается (отысканіе остатка и отысканіе разности). Но, благодаря свойству перемѣстительности сложенія, оба эти дѣйствія, какъ мы видимъ, могутъ быть выполнены совершенно одинаково и потому составляютъ одно дѣйствіе — вычитаніе.

Изъ предыдущаго вытекаютъ соотношенія между данными и искомыми въ сложеніи и вычитаніи.

a) *Каждое слагаемое равно суммѣ за вычетомъ другого слагаемаго; а въ случаѣ нѣсколькихъ слагаемыхъ — каждое слагаемое или группа слагаемыхъ равны полной суммѣ за вычетомъ суммы остальныхъ слагаемыхъ.*

(Послѣднее можно доказать, воспользовавшись свойствомъ сочетательности и представивъ сумму нѣсколькихъ чиселъ въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ). Соотношеніе это даетъ другой способъ повѣрки сложенія: посредствомъ вычитанія.

b) *Уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному съ разностью.* Это даетъ способъ повѣрки вычитанія путемъ сложенія.

c) *Вычитаемое равно уменьшаемому за вычетомъ разности.*

(Уменьшаемое есть цѣлое — сумма, вычитаемое и разность — части, слагаемыя). Отсюда способъ повѣрки вычитанія посредствомъ вычитанія.

14. Правило вычитанія. Обратимся къ способу вычитанія большихъ чиселъ. Выполнять вычитаніе путемъ

отсчитыванія по единицѣ или путемъ сложенія, какъ показано выше, было бы очень затруднительно въ случаѣ сколько-нибудь большихъ чиселъ: надо искать болѣе удобнаго пріема вычитанія

Пріемъ этотъ основанъ на слѣдующемъ свойствѣ вычитанія:

Чтобы вычесть одно число изъ другого, можно разбить оба числа на произвольныя группы, но такъ, чтобы для каждой группы вычитаемаго нашлась большая ея группа уменьшаемаго; затѣмъ отъ группъ уменьшаемаго отнять группы вычитаемаго и полученные остатки сложить.

Такъ, чтобы изъ 23 вычесть 11, можно разбить эти числа слѣд. образомъ: $23=9+8+6$, $11=6+3+2$; $23-11=(9+8+6)-(6+3+2)=(9-6)+(8-3)+(6-2)=3+5+4=12$. Въ справедливости этого свойства мы можемъ убѣдиться, дѣлая повѣрку посредствомъ сложенія: складывая вычитаемое $6+3+2$ съ остаткомъ $3+5+4$, мы можемъ, по свойству сложенія, къ группамъ одного прибавить группы другого: $(6+3)+(3+5)+(2+4)$; тогда, очевидно, получимъ уменьшаемое. Въ частномъ случаѣ можно разбить на группы только уменьшаемое и отнять вычитаемое отъ одной изъ этихъ группъ, или разбить на группы только вычитаемое и отнимать эти группы одну за другой. Иначе:

Для того чтобы отнять какое-нибудь число отъ суммы, можно отнять его отъ одного изъ слагаемыхъ.

Для того чтобы отнять сумму, можно отнимать одно за другимъ ея слагаемыя.

Для того чтобы отъ суммы отнять сумму, можно отъ слагаемыхъ первой отнять меньшія ихъ слагаемыя второй суммы.

Это свойство, вмѣстѣ съ системой счисленія и знаніемъ на память нѣкоторыхъ результатовъ вычитанія, даетъ пріемъ вычитанія чиселъ любой величины. Здѣсь, какъ и при сложеніи, проще всего было бы разбить данныя числа на десятичныя группы, а затѣмъ группы вычитаемаго отнять отъ одноименныхъ группъ уменьшаемаго. Вычитаемое, дѣйствительно, мы всегда разбиваемъ на группы десятичныя; что же касается уменьшаемаго, то это приведетъ насъ къ цѣли лишь въ томъ случаѣ, когда всѣ десятичныя группы его больше соотвѣтствующихъ группъ вычитаемаго,

какъ, напр., при вычитаніи 3654 изъ 5789; если же этого нѣтъ, какъ напр. при вычитаніи 3645 изъ 5283, то уменьшаемое слѣдуетъ разбить не на десятичныя, а на иныя группы, раздробляя иногда одну единицу высшаго разряда въ единицы слѣдующаго низшаго разряда; такъ, въ нашемъ примѣрѣ мы разбиваемъ 5283 на группы: 4 тыс., 12 сот., 7 дес. и 13 ед. Легко понять, что, поступая такимъ образомъ, послѣ вычитанія мы будемъ имѣть число единицъ каждаго разряда меньше десяти. Въ самомъ дѣлѣ, пусть въ уменьшаемомъ будетъ 2, а въ вычитаемомъ 3 единицы одного и того же разряда; раздробляя въ эти единицы одну единицу слѣдующаго высшаго разряда, будемъ имѣть въ уменьшаемомъ 10+2 такихъ единицъ; чтобы вычесть отсюда 3 единицы вычитаемаго, мы можемъ отнять ихъ отъ 10 и къ остатку прибавить 2; такъ какъ отъ 10 больше отнимается, чѣмъ придается, то результатъ будетъ менѣе 10. Итакъ, *чтобы вычесть одно число изъ другого, надо разбить вычитаемое на десятичныя группы, а при группировкѣ единицъ уменьшаемаго раздроблять единицу какого-либо разряда въ единицы слѣдующаго низшаго разряда всякій разъ, когда послѣднихъ въ уменьшаемомъ менѣе, нежели въ вычитаемомъ; отнять группы вычитаемаго отъ одноименныхъ группъ уменьшаемаго и остатки соединить въ одно число.* Въ этомъ заключается существенная сторона правила вычитанія; все остальное, какъ-то: расположеніе записи, выполненіе дѣйствія, начиная съ простыхъ единицъ, имѣетъ второстепенное значеніе и вызвано практическими соображеніями въ цѣляхъ большаго удобства.

15. Таблица вычитанія. Такъ какъ вычитаемое разбивается на десятичныя группы, каждая изъ которыхъ содержитъ не болѣе 9 единицъ, и такъ какъ отъ вычитанія этихъ группъ получается менѣе 10-ти, то вычитаніе любыхъ чиселъ приводится къ вычитанію однозначнаго числа въ случаѣ однозначной разности. Для того, чтобы мы могли возможно быстро производить вычитаніе любыхъ чиселъ, намъ надо знать на память всѣ однозначныя разности при однозначномъ вычитаемомъ, т.-е. помнить т. н. *таблицу вычитанія* (напр. 9—4; 12—7; уменьшаемое можетъ быть числомъ однозначнымъ и двузначнымъ). Что же касается составленія этой таблицы, то оно можетъ быть

выполнено путемъ отсчитыванія по единицѣ. Но и здѣсь можно отнимать число не по единицѣ, а по группамъ. Пусть, напр., отсчитывая по единицѣ, мы отняли 2 и 3 отъ каждаго числа, превышающаго ихъ не больше, чѣмъ на 9, и полученные результаты запомнили; тогда для вычитанія какого-либо другого числа мы можемъ разбить его на двойки и на тройки; такъ $9-5=9-3-2=6-2=4$. Особенно удобенъ этотъ пріемъ въ томъ случаѣ, когда уменьшаемое есть двузначное число, напр. при вычитаніи 5-ти изъ 12-ти; здѣсь лучше всего разбить вычитаемое 5 на такія двѣ группы (2 и 3), изъ которыхъ одна (отнимаемая сначала) обратитъ уменьшаемое въ десятокъ, изъ котораго придется вычесть вторую группу: $12-5=12-(2+3)=12-2-3=$ $=10-3=7$.

Такъ какъ уменьшаемое состоитъ изъ вычитаемаго и остатка, то, узнавши, напр., что $12-5=7$, мы вмѣстѣ съ тѣмъ узнаемъ, что $12-7=5$.

Для того, чтобы примѣнить таблицу вычитанія къ вычитанію чиселъ любой величины, ее надо предварительно распространить на единицы сложныя: если 8 простыхъ единицъ безъ 2 простыхъ или 12 простыхъ единицъ безъ 5 простыхъ единицъ даютъ 6 или 7 простыхъ единицъ, то 8 какихъ бы то ни было единицъ безъ 2 такихъ же единицъ или 12 какихъ бы то ни было единицъ безъ 5 такихъ же единицъ дадутъ 6 или 7 такихъ же единицъ ($8000-2000=$ $=6000$; $1200-500=700$).

Таблица вычитанія является обратною по отношенію къ таблицѣ сложенія, и всѣ табличныя вычитанія можно выполнить при помощи таблицы сложенія, не прибѣгая къ отсчитыванію: зная, что $8+6=14$, мы знаемъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что $14-6=8$ и $14-8=6$; желая отъ 15 отнять 7, мы припоминаемъ по таблицѣ сложенія, какое число надо прибавить къ 7-ми, или къ какому числу надо прибавить 7, чтобы получить 15. Вслѣдствіе этого считаютъ иногда излишнимъ составленіе и изученіе особой таблицы вычитанія.

Примѣчаніе. Не только въ предѣлахъ таблицы, но и въ случаѣ любыхъ чиселъ вычитаніе можетъ быть выполнено путемъ сложенія. Пусть надо будетъ сдѣлать вычитаніе $-\frac{7245}{2682}$; будемъ отыскивать разряды разности по та-
$\overline{4563}$

блицѣ сложенія: придаемъ къ 2 столько, чтобы получить 5, этимъ мы найдемъ единицы искомой разности; далѣе соображаемъ: такъ какъ десятковъ въ вычитаемомъ больше, чѣмъ въ уменьшаемомъ, то, очевидно, искомые десятки, будучи приданы къ десяткамъ вычитаемаго, дадутъ одну сотню, кромѣ десятковъ, т.-е. 14 десятковъ; придаемъ къ 8-ми столько, чтобы получить 14; находимъ десятки разности; замѣтивъ, что одна сотня уменьшаемаго образовалась отъ сложенія десятковъ вычитаемаго и разности, и, продолжая разсуждать по предыдущему, мы придадимъ къ 6-ти (числу сотенъ вычитаемаго) столько, чтобы получить 11 и т. д.

ГЛАВА IV.

Умноженіе.

16. Опредѣленіе. Если при сложеніи всѣ слагаемыя равны между собою, то сумму ихъ можно найти скорѣе, чѣмъ путемъ обыкновеннаго сложенія. Возникаетъ третье, новое, дѣйствіе — *умноженіе*, которымъ является особый сокращенный способъ отысканія суммы равныхъ слагаемыхъ. Каждое изъ равныхъ слагаемыхъ получаетъ названіе: множимое, число ихъ — множитель, и сумма ихъ — произведеніе. Такъ какъ всѣ слагаемыя равны между собою, то при письменномъ обозначеніи дѣйствія достаточно написать одно изъ слагаемыхъ (множимое) и число ихъ (множителя), связавши ихъ особымъ знакомъ ($\times$ или .).

Умножить одно число на другое значитъ первое изъ нихъ взять, или повторить, слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ другомъ числѣ.

17. Правила умноженія. Выполненіе умноженія основано на слѣдующихъ свойствахъ этого дѣйствія, вытекающихъ изъ свойствъ сложенія.

а) *Множимое можно разложить на произвольныя группы, умножить эти группы на множителя въ произвольномъ порядкѣ и полученныя произведенія сложить.*

Иначе: *чтобы умножить на какое-нибудь число сумму нѣсколькихъ чиселъ, можно умножить на это число каждое слагаемое и результаты сложить.*

Дѣйствительно, умножить сумму $7+5+2$ на 3 значитъ повторить ее слагаемымъ 3 раза, т.-е. $(7+5+2)\times 3=(7+5+2)+(7+5+2)+(7+5+2)$; для сложенія этихъ трехъ суммъ сложимъ ихъ первыя слагаемыя, вторыя и третьи; имѣемъ $(7+7+7)+(5+5+5)+(2+2+2)$; но $7+7+7=7\times 3$; слѣд., $(7+5+2)\times 3=7\times 3+5\times 3+2\times 3$.

Это свойство, вмѣстѣ съ системой счисленія и знаніемъ на память нѣкоторыхъ результатовъ умноженія, даетъ пріемъ умноженія многозначнаго числа на однозначное.

Чтобы умножить многозначное число на однозначное, надо разбить множимое на десятичныя группы, умножить каждую изъ нихъ на множителя и полученныя произведенія соединить въ одно.

Такимъ образомъ, умноженіе многозначнаго числа на однозначное приводится къ умноженію однозначнаго числа на однозначное, или къ *таблицѣ умноженія*, которую предварительно надо распространить на сложное множимое: если 5 простыхъ единицъ, повторенныя 3 раза, даютъ 15 простыхъ единицъ, то и 5 какихъ бы то ни было единицъ, повторенныя 3 раза, дадутъ 15 такихъ же единицъ. (5 сот. $\times 3=15$ сот.; $500\times 3=1500$).

При умноженіи на 10, единицы множимаго обращаются въ десятки, десятки въ сотни и т. д.; при умноженіи на 100 вмѣсто единицъ будемъ имѣть сотни, вмѣсто десятковъ — тысячи и т. д. Письменно это выразится приписываніемъ ко множимому съ правой стороны одного, двухъ и т. д. нулей.

b) *Произведеніе двухъ чиселъ не измѣняется отъ перестановки множимаго и множителя*, т.-е. обладаетъ свойствомъ перемѣстительности.

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы умножить напр. 5 на 3, разобьемъ множимое на единицы и помножимъ каждую единицу отдѣльно: $5\times 3=(1+1+1+1+1)\times 3=3+3+3+3+3=3\times 5$. Это свойство даетъ, между прочимъ, способъ повѣрки умноженія посредствомъ умноженія.

Такъ какъ каждое изъ чиселъ, данныхъ при умноженіи, можетъ играть одну и ту же роль, то оба эти числа называются иногда общимъ именемъ: множители, сомножители, производители; а вмѣсто выраженія «умножить одно число на другое» говорятъ иногда: «перемножить два числа».

Умножимъ на какое-нибудь число сумму равныхъ слагаемыхъ; для этого (свойство *a*) можно умножить каждое слагаемое; напр. $(6+6+6+6)\times 7=42+42+42+42$; но такъ какъ сумма равныхъ слагаемыхъ есть произведеніе, то $(6\times 4)\times 7=42\times 4$. Отсюда слѣдуетъ: чтобы умножить произведеніе на какое-нибудь число, можно умножить на него множимое. Пользуясь свойствомъ перемѣстительности, скажемъ: чтобы умножить произведеніе на какое-нибудь число, можно умножить на него множителя. Итакъ, вообще:

c) *Чтобы умножить на какое-нибудь число произведеніе двухъ чиселъ, можно умножить на него одного изъ множителей.*

d) *Множителя можно разложить на произвольныя группы, умножить множимое на каждую изъ этихъ группъ въ произвольномъ порядкѣ и полученныя произведенія сложить.*

Иначе:

Чтобы умножить число на сумму нѣсколькихъ чиселъ, можно умножить его на каждое слагаемое и результаты сложить.

Пусть надо 8 умножить на 9; $8\times 9=8+8+8+8+8+8+8+8+8$; пользуясь свойствомъ сочетательности сложенія, соединимъ наши слагаемыя, напр., такъ: $(8+8+8)+(8+8)+(8+8+8+8)$; переходя къ умноженію, имѣемъ: $8\times 3+8\times 2+8\times 4$. Мы разложили множителя 9 на группы 3, 2 и 4 и, чтобы набрать 9 восьмерокъ, мы взяли ихъ сначала 3, потомъ 2 и наконецъ 4. Итакъ, $8\times 9=8\times(3+2+4)=8\times 3+8\times 2+8\times 4$.

Пусть надо умножить какое-нибудь число, напр. 4, на число, обозначаемое значащей цифрой съ нулями (на десятичную группу), напр. на 30. Разложимъ множителя на десятки: $30=10+10+10$, и возьмемъ множимое 10 разъ, еще 10 разъ и еще 10 разъ: $4\times 30=4\times(10+10+10)=4\times 10+4\times 10+4\times 10$; но такъ какъ всѣ слагаемыя этой суммы одинаковы, то для вычисленія ея умножимъ 40 на 3. Слѣдовательно $4\times 30=(4\times 10)\times 3$. Или разложимъ множителя на тройки: $4\times 30=4\times(3+3+3+3+3+3+3+3+3+3)=4\times 3+4\times 3+4\times 3+4\times 3+4\times 3+4\times 3+4\times 3+4\times 3+4\times 3+4\times 3=(4\times 3)\times 10$. Отсюда — пріемъ умноженія на значащую цифру съ нулями.

Пусть требуется умножить какое-нибудь число на сумму равныхъ слагаемыхъ, напр. 6 умножить на $7+7+7$. Имѣемъ $6\times(7+7+7)=42+42+42$. Но такъ какъ сумма равныхъ слагаемыхъ есть произ-

веденіе, то будемъ имѣть: $6\times(7\times3)=(6\times7)\times3=42\times3$, а по свойству перемѣстительности: $6\times(7\times3)=6\times(3\times7)=(6\times3)\times7=18\times7$. Итакъ:

e) *Чтобы умножить число на произведеніе двухъ чиселъ, можно умножить его на одного изъ множителей, а полученный результатъ на другого.*

Свойство умноженія d ведетъ къ способу умноженія однозначнаго числа на многозначное.

Чтобы умножить однозначное число на многозначное, надо умножить его на каждую десятичную группу множителя и полученныя произведенія соединить въ одно.

Разсматривая умноженіе на 10, 100, 1000 и т. д., какъ переводъ единицъ изъ одного разряда въ другой, мы можемъ сказать, что и при умноженіи однозначнаго числа на многозначное, или при умноженіи его на десятичныя группы множителя, умноженіе сводится къ умноженію однозначнаго числа на однозначное, т.-е. къ таблицѣ умноженія.

Умѣя умножать сложныя единицы на число однозначное, напр. 7000 на 3, и однозначное число на сложныя единицы, напр. 7 на 300, мы можемъ сдѣлать перемноженіе сложныхъ единицъ: $7000\times300=(7000\times3)\times100=21000\times100=$ $=2100000$.

Свойства *a* и *d* приводятъ къ слѣдующему свойству умноженія.

f) *Чтобы умножить одно число на другое, можно оба числа разложить на произвольныя группы, помножить всѣ группы одного числа на каждую группу другого и полученныя произведенія сложить.* Иначе: *чтобы умножить сумму на сумму, можно всѣ слагаемыя одной изъ нихъ умножить на каждое слагаемое другой и полученныя произведенія сложить.*

Дѣйствительно, пусть надо сумму $7+5+4$ умножить на сумму $6+8$. Разсматривая первую сумму какъ одно число 16, мы можемъ умножить его сначала на 6, потомъ на 8 (свойство *d*): $(7+5+4)\times(6+8)=16\times6+16\times8$; но при умноженіи на 6 и на 8, мы разобьемъ 16 на слагаемыя $7+5+4$ и, пользуясь свойствомъ *a*, умножимъ на множителя каждое слагаемое. Будемъ имѣть: $(7+5+4)\times(6+8)=$ $(7+5+4)\times6+(7+5+4)\times8=7\times6+5\times6+4\times6+7\times8+$ $+5\times8+4\times8$. Это свойство даетъ способъ умноженія въ общемъ случаѣ.

Чтобы умножить многозначное число на многозначное, надо разбить оба числа на десятичныя группы, всѣ группы одного числа помножить одну за другой на каждую группу другого и полученныя произведенія соединить въ одно. Въ этомъ заключается сущность правила умноженія; все остальное, какъ-то: расположеніе записи, опредѣленный порядокъ умноженія группъ множимаго на группы множителя, имѣетъ второстепенное значеніе и введено для большаго удобства.

И въ общемъ случаѣ дѣйствіе сводится къ таблицѣ умноженія, такъ какъ состоитъ въ перемноженіи десятичныхъ группъ.

18. Таблица умноженія. Умноженіе чиселъ любой величины приводится, какъ мы видѣли, къ умноженію чиселъ однозначныхъ и для возможно быстраго выполненія требуетъ знанія на память *таблицы умноженія,* которая содержитъ произведенія всѣхъ однозначныхъ чиселъ попарно. Что же касается составленія таблицы умноженія, то оно можетъ быть выполнено посредствомъ сложенія; такъ, для умноженія 7 на 4 вычисляемъ сумму $7+7+$ $+7+7$. Но и въ предѣлахъ таблицы можно воспользоваться свойствами умноженія, съ тѣмъ, чтобы умноженіе данныхъ чиселъ свести къ умноженію меньшихъ чиселъ, если произведеніе послѣднихъ намъ уже извѣстно. Положимъ, напримѣръ, что мы знаемъ всѣ табличные результаты умноженія, не превышающіе 10-ти; тогда для умноженія 2 на 7 мы можемъ набирать не по одной двойкѣ, а возьмемъ сразу пять и потомъ двѣ двойки, т.-е. разложимъ множителя на 5 и на 2: $2\times7=2\times(5+2)=2\times5+2\times2=10+4=14$.

При составленіи и заучиваніи таблицы умноженія можно воспользоваться и свойствомъ перемѣстительности произведенія.

19. Произведеніе нѣсколькихъ чиселъ. Произведеніемъ нѣсколькихъ чиселъ наз. такое число, которое мы получимъ, умноживъ первое изъ данныхъ чиселъ на второе, полученное число — на третье, вновь полученное — на четвертое и т. д.

Произведеніе нѣсколькихъ чиселъ (такъ же какъ и сумма нѣсколькихъ чиселъ) обладаетъ свойствомъ перемѣстительности, въ силу котораго можно измѣнить порядокъ множителей, и свойствомъ сочетательности, которое позволяетъ

перемножить сначала любыхъ производителей, а потомъ уже перемножить произведенія ихъ. Такъ, по свойству перемѣстительности, $6\times8\times5\times3=8\times3\times6\times5=5\times8\times\times6\times3$ и т. д.; а по свойству сочетательности, $6\times8\times5\times3=$ $=(6\times5)\times(8\times3)=30\times24=(8\times5)\times(6\times3)=40\times18$ и т. д.

Докажемъ свойство перемѣстительности.

Возьмемъ произведеніе: $8\times7\times5\times3\times4\times6$. Чтобы вычислить его, надо, по опредѣленію, 8 умножить на 7, затѣмъ 56 умножить на 5, далѣе 280 умножить на 3, 840 на 4 и послѣднее произведеніе на 6; такъ что $8\times7\times5\times3\times4\times6=(840\times4)\times6$. Но для того, чтобы умножить произведеніе двухъ чиселъ, можно умножить множимое; слѣдовательно, $(840\times4)\times6=(840\times6)\times4$; замѣняя 840 произведеніемъ $8\times7\times5\times3$, имѣемъ: $8\times7\times5\times3\times4\times6=8\times7\times5\times3\times6\times4$. Видимъ, что въ произведеніи нѣсколькихъ чиселъ можно переставить двухъ послѣднихъ множителей. Отбрасывая на время въ произведеніи $8\times7\times5\times3\times6\times4$ послѣдняго множителя и вычисляя произведеніе $8\times7\times5\times3\times6$, мы можемъ въ немъ, по предыдущему, переставить двухъ послѣднихъ множителей; имѣемъ: $8\times7\times5\times3\times6=8\times7\times5\times\times6\times3$; а потому: $8\times7\times5\times3\times6\times4=8\times7\times5\times6\times3\times4$. Такимъ образомъ мы докажемъ, что въ произведеніи $8\times7\times5\times3\times4\times6$ послѣдняго множителя можно поставить на любое мѣсто. Легко видѣть, что любого множителя можно сдѣлать послѣднимъ: напр., чтобы поставить на послѣднее мѣсто множителя 5, перенесемъ послѣдняго множителя 6 куда-нибудь впередъ 5, напр. на первое мѣсто, такъ чтобы послѣ 5 было однимъ множителемъ меньше; получимъ $6\times8\times\times7\times5\times3\times4$; поставимъ теперь послѣдняго множителя 4 впереди 5; тогда послѣднимъ множителемъ будетъ 3; перенеся и его на другое мѣсто, будемъ имѣть послѣднимъ множителемъ 5. Итакъ, послѣдняго множителя можно поставить на любое мѣсто, любого множителя можно сдѣлать послѣднимъ; слѣд., любого множителя можно поставить на любое мѣсто.

Докажемъ свойство сочетательности

Возьмемъ произведеніе: $8\times7\times5\times3\times4\times6$. Изъ самаго опредѣленія произведенія нѣсколькихъ чиселъ слѣдуетъ, что нѣсколько рядомъ стоящихъ множителей, начиная съ перваго, могутъ быть замѣнены вычисленнымъ произведеніемъ ихъ, такъ что $8\times7\times5\times3\times\times4\times6=56\times5\times3\times4\times6=280\times3\times4\times6=840\times4\times6=3360\times6$. Покажемъ возможность напр. такой группировки множителей: $8\times(6\times5\times4)\times(7\times3)$. Для этого поставимъ множителей 6, 5 и 4 на три первыя мѣста и вычислимъ ихъ произведеніе: $8\times7\times5\times3\times4\times6=$ $=6\times5\times4\times8\times7\times3=(6\times5\times4)\times8\times7\times3=120\times8\times7\times3$; поставимъ теперь на первыя два мѣста множителей 7 и 3 и перемножимъ ихъ: $120\times8\times7\times3=7\times3\times120\times8=(7\times3)\times120\times8=21\times120\times8$; сдѣлавши въ послѣднемъ произведеніи перестановку крайнихъ множителей, имѣемъ: $8\times7\times5\times3\times4\times6=8\times120\times21$, гдѣ $120=6\times5\times4$, а $21=7\times3$.

Распространимъ на произведеніе нѣсколькихъ чиселъ нѣкоторыя другія свойства, доказанныя раньше для произведенія двухъ чиселъ.

Для того, чтобы умножить произведеніе нѣсколькихъ множителей на какое-нибудь число, можно умножить на него одного изъ множителей.

Пусть надо $8\times5\times9\times3$ умножить на 4; мы сдѣлаемъ это, если умножимъ, напр., множителя 5. Дѣйствительно $(8\times5\times9\times3)\times4=$ $=8\times5\times9\times3\times4$; пользуясь свойствомъ сочетательности, замѣнимъ множителей 5 и 4 ихъ произведеніемъ; будемъ имѣть $(8\times5\times9\times3)\times$ $\times4=8\times20\times9\times3$.

Для того чтобы умножить какое-нибудь число на произведеніе нѣсколькихъ множителей, можно умножить послѣдовательно на каждаго множителя. Пусть требуется число 18 умножить на $105=$ $=5\times3\times7$. Имѣемъ $18\times(5\times3\times7)=18\times105=105\times18=(5\times3\times$ $\times7)\times18=5\times3\times7\times18=18\times5\times3\times7$.

Отсюда слѣдуетъ: 1) Если какой-либо множитель разлагается на нѣсколько другихъ множителей, то онъ можетъ быть замѣненъ послѣдними. Такъ: $9\times56\times5=9\times(2\times4\times7)\times5=9\times2\times4\times7\times5$.

2) Чтобы умножить произведеніе на произведеніе, можно составить произведеніе изъ всѣхъ множителей обоихъ произведеній. Такъ: $(7\times4\times5\times3)\times(8\times2\times6)=(7\times4\times5\times3)\times8\times2\times6=7\times4\times5\times3\times$ $\times8\times2\times6$.

ГЛАВА V.

Дѣленіе.

20. Опредѣленіе. Умножая одно число на другое, мы соединяемъ нѣсколько равныхъ между собою чиселъ въ одно число. Часто приходится рѣшать вопросъ обратный: разложить данное число на числа, равныя между собой. Вопросъ этотъ можетъ явиться въ двухъ видахъ: 1) дается, на сколько равныхъ между собою чиселъ (на сколько равныхъ частей) надо разложить данное число, и требуется опредѣлить величину каждой части; или такъ: какое число надо повторить извѣстное число разъ, чтобы получить данное число? (отысканіе множимаго); 2) дается, на какія числа надо разложить данное число (дается величина каждой части), и требуется опредѣлить, сколько будетъ такихъ частей; или такъ: сколько разъ надо повторить одно данное число, чтобы получить другое данное число? (отысканіе множителя).

Замѣтимъ, что при требованіи въ результатѣ цѣлаго числа вопросы эти не всегда могутъ быть рѣшены; напр. нельзя

все число 17 разложить на 3 равныя части, изъ которыхъ каждая выражалась бы цѣлымъ числомъ; нельзя все число 17 разложить и на тройки. Въ такихъ случаяхъ надо разлагать на части не все данное число, а самое большее, какое только можно, изъ чиселъ, не превышающихъ даннаго.

Оба приведенные вопроса могутъ быть рѣшены посредствомъ сложенія или умноженія. Пусть надо 42 разложить на семерки: чтобы узнать, сколько будетъ семерокъ (сколько разъ 7 содержится въ числѣ 42), будемъ набирать по семеркѣ, пока не получимъ 42; конечно, сдѣлать это лучше путемъ умноженія, а не сложенія: повторяя семерку 2, 3, 4,... и т. д. разъ, находимъ, что 6 семерокъ составляютъ 42; искомое число 6. Если бы мы стали такимъ же образомъ раскладывать на семерки число 58, то при умноженіи 7-ми на различныя числа мы не получили бы числа 58; въ этомъ случаѣ ведемъ умноженіе до тѣхъ поръ, пока не получимъ число, превышающее 58; искомымъ будетъ множитель, на единицу меньшій того, отъ умноженія на который получилось болѣе 58-ми; все число 58 на семерки не разлагается; кромѣ 8 семерокъ оно содержитъ еще 2 единицы (58—56=2).

Пусть требуется 42 разложить на 7 равныхъ частей, т.-е. найти величину каждой такой части. Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, беремъ произвольное число (меньшее 42) и умножаемъ его на 7; если получится 42, то мы взяли надлежащее число; если же этого не будетъ, беремъ другое, третье число и т. д. до тѣхъ поръ, пока не нападемъ на такое число, которое отъ умноженія на 7 обращается въ 42. Если бы мы стали такимъ же образомъ раздѣлять на 7 равныхъ частей число 58, то не нашли бы такого цѣлаго числа, которое бы отъ умноженія на 7 обращалось въ 58; тогда искомымъ числомъ будетъ меньшее изъ двухъ послѣдовательныхъ чиселъ, которыя при умноженіи на 7 даютъ: одно менѣе, другое болѣе 58-ми.

Такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перестановки множимаго и множителя, то вопросъ этотъ (отысканіе множимаго) можетъ быть рѣшенъ по предыдущему.

Тѣ же самые два вопроса могутъ быть рѣшены посредствомъ вычитанія. Для того, чтобы узнать, на сколько семерокъ можно разложить числа 42 или 58, будемъ отнимать

отъ нихъ по семеркѣ до тѣхъ поръ, пока не останется ничего или останется меньше семи; сосчитавши, сколько разъ сдѣлано вычитаніе, мы найдемъ искомое. Для того, чтобы раздѣлить 42 или 58 на 7 равныхъ частей, поступимъ такъ: будемъ брать отъ этихъ чиселъ по семеркѣ до тѣхъ поръ, пока ничего не останется или останется меньше семи, и раскладывать каждую семерку на 7 равныхъ частей; очевидно, что всякій разъ на каждую часть будетъ приходиться по одной единицѣ, а всего придется столько единицъ, сколько разъ брали мы по семеркѣ. Здѣсь мы опять видимъ, что, узнавши, сколько разъ 7 содержится въ какомъ-либо числѣ, мы узнали вмѣстѣ съ тѣмъ, сколько единицъ заключается въ седьмой части этого числа, и обратно, т.-е. отвѣтъ на одинъ изъ двухъ вопросовъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ отвѣтъ и на другой вопросъ.

Разложеніе даннаго числа на равныя части съ цѣлью опредѣлить величину каждой части, если извѣстно число ихъ, или число частей, если извѣстна ихъ величина, — приводитъ къ новому — четвертому ариѳметическому дѣйствію: *дѣленію.*

1) Раздѣлить одно число на другое — значитъ разложить первое изъ нихъ на столько равныхъ частей (т.-е. найти величину части), сколько единицъ заключается въ другомъ числѣ. Это — *дѣленіе на части.*

2) Раздѣлить одно число на другое — значитъ узнать, сколько разъ одно изъ нихъ содержится въ другомъ числѣ. Это — *дѣленіе по содержанію.*

Такъ какъ вопросы, рѣшаемые дѣленіемъ, являются обратными вопросу, который рѣшается умноженіемъ, *то дѣленіе есть дѣйствіе, обратное умноженію,* и можетъ быть опредѣлено еще слѣдующимъ образомъ.

Дѣленіемъ наз. такое ариѳм. дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію и одному изъ производителей отыскивается другой производитель.

Легко понять, что отысканіе множимаго есть дѣленіе на части, отысканіе множителя — дѣленіе по содержанію. Оба эти дѣйствія, обратныя умноженію, благодаря свойству перемѣстительности умноженія, могутъ быть выполнены, какъ мы видѣли, совершенно одинаково и потому составляютъ одно дѣйствіе — дѣленіе.

Данное произведеніе (число, подлежащее дѣленію) получаетъ названіе — дѣлимое, данный производитель (показывающій число частей или величину части) — дѣлитель, искомый производитель (означающій величину части или число частей) — частное.

Какъ уже было замѣчено выше, не всегда все дѣлимое можетъ быть разложено на требуемое число равныхъ частей или на равныя части требуемой величины: иногда, кромѣ этихъ частей, оно содержитъ еше нѣкоторую часть, называемую остаткомъ. Остатокъ меньше дѣлителя. Это видно, напримѣръ, изъ того, что дѣленіе мы можемъ выполнить посредствомъ вычитанія дѣлителя, которое продолжается до тѣхъ поръ, пока оно возможно, т.-е. пока ничего не останется, или останется число, отъ котораго уже нельзя отнять дѣлителя, т.-е. число, меньшее дѣлителя. Если дѣленіе совершается безъ остатка (одно число дѣлится нацѣло на другое), то частное наз. полнымъ частнымъ. Въ случаѣ остатка частное будетъ неполное.

Изъ предыдущаго вытекаютъ соотношенія между данными и искомыми въ умноженіи и дѣленіи.

a) *Каждый изъ двухъ производителей равенъ произведенію, раздѣленному на другого производителя.*

Отсюда способъ повѣрки умноженія посредствомъ дѣленія.

b) *Дѣлимое равно произведенію дѣлителя и полнаго частнаго.*

Дѣлимое равно произведенію дѣлителя и неполнаго частнаго, сложенному съ остаткомъ.

Отсюда способъ повѣрки дѣленія посредствомъ умноженія.

c) *Дѣлитель равенъ дѣлимому, раздѣленному на полное частное. Дѣлитель равенъ дѣлимому, за вычетомъ остатка, раздѣленному на неполное частное.* Отсюда способъ повѣрки дѣленія посредствомъ дѣленія.

21. Правила дѣленія. Выполнять дѣленіе такъ, какъ показано выше, посредствомъ сложенія, умноженія или вычитанія, было бы очень затруднительно при большихъ числахъ: надо искать иного пріема, который бы давалъ результатъ скорѣе. Такъ какъ оба вида дѣленія — дѣленіе на равныя части и дѣленіе по содержанію — могутъ быть выполнены совершенно одинаково, потому что одно изъ нихъ можетъ быть сведено къ другому, то нѣтъ надобности выводить

пріемъ дѣленія для того и другого вида отдѣльно: при выводѣ пріема мы можемъ въ каждомъ случаѣ разсматривать тотъ видъ дѣленія, который окажется здѣсь удобнѣе. Способы дѣленія основаны на слѣдующемъ свойствѣ этого дѣйствія.

Чтобы раздѣлить одно число на другое, можно разложить дѣлимое на произвольныя группы, однако такія, изъ которыхъ каждая дѣлится нацѣло на дѣлителя, раздѣлить эти группы въ произвольномъ порядкѣ на дѣлителя и полученныя частныя сложить.

Иначе: *чтобы раздѣлить на какое-нибудь число сумму нѣсколькихъ чиселъ, всѣ слагаемыя которой дѣлятся на это число, можно раздѣлить на него порознь каждое слагаемое и результаты сложить.*

Это свойство можно доказать, дѣлая повѣрку дѣленія посредствомъ умноженія. Въ самомъ дѣлѣ, пусть надо раздѣлить на 3 сумму $15+12+6$; раздѣливши каждое слагаемое, имѣемъ $15:3+12:3+6:3=5+4+2$. Что полученная сумма дѣйствительно третья часть данной суммы, мы докажемъ, умноживъ ее на 3, для чего, какъ извѣстно, можно умножить каждое слагаемое; будемъ имѣть данную сумму. Въ случаѣ дѣленія съ остаткомъ можно разложить дѣлимое на такія группы, изъ которыхъ только одна не дѣлится на дѣлителя; остатокъ отъ дѣленія этой группы будетъ остаткомъ отъ дѣленія и всего дѣлимаго.

Пользуясь этимъ свойствомъ, мы можемъ выразить правило дѣленія слѣдующимъ образомъ.

Для того, чтобы раздѣлить одно число на другое, надо разложить дѣлимое на такія группы, которыя всѣ (или всѣ кромѣ одной) дѣлились бы на дѣлителя, и притомъ каждая изъ нихъ давала бы въ частномъ единицы одного только разряда, числомъ не болѣе девяти; раздѣлить каждую группу на дѣлителя и полученныя частныя соединить въ одно.

Примѣняя это правило къ случаю однозначнаго дѣлителя, мы приходимъ къ отысканію однозначнаго частнаго при однозначномъ дѣлителѣ, или къ *таблицѣ дѣленія*. Если мы умѣемъ раздѣлить однозначное число на однозначное, напримѣръ 8 на 4, 9 на 2, и двузначное на однозначное, когда въ частномъ получается не болѣе 9-ти, напримѣръ 35 на 7,

50 на 9, то мы сумѣемъ раздѣлить многозначное число на однозначное; надо только предварительно распространить таблицу дѣленія на единицы сложныя, что̀ можетъ быть сдѣлано путемъ такого разсужденія: если 8 простыхъ единицъ, раздѣленныя на 4 равныя части, даютъ въ каждой части по 2 простыхъ единицы, то и 8 какихъ бы то ни было единицъ (напр. 8 сотенъ), раздѣленныя на 4 равныя части, дадутъ въ каждой части по 2 такихъ же единицы (по 2 сотни); если при дѣленіи 38-ми простыхъ единицъ на 5 равныхъ частей получается въ каждой части по 7 простыхъ единицъ, и при этомъ 3 простыхъ единицы остаются нераздѣленными, то и при дѣленіи 38 какихъ бы то ни было единицъ (напримѣръ 38 тысячъ) на 5 равныхъ частей будемъ имѣть въ каждой части по 7 такихъ же единицъ (по 7-ми тысячъ), при чемъ останутся еще нераздѣленными 3 такія же единицы (3 тысячи).

Примѣчаніе. Такъ какъ мы уже объединили оба вида дѣленія, т.-е. показали, что, раздѣливши дѣлимое на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ дѣлителѣ, мы узнаемъ вмѣстѣ съ тѣмъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, и наоборотъ, то можемъ считать, что распространили таблицу на оба случая дѣленія (4 въ 8-ми сотняхъ содержится 2 сотни разъ), хотя вели разсужденіе примѣнительно къ дѣленію на равныя части, что здѣсь удобнѣе.

Дѣленіе многозначныхъ чиселъ въ общемъ случаѣ состоитъ изъ ряда дѣленій многозначнаго числа на многозначное, когда въ частномъ получается число однозначное.

```
 965124 | 3876
 7752     249
 18992
 15504
  34884
  34884
```

Такъ дѣленіе 965124 : 3876 приводится къ дѣленіямъ на 3876 трехъ чиселъ: 9651 (собственно 7752), 18992 (15504) и 34884, изъ которыхъ каждое даетъ въ частномъ не болѣе 9-ти. При этомъ, подобно предыдущему, дѣленіе распространяется на сложныя единицы: если 9651 простая единица по дѣленіи на 3876 даетъ въ частномъ 2 простыхъ единицы и въ остаткѣ 1899 простыхъ единицъ, то 9651 сотня даетъ въ частномъ 2 сотни, при чемъ 1899 сотенъ остаются еще нераздѣленными).

Что касается дѣленія многозначнаго числа на многозначное при однозначномъ частномъ, то оно можетъ быть выполнено путемъ вычитанія (отнимаемъ дѣлителя до тѣхъ

поръ, пока ничего не останется, или останется число, меньшее дѣлителя) или посредствомъ умноженія (умножаемъ дѣлителя послѣдовательно на 1, 2, 3, 4 и т. д., пока не получимъ дѣлимое или число, большее дѣлимаго; въ послѣднемъ случаѣ искомымъ частнымъ будетъ предпослѣдній множитель.

Отыскивая частное путемъ умноженія, мы, очевидно, испытываемъ пригодность различныхъ однозначныхъ чиселъ. Число такихъ испытаній можетъ быть сокращено. Для этого предварительно распространимъ таблицу дѣленія на тотъ случай, когда дѣлимое и дѣлитель будутъ сложныя единицы одного и того же разряда. Если 8 простыхъ единицъ разложить на части, въ 2 простыхъ единицы каждая, то такихъ частей будетъ четыре (2 простыхъ единицы содержатся 4 раза въ 8-ми простыхъ единицахъ); если 8 какихъ бы то ни было единицъ, напримѣръ сотенъ, разложить на части, въ 2 такихъ единицы каждая (въ 2 сотни каждая), то частей такихъ выйдетъ тоже четыре (2 какихъ бы то ни было единицы содержатся 4 раза въ 8-ми такихъ же единицахъ) Если 45 простыхъ единицъ разложить на части, въ 6 единицъ каждая, то частей такихъ будетъ 7, и сверхъ того отъ дѣлимаго останется 3 простыхъ единицы; если 45 какихъ бы то ни было единицъ (45 тысячъ) разложить на части, въ 6 такихъ единицъ каждая (въ 6 тысячъ каждая), то частей такихъ выйдетъ тоже 7, и сверхъ того отъ дѣлимаго останется 3 такихъ же единицы (3 тысячи).

Примѣчаніе. Мы вели разсужденіе примѣнительно къ дѣленію по содержанію, что здѣсь удобнѣе; но такъ какъ мы объединили оба вида дѣленія, то можемъ считать, что распространили таблицу и на тотъ случай, когда совершается дѣленіе на равныя части (800 раздѣлить на 200 равныхъ частей, въ каждой части будетъ по 4).

Этимъ распространеніемъ таблицы дѣленія можемъ воспользоваться для отысканія приблизительнаго однозначнаго частнаго при дѣленіи многозначныхъ чиселъ. Пусть надо 9748 раздѣлить на 2437; вмѣсто данныхъ чиселъ беремъ числа: 9 тыс. и 2 тыс. (закругляемъ данныя числа назадъ); 2 тыс. содержатся въ 9 тыс. 4 раза; испытываемъ число 4, умножая на него дѣлителя 2437 и сравнивая произведеніе съ дѣлимымъ 9748; найденное такимъ путемъ число можетъ

оказаться велико; тогда испытываемъ число, на единицу меньшее и т. д. Если вторая, послѣ старшей, цифра дѣлителя будетъ 7, 8 или 9, напр., если дѣлителемъ будетъ число 3864, то его лучше закруглить впередъ, т.-е. взять 4 тыс., такъ какъ число 3864 ближе подходитъ къ 4 тыс., нежели къ 3 тыс.; напр., при дѣленіи 27048 на 3864 задаемся 4 тыс. въ 27 тыс. Найденное такимъ путемъ число можетъ оказаться мало; тогда испытываемъ число, на единицу большее, и т. д.

22. Таблица дѣленія. Мы уже говорили, что дѣленіе многозначныхъ чиселъ въ общемъ случаѣ состоитъ изъ ряда дѣленій многозначнаго числа на многозначное при однозначномъ частномъ, а въ этихъ послѣднихъ частное отыскивается при помощи таблицы дѣленія; слѣдовательно, дѣленіе чиселъ любой величины сводится къ таблицѣ дѣленія и для возможно быстраго выполненія требуетъ знанія этой таблицы наизусть.

Что касается составленія таблицы дѣленія, то оно можетъ быть сдѣлано посредствомъ вычитанія или умноженія такъ, какъ показано въ § 20-мъ. Кромѣ того, можно пользоваться уже извѣстными результатами дѣленія для полученія новыхъ результатовъ; такъ, напр., если мы уже знаемъ таблицу дѣленія въ предѣлѣ перваго десятка (дѣлимое не больше 10-ти), то для раздѣленія 15 на 3 разложимъ дѣлимое на 9 и на 6; для раздѣленія 40 на 5 раздѣлимъ 10 на 5 и частное умножимъ на 4. Такъ какъ таблица дѣленія является обратною по отношенію къ таблицѣ умноженія, и всѣ табличные результаты дѣленія могутъ быть найдены при помощи таблицы умноженія, то иногда считаютъ излишнимъ составленіе и изученіе особой таблицы дѣленія (зная, напр., что $9 \times 7 = 63$, мы знаемъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что $63 : 7 = 9$ и $63 : 9 = 7$; желая раздѣлить 48 на 6, припоминаемъ по таблицѣ умноженія, какое число надо умножить на 6, или на какое число надо умножить 6, чтобы получить 48).

ГЛАВА VI.

Измѣненіе результатовъ ариѳметическихъ дѣйствій.

23. Складывая два числа, мы находимъ число, равное даннымъ числамъ, вмѣстѣ взятымъ, и слѣд. большее каждаго изъ нихъ порознь; иначе, мы увеличиваемъ одно число на другое, или увеличиваемъ на столько единицъ (столькими единицами), сколько ихъ находится въ другомъ числѣ. Умножая одно число на другое, мы повторяемъ множимое слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во множителѣ; иначе, мы увеличиваемъ множимое во столько разъ, сколько во множителѣ единицъ. Вычитая одно число изъ другого, мы по цѣлому и части находимъ другую часть; а такъ какъ часть (остатокъ или разность) меньше цѣлаго (уменьшаемаго) и меньше на столько единицъ, сколько ихъ находится въ другой части (въ вычитаемомъ), то посредствомъ вычитанія мы уменьшаемъ одно число на другое, а также находимъ, на сколько одно число больше или меньше другого. Дѣля одно число на другое, мы по данному цѣлому (дѣлимому) и числу равныхъ частей (дѣлителю) находимъ величину каждой части; иначе, мы уменьшаемъ одно число во столько разъ, сколько единицъ въ другомъ числѣ; дѣля одно число на другое, мы по данному цѣлому (дѣлимому) и по данной величинѣ каждой изъ равныхъ частей (дѣлителю) находимъ число такихъ частей; иначе, мы узнаемъ, во сколько разъ одно число больше или меньше другого.

Выразимъ нѣсколько иначе приведенныя выше свойства дѣйствій и дополнимъ ихъ нѣкоторыми другими.

24. Измѣненія суммы. Чтобы прибавить какое-нибудь число къ суммѣ, можно придать его къ одному изъ слагаемыхъ; а чтобы отнять какое-нибудь число отъ суммы, можно отнять его отъ одного изъ слагаемыхъ (которое больше его). Отсюда слѣдуетъ:

Если одно изъ слагаемыхъ увеличить или уменьшить на какое-нибудь число, то на то же число увеличится или уменьшится и сумма.

Вообще, если иныя слагаемыя мы измѣнимъ, увеличивъ ихъ на какія-нибудь числа, а другія—уменьшивъ, то сумма увеличится или уменьшится, смотря по тому, что́ больше: сумма прибавковъ или сумма убавковъ, и на столько, на сколько одна изъ нихъ больше другой.

Если сумма двухъ слагаемыхъ увеличивается или уменьшается на какое-нибудь число, а одно изъ слагаемыхъ остается безъ перемѣны, то другое слагаемое должно увеличиться или уменьшиться на то же число.

Если сумма двухъ слагаемыхъ и одно изъ этихъ слагаемыхъ увеличиваются или уменьшаются на одно и то же число, то другое слагаемое остается безъ перемѣны.

Если одно изъ двухъ слагаемыхъ увеличить, а другое уменьшить на одно и то же число, то сумма останется безъ перемѣны.

Обратно: *если одно изъ двухъ слагаемыхъ увеличивается на какое-нибудь число, а сумма остается безъ перемѣны, то другое слагаемое должно уменьшиться на то же число, и наоборотъ: съ уменьшеніемъ перваго второе должно увеличиться.*

Для того, чтобы умножить или раздѣлить сумму на какое-нибудь число, можно умножить или раздѣлить на это число каждое слагаемое. Предполагается, что каждое слагаемое дѣлится на это число безъ остатка.

Иначе: *если каждое слагаемое увеличить или уменьшить въ одно и то же число разъ, то и сумма увеличится или уменьшится во столько же разъ.*

Обратно: *если одно изъ двухъ слагаемыхъ и сумма увеличиваются или уменьшаются въ одно и то же число разъ, то во столько же разъ должно увеличиться или уменьшиться и другое слагаемое.*

25. Измѣненія разности. Такъ какъ уменьшаемое есть сумма вычитаемаго и разности, то изъ предыдущаго вытекаютъ слѣдующія измѣненія разности:

Если уменьшаемое увеличить или уменьшить на какое-нидудь число, то и разность увеличится или уменьшится на то же число.

Въ этомъ случаѣ увеличивается или уменьшается на какое-нибудь число сумма двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно (вычитаемое) остается безъ перемѣны.

Если вычитаемое увеличить или уменьшить на какое-нибудь число, то разность, обратно, уменьшится или увеличится на то же число.

Въ этомъ случаѣ увеличивается или уменьшается на какое-нибудь число одно изъ слагаемыхъ (вычитаемое), а сумма (уменьшаемое) остается безъ перемѣны.

Если уменьшаемое и вычитаемое одновременно увеличить или уменьшить на одно и то же число, то разность останется безъ перемѣны.

Въ этомъ случаѣ сумма и одно изъ слагаемыхъ одновременно увеличиваются или уменьшаются на одно и то же число. Это свойство разности можетъ быть также выведено изъ двухъ предыдущихъ.

Свойствомъ разности не измѣняться отъ увеличенія уменьшаемаго и вычитаемаго на одно и то же число можно воспользоваться при производствѣ вычитанія. Пусть надо сдѣлать вычитаніе:

$$\begin{array}{r} 72548 \\ -\ 38795 \\ \hline 33753 \end{array}$$

Такъ какъ десятковъ въ уменьшаемомъ меньше, чѣмъ въ вычитаемомъ, то придадимъ къ нимъ одну сотню, или 10 десятковъ (не занимаемъ ихъ у сотенъ, а придаемъ, такъ сказать, со стороны), и вычитаемъ 9 десятковъ изъ 14 десятковъ. Но вмѣстѣ съ тѣмъ придаемъ одну сотню и къ вычитаемому, въ которомъ сотенъ будетъ уже 8. Далѣе вычитаемъ 8 сотенъ изъ 15 сот., 9 тыс. изъ 12 тыс., наконецъ, 4 дес. тыс. изъ 7 дес. тыс.

Если уменьшаемое и вычитаемое увеличить или уменьшить (предполагается, что уменьшаемое и вычитаемое дѣлятся безъ остатка) *въ одно и то же число разъ, то и разность увеличится или уменьшится во столько же разъ.*

Въ этомъ случаѣ сумма и одно изъ слагаемыхъ увеличиваются или уменьшаются въ одно и то же число разъ.

26. Измѣненія произведенія. Измѣненія произведенія могутъ быть выведены изъ измѣненія суммы. Возьмемъ произведеніе 15×12. Увеличимъ или уменьшимъ множимое на какое-нибудь число, напр. на 3; этимъ самымъ мы увеличимъ или уменьшимъ на 3 каждое изъ 12-ти слагаемыхъ; отъ этого сумма, т.-е. произведеніе, увеличится или уменьшится на число 3, повторенное 12 разъ. Сдѣлаемъ множителя 12 множимымъ, а 15 множителемъ. Уве-

личимъ или уменьшимъ множимое, напр. на 4; тогда произведеніе увеличится или уменьшится на число 4, повторенное 15 разъ. Отсюда:

Если одного изъ производителей увеличить или уменьшить на какое-нибудь число, то произведеніе увеличится или уменьшится на это число, умноженное на другого производителя.

Увеличимъ или уменьшимъ множимое въ нѣсколько разъ, напр. въ 3 раза; каждое слагаемое мы увеличили или уменьшили въ 3 раза. Отъ этого и сумма, произведеніе, увеличится или уменьшится въ 3 раза. Такъ какъ множитель можетъ быть сдѣланъ множимымъ, то, и съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ множителя въ нѣсколько разъ, во столько же разъ увеличивается или уменьшается произведеніе.

Если одного изъ производителей увеличить или уменьшить въ нѣсколько разъ, то и произведеніе увеличится или уменьшится во столько же разъ.

Если произведеніе двухъ чиселъ увеличивается или уменьшается въ нѣсколько разъ, а одинъ изъ производителей остается безъ перемѣны, то другой производитель долженъ увеличиться или уменьшиться во столько же разъ.

Если произведеніе двухъ чиселъ и одинъ изъ производителей увеличиваются или уменьшаются въ одно и то же число разъ, то другой производитель остается безъ перемѣны.

Если одного производителя увеличить, а другого уменьшить въ одно и то же число разъ, то произведеніе остается безъ перемѣны.

Обратно: *если одинъ изъ производителей увеличивается въ нѣсколько разъ, а произведеніе остается безъ перемѣны, то другой производитель долженъ уменьшиться во столько же разъ; и наоборотъ: съ уменьшеніемъ перваго производителя второй долженъ увеличиться.*

27. Измѣненія частнаго. Такъ какъ дѣлимое есть произведеніе дѣлителя и частнаго, то изъ предыдущаго вытекаютъ слѣдующія измѣненія частнаго. (Мы имѣемъ здѣсь въ виду полное частное, т.-е. разсматриваемъ случай дѣленія безъ остатка.)

Если дѣлимое увеличить или уменьшить въ нѣсколько разъ, то частное увеличится или уменьшится во столько же разъ.

Въ этомъ случаѣ увеличивается или уменьшается въ нѣсколько разъ произведеніе двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно (дѣлитель) остается безъ измѣненія.

Если дѣлителя увеличить или уменьшить въ нѣсколько разъ, то частное, обратно, уменьшится или увеличится во столько же разъ.

Въ этомъ случаѣ увеличивается или уменьшается одинъ изъ производителей (дѣлитель), а произведеніе (дѣлимое) остается безъ перемѣны.

Если дѣлимое и дѣлителя одновременно увеличить или уменьшить въ одно и то же число разъ, то частное останется безъ перемѣны.

Въ этомъ случаѣ произведеніе и одинъ изъ производителей одновременно увеличиваются или уменьшаются въ одно и то же число разъ. Это свойство частнаго можетъ быть также выведено изъ двухъ предыдущихъ.

Если къ дѣлимому прибавить или отъ дѣлимаго отнять дѣлителя, умноженнаго на какое-нибудь число, то частное увеличится или уменьшится на это число.

Напр., если къ дѣлимому прибавить или отъ дѣлимаго отнять дѣлителя, умноженнаго на 3, то частное увеличится или уменьшится на 3 единицы. Возьмемъ примѣръ: $56:8=7$; прибавимъ или отнимемъ отъ дѣлимаго дѣлителя 8, умноженнаго на 3, т.-е. 24. Мы знаемъ, что произведеніе 56 (дѣлимое) увеличивается или уменьшается на тройного производителя 8 (дѣлитель) тогда, когда другого производителя 7 (частное) мы увеличимъ или уменьшимъ на 3 единицы. Въ справедливости этого свойства можемъ убѣдиться и такимъ разсужденіемъ. Придавая къ дѣлимому тройного дѣлителя, будемъ имѣть въ дѣлимомъ сумму двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно есть прежнее дѣлимое, а второе — тройной дѣлитель; по дѣленіи на дѣлителя первое слагаемое даетъ прежнее частное, а второе даетъ 3 единицы, которыя къ прежнему частному должны быть прибавлены. Во второмъ случаѣ будемъ имѣть въ дѣлимомъ разность: уменьшаемымъ служитъ прежнее дѣлимое, вычитаемымъ — тройной дѣлитель; раздѣливши порознь уменьшаемое и вычитаемое, получимъ прежнее частное и 3 единицы, которыя отъ него должны быть отняты.

Разсмотримъ дѣленіе съ остаткомъ. Раздѣливши, напр., 47 на 5, имѣемъ въ частномъ 9 и въ остаткѣ 2. Дѣлимое равно частному, умноженному на дѣлителя+остатокъ: $47=9\times5+2$. Увеличимъ сумму 47 и первое слагаемое 9×5 напр. 3 раза; тогда и второе слагаемое 2 должно увеличиться въ 3 раза: $47\times3=9\times5\times3+2\times3$, или $141=9\times15+6$. Отсюда видно, что 141 при дѣленіи на 15 даетъ въ частномъ 9 и въ остаткѣ 6. Сравнивая дѣленіе 47-ми на 5 и дѣленіе 141 на 15, заключаемъ:

Если дѣлимое и дѣлителя увеличить или уменьшить въ одинаковое число разъ, то частное не измѣнится, а остатокъ увеличится или уменьшится во столько же разъ.

Отсюда слѣдуетъ: если дѣлимое и дѣлитель оканчиваются нулями, то можно въ нихъ отбросить поровну этихъ нулей и потомъ дѣлить одно на другое полученныя числа; найденное частное будетъ искомымъ; если при этомъ получится остатокъ, то къ нему надо приписать справа столько нулей, по скольку ихъ отброшено въ дѣлимомъ и дѣлителѣ (напр. снести къ остатку отброшенные нули дѣлимаго).

ГЛАВА VII.

Частные пріемы выполненія ариѳметическихъ дѣйствій.

28. Нѣкоторыя изъ изложенныхъ свойствъ ариѳм. дѣйствій позволяютъ въ иныхъ случаяхъ выполнять дѣйствія болѣе короткими путями, нежели общія правила производства дѣйствій. Такіе способы можно назвать сокращенными или частными (въ отличіе отъ общихъ) пріемами выполненія дѣйствій. Разсмотримъ нѣкоторые изъ нихъ.

29. Пріемъ округленія чиселъ. Будемъ называть *круглыми* такія числа, которыя состоятъ изъ сложныхъ единицъ одного только разряда, какъ напр. 80, 700, 2000 и т. п.[1]). Назовемъ числами, близкими къ круглымъ, такія числа, которымъ немного недостаетъ до круглыхъ, напр. 98, 596, 2997 и т. п. Округлить (закруглить впередъ) такія числа— значитъ прибавить къ нимъ столько, сколько имъ недостаетъ до круглыхъ; напр., мы округлимъ число 596, придавши къ нему 4.

Такъ какъ производить дѣйствія надъ круглыми числами проще, чѣмъ надъ числами, въ которыхъ имѣются единицы нѣсколькихъ разрядовъ, то въ тѣхъ случаяхъ, когда данныя числа близки къ круглымъ, ихъ удобно округлить. Примѣры.

1) $236+598$; придаемъ 600 и отъ полученной суммы 836 отнимаемъ 2, такъ какъ отъ увеличенія на 2 второго слагаемаго сумма также увеличилась на 2; поправку можно сдѣлать и напередъ: второе слагаемое мы увеличили на 2; для

---

[1]) Круглыми можно назвать вообще такія числа, которыя оканчиваются нулями, при немногихъ значущихъ цифрахъ, напр. 2400, 135000 и т. п.

того, чтобы сумма не измѣнилась, уменьшимъ на 2 первое слагаемое и, вмѣсто данныхъ чиселъ, сложимъ числа 234 и 600.

2) 825—497; отнимемъ 500 и къ полученному остатку 325 придадимъ 3, такъ такъ отъ увеличенія на 3 вычитаемаго остатокъ уменьшился на 3; поправку можно сдѣлать и напередъ: вычитаемое мы увеличиваемъ на 3; для того, чтобы остатокъ не измѣнился, увеличимъ на 3 и уменьшаемое и, вмѣсто данныхъ чиселъ, вычтемъ 500 изъ 828.

3) 398×7; умножимъ 400 на 7 и отъ полученнаго произведенія отнимемъ $2 \times 7 = 14$, такъ какъ отъ увеличенія множимаго на 2 произведеніе увеличилось на 2×7.

4) 243×99; умножаемъ 243 на 100 и отъ полученнаго произведенія отнимемъ 243, такъ какъ отъ увеличенія множителя на 1 произведеніе увеличилось на множимое.

5) 7992 : 4; дѣлимъ 8000 на 4 и отъ полученнаго частнаго отнимаемъ 2, такъ какъ мы прибавили къ дѣлимому число 8, равное двойному дѣлителю, отчего частное увеличилось на 2 единицы.

Примѣчаніе. Въ приведенныхъ примѣрахъ мы брали такія числа, близкія къ круглымъ, которымъ до круглыхъ недостаетъ менѣе десяти, какъ, напр., число 598. Чтобы округлить такое число, мы не станемъ по общему правилу вычитать 598 изъ 600: въ этомъ случаѣ вся выгода частнаго пріема исчезла бы; мы дѣлаемъ округленіе на основаніи системы счисленія и дополненія однозначнаго числа до 10-ти; такъ, зная систему счисленія, мы скажемъ, что ближайшее къ 598 круглое число есть 600, до котораго числу 598 не хватаетъ столько же, сколько числу 8 не хватаетъ до 10-ти. Если мы умѣемъ быстро брать дополненіе двузначнаго числа до 100, то можемъ округлить и такія числа, которымъ до круглыхъ недостаетъ болѣе 10-ти; напр., чтобы округлить число 587, беремъ дополненіе 87-ми до 100, т.-е. 13. Конечно, выгода частнаго пріема въ такихъ случаяхъ станетъ меньше, потому что надлежащую поправку результата будетъ дѣлать нѣсколько труднѣе.

Если мы умѣемъ быстро вычитать число изъ единицы слѣдующаго высшаго разряда, напр. 56 изъ 100, 283 изъ 1000 и т. д. [1]), то въ нѣкоторыхъ случаяхъ при вычитаніи можемъ поступить такъ: пусть надо вычесть 57 изъ 623; единицъ и десятковъ въ вычитаемомъ больше, чѣмъ въ

[1]) Для этого надо, очевидно, всѣ цифры числа вычесть изъ 9-ти, а послѣднюю (цифру единицъ) изъ 10-ти: такъ, вычитая 624 изъ единицы слѣдующаго высшаго разряда, получимъ 376. Разность между какимъ-нибудь числомъ и единицей слѣдующаго высшаго разряда наз. *ариѳметическимъ дополненіемъ* этого числа.

уменьшаемомъ; вычтемъ сначала 23, такъ что въ уменьшаемомъ останутся только сотни; затѣмъ отнимаемъ 23 отъ 57, чтобы узнать, сколько еще осталось вычитать, и наконецъ вычтемъ 34 изъ 600, для чего придется отнять 34 отъ 100.

30. Умноженіе и дѣленіе на 5, 25, 125. Замѣтимъ, что $5 \times 2 = 10$, $25 \times 4 = 100$, $125 \times 8 = 1000$.

Пусть надо какое-нибудь число, напр. 76, умножить на 5; для этого мы раздѣлимъ 76 на 2 и результатъ 38 умножимъ на 10; 380 будетъ искомое произведеніе; въ самомъ дѣлѣ, множимое 76 мы уменьшили въ 2 раза, а множителя 5 увеличили въ 2 раза; произведеніе отъ этого не измѣняется. Чтобы умножить какое-нибудь число на 25, мы раздѣлимъ его на 4 и результатъ умножимъ на 100; такъ, $84 \times 25 = 21 \times 100 = 2100$. Для умноженія какого-нибудь числа на 125, раздѣлимъ его на 8 и результатъ умножимъ на 1000; такъ: $72 \times 125 = 9 \times 1000 = 9000$. Если данное число не дѣлится нацѣло на 2, 4, 8, то остатокъ отъ этихъ дѣленій умножаемъ на 5, 25, 125 отдѣльно. Пусть, напр., надо 63 умножить на 25. Раздѣливши 63 на 4, имѣемъ въ частномъ 15 и въ остаткѣ 3; умножаемъ 15 на 100, а 3 на 25; имѣемъ въ произведеніи $1500 + 75 = 1575$. (При употребленіи дробей множимъ $15^3/_4$ на 100.) Подобнымъ же образомъ можно умножить на 50 (половина сотни) и на 250 (четверть тысячи). Пусть требуется 270 раздѣлить на 5; раздѣлимъ 270 на 10 и результатъ 27 умножимъ на 2; получимъ искомое частное 54; въ самомъ дѣлѣ, раздѣливши на 10, мы увеличили дѣлителя въ 2 раза, отчего частное въ 2 раза уменьшилось; чтобы найти вѣрное частное, надо полученное частное 27 увеличить въ 2 раза. Чтобы раздѣлить число на 25, раздѣлимъ его на 100 и результатъ умножимъ на 4; такъ: $21200 : 25 = 212 \times 4 = 848$. Чтобы раздѣлить число на 125, раздѣлимъ его на 1000 и результатъ умножимъ на 8; такъ: $42000 : 125 = 42 \times 8 = 336$. Подобнымъ же образомъ можно раздѣлить на 50 и на 250. Если данное число не оканчивается нулями, то одну, двѣ или три послѣднія цифры его дѣлимъ особо. Примѣры: $1350 : 25 = 13 \times 4 + 50 : 25 = 52 + 2 = 54$; $7285 : 125 = 7 \times 8 + 285 : 125$; раздѣливши 285 на 125, получимъ въ частномъ 2 и въ остаткѣ 35; поэтому отъ дѣленія 7285 на 125 будемъ имѣть въ частномъ $7 \times 8 + 2 = 58$ и въ остаткѣ 35.

31. Разложеніе множителя и дѣлителя на сомножителей.

Умноженіе.

Примѣръ 1. Умножить 18 на 15. Разложимъ множителя 15 на сомножителей 5 и 3. Умноживъ 18 на 5, имѣемъ 90; умноживъ 90 на 3, получимъ 270.

Примѣръ 2. Умножить 64 на 75. Разложимъ 75 на сомножителей 25 и 3. Умножаемъ 64 на 25 пріемомъ, указаннымъ въ § 30; $64:4=16$; $16\times100=1600$. Умноживъ 1600 на 3, имѣемъ 4800.

Примѣръ 3. Умиожить 9453 на 427. Множитель 427 состоитъ изъ 42-хъ десятковъ и изъ 7-ми единицъ. Число десятковъ въ 6 разъ больше числа единицъ.

$$\begin{array}{r} 9453 \\ \times 427 \\ \hline 66171 \\ +397026 \\ \hline 4036431 \end{array}$$

Второе неполное произведеніе (397026 десятковъ) получаемъ изъ перваго (66171), умноживъ его на 6. Точно такъ же можно поступать при умноженіи на 153, на 568, на 819 и т. п.

Дѣленіе.

Примѣръ 1. Раздѣлить 550 на 22. Разложимъ дѣлителя 22 на сомножителей 11 и 2. Раздѣливъ 550 на 11, имѣемъ 50; раздѣлимъ 50 на 2, получимъ 25.

Примѣръ 2. Раздѣлить 1329 на 35. Разложимъ дѣлителя на сомножителей 5 и 7. Раздѣливъ 1329 на 5, имѣемъ 265 (пятковъ) и въ остаткѣ 4 (единицы). Раздѣливши 265 на 7, получимъ въ частномъ 37 и въ остаткѣ 6. Такъ какъ мы дѣлили пятки, то и въ остаткѣ получилось 6 пятковъ. Такимъ образомъ, отъ дѣленія 1329 на 35 будемъ имѣть въ частномъ 37, а въ остаткѣ 4 единицы и 6 пятковъ, т.-е. $4+6\,.\,5=34$. Слѣд. для полученія полнаго остатка надо второй остатокъ умножить на перваго дѣлителя и произведеніе сложить съ первымъ остаткомъ.

Примѣръ 3. Сдѣлать превращеніе 517949 сек.

$$\begin{array}{r|l} 517949 & 10 \\ \hline 51794 & 6 \end{array} \left.\begin{array}{l} \text{остат. } 9 \\ 60 \\ \text{остат. } 2 \end{array}\right\} \text{полный остат. } 29.$$

$$\begin{array}{r|l} 8632 & 10 \\ \hline 863 & 6 \end{array} \left.\begin{array}{l} \text{остат. } 2 \\ 60 \\ \text{остат. } 5 \end{array}\right\} \text{полный остат. } 52.$$

$$\begin{array}{r|l} 143 & 4 \\ \hline 35 & 6 \\ \hline 5 & \end{array} \left.\begin{array}{l} \text{остат. } 3 \\ 24 \\ \text{остат. } 5 \end{array}\right\} \text{полный остат. } 23.$$

517949 сек. = 5 сут. 23 чс. 52 мн. 29 ск.

32. Нѣкоторые другіе сокращенные пріемы. Какъ мы уже упоминали выше (§ 15, глава III), вмѣсто обычнаго пріема вычитанія, можно найти разность двухъ чиселъ, опредѣляя, сколько надо прибавить къ вычитаемому, чтобы получить уменьшаемое.

Примѣръ 1. Изъ 31802 вычесть 27568.

31802
27568
4234 Ходъ разсужденія будетъ такой:

8 да 4 даютъ 12; пишемъ 4, замѣчаемъ 1.
6+1=7 да 3 даютъ 10; пишемъ 3, замѣчаемъ 1.
5+1=6 да 2 даютъ 8; пишемъ 2,
7 да 4 даютъ 11; пишемъ 4, замѣчаемъ 1.
2+1=3.

Примѣръ 2. Изъ числа 80926 вычесть сумму чиселъ 19548 и 32969.

8+9=17 да 9 даютъ 26; пишемъ 9, замѣчаемъ 2.
80926 4+6+2=12 да 0 даютъ 12; пишемъ 0, замѣчаемъ 1.
19548 5+9+1=15 да 4 даютъ 19; пишемъ 4, замѣчаемъ 1.
32969 9+2+1=12 да 8 даютъ 20; пишемъ 8, замѣчаемъ 2.
28409 1+3+2= 6 да 2 даютъ 8; пишемъ 2.

Примѣръ 3. Примѣнимъ этотъ пріемъ къ тому случаю, когда изъ какого-нибудь числа надо вычесть другое число, повторенное нѣсколько разъ (не болѣе девяти разъ): изъ 784596 вычесть 23478×8.

784596
23478×8
596772

8×8=64 да 2 даютъ 66; пишемъ 2, замѣчаемъ 6.
7×8+6=62 да 7 даютъ 69; пишемъ 7, замѣчаемъ 6.
4×8+6=38 да 7 даютъ 45; пишемъ 7, замѣчаемъ 4.
3×8+4=28 да 6 даютъ 34; пишемъ 6, замѣчаемъ 3.
2×8+3=19 да 9 даютъ 28; пишемъ 9, замѣчаемъ 2.
2 да 5 даютъ 7; пишемъ 5.

Употребляя изложенный способъ при дѣленіи, мы можемъ сразу писать остатки, которые получаются отъ вычитанія дѣлителя, умноженнаго на отдѣльныя цифры частнаго.

Примѣръ 4.

```
13877136 | 3276
 7731     4236   Первый остатокъ 773 находимъ такъ:
 11793          6×4=24 да 3 даютъ 27; пишемъ 3, замѣчаемъ 2.
  19656 7×4+2=30 да 7 даютъ 37; пишемъ 7, замѣчаемъ 3.
        2×4+3=11 да 7 даютъ 18; пишемъ 7, замѣчаемъ 1.
        3×4+1=13.
```

Подобнымъ же образомъ опредѣляемъ прочіе остатки.

Укажемъ еще сокращенный пріемъ умноженія на числа отъ 11 до 19, т.-е. на такія двузначныя числа, у которыхъ на мѣстѣ десятковъ стоитъ цифра 1. Умножимъ напр. 5438 на 17, сначала обыкновеннымъ способомъ.

```
 5438
 ×17
 38066
+5438
 92446
```

Легко усмотрѣть, что окончательное произведеніе можно написать сразу слѣдующимъ образомъ: умножать на 7 цифры множимаго, прибавляя къ каждому результату ту цифру множимаго, которая стоитъ направо отъ умноженной его цифры.

```
 5438
 ×17
 92446
```

8×7 =56; пишемъ 6, замѣчаемъ 5
3×7+5=26; прибав. 8, будетъ 34; пишемъ 4, замѣчаемъ 3.
4×7+3=31; прибав. 3, будетъ 34; пишемъ 4, замѣчаемъ 3.
5×7+3=38; прибав. 4, будетъ 42; пишемъ 2, замѣчаемъ 4.
къ замѣч. 4 прибав. 5, будетъ 9; пишемъ 9.

Примѣчаніе. Подобнымъ же образомъ можно поступать и тогда, когда множитель есть двузначное число, имѣющее единицу на первомъ мѣстѣ (напр. 21, 51, 91). Только здѣсь, умножая цифры множимаго на десятки множителя, мы должны къ каждому результату прибавлять ту цифру множимаго, которая стоитъ налѣво отъ умноженной его цифры.

ГЛАВА VIII.

Задачи.

33. Ариѳметической задачей называется вопросъ, въ которомъ требуется при помощи ариѳметическихъ дѣйствій найти одно или нѣсколько неизвѣстныхъ чиселъ по числамъ даннымъ. Найти неизвѣстныя—значитъ рѣшить задачу. Для того, чтобы можно было найти неизвѣстныя числа по чис-

ламъ даннымъ, надо знать, какая зависимость существуетъ между неизвѣстными и данными. Всякое указаніе такой зависимости называется условіемъ задачи.

Вопросъ, въ которомъ дѣйствія и порядокъ ихъ названы или указаны знаками, называется *численнымъ примѣромъ*.

Задачи раздѣляются на *простыя* и *сложныя*. Простою задачею называется такая, которая рѣшается *однимъ* изъ четырехъ главныхъ дѣйствій. Сложною задачею называется такая, которая рѣшается *нѣсколькими* дѣйствіями или повтореніемъ одного и того же дѣйствія.

34. Простыя задачи. Перечислимъ простыя задачи, рѣшаемыя каждымъ изъ четырехъ дѣйствій, или случаи употребленія каждаго изъ этихъ дѣйствій.

Сложеніемъ рѣшаются такія задачи, въ которыхъ требуется:

1) Найти число, равное даннымъ числамъ, вмѣстѣ взятымъ, или отвѣтить на вопросъ: сколько всего?

Ученикъ купилъ тетрадь и карандашъ; за тетрадь онъ заплатилъ 5 коп., за карандашъ 3 коп. Сколько денегъ пошло у него на всю покупку?

2) Одно число увеличить другимъ.

У помѣщика 5 черныхъ коровъ, а рыжихъ на 2 болѣе. Сколько у него рыжихъ коровъ?

Вычитаніемъ рѣшаются такія задачи, въ которыхъ требуется:

1) Узнать, сколько останется?

У хозяина было 8 овецъ; 3-хъ овецъ онъ продалъ. Сколько овецъ у него осталось?

2) Одно число уменьшить на другое.

Брату 8 лѣтъ, сестрѣ на 3 года меньше. Сколько лѣтъ сестрѣ?

3) Найти разность между двумя данными числами: узнать, насколько одно изъ нихъ больше или меньше другого (разностное сравненіе чиселъ).

Въ одной семьѣ 8 душъ, а въ другой 3 души. На сколько душъ въ первой семьѣ больше, чѣмъ во второй? На сколько душъ во второй семьѣ меньше, чѣмъ въ первой?

Умноженіе употребляется въ тѣхъ случаяхъ, когда надо:

1) По данному числу равныхъ слагаемыхъ и величинѣ слагаемаго опредѣлить ихъ сумму, или повторить число нѣсколько разъ.

Крестьянинъ ѣхалъ изъ деревни въ городъ 3 часа и проѣзжалъ въ часъ по 5 верстъ. Сколько верстъ отъ деревни до города?

2) Увеличить число въ нѣсколько разъ.

Карандашъ стоитъ 5 коп., а грифельная доска въ 3 раза дороже. Сколько стоитъ грифельная доска?

Дѣленіе на части употребляется въ такихъ случаяхъ, когда надо:

1) Раздѣлить данное число на извѣстное число равныхъ частей, или найти часть даннаго числа (а также и остатокъ, если онъ есть).

У матери былъ кусокъ полотна въ 15 арш.; третью часть этого куска она отрѣзала на простыню. Сколько арш. она отрѣзала на простыню?

Учитель хотѣлъ раздѣлить перья поровну 3 ученикамъ старшаго отдѣленія: перьевъ оказалось 17. Самое большее, по скольку перьевъ достанется каждому, и сколько перьевъ останутся нерозданными?

2) Данное число уменьшить въ извѣстное число разъ.

Самоваръ вѣситъ 15 фун., кастрюля въ 3 раза меньше. Сколько вѣситъ кастрюля?

Дѣленіе по содержанію употребляется въ тѣхъ случаяхъ, когда надо:

3) Узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, или какую часть одного числа составляетъ другое.

Тетрадь стоитъ 3 коп. Сколько такихъ тетрадей дадутъ на 15 коп.?

Въ среднемъ отдѣленіи училища 15 учащихся, изъ которыхъ 3 дѣвочки. Какую часть всѣхъ учащихся въ этомъ отдѣленіи составляютъ дѣвочки?

Въ случаѣ неполнаго дѣленія надо найти наибольшее число разъ, какое одно число содержится въ другомъ, а также величину остатка.

Яблоко стоитъ 3 коп. Самое большее, сколько такихъ яблоковъ можно купить на 20 коп., и сколько при этомъ придется получить сдачи?

4) Узнать, во сколько разъ одно число больше или меньше другого (кратное сравненіе двухъ чиселъ).

Отъ деревни до города 15 верстъ, а до села 3 версты. Во сколько разъ городъ дальше отъ деревни, чѣмъ село? Во сколько разъ село ближе къ деревнѣ, нежели городъ?

Приведенныя простыя задачи могутъ быть раздѣлены на двѣ группы: 1) такія задачи, въ которыхъ мы по даннымъ числамъ отыскиваемъ новое число, минуя вопросъ о сравнительной величинѣ данныхъ чиселъ и искомаго; 2) такія задачи, въ которыхъ явно выступаетъ понятіе объ измѣненіи числа, въ смыслѣ увеличенія и уменьшенія его, или о сравненіи по величинѣ данныхъ чиселъ.

Вопросы, рѣшаемые каждымъ изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій, могутъ быть поставлены и косвенно, слѣдующимъ образомъ.

На сложеніе.

Отъ какого числа надо отнять одно изъ данныхъ чиселъ, чтобы осталось другое данное число? Отъ какого числа надо отнять 3, чтобы осталось 5? $?-3=5$.

Ученику было задано рѣшить нѣсколько задачъ; когда онъ рѣшилъ 3 задачи, ему осталось рѣшить еще 5 задачъ. Сколько задачъ было задано ученику?

На вычитаніе.

Къ какому числу надо прибавить одно изъ данныхъ чиселъ, чтобы получить другое данное? Къ какому числу надо прибавить 3, чтобы получить 8? $?+3=8$.

У хозяйки было нѣсколько курицъ; когда она купила еще 3-хъ курицъ, тогда у нея стало 8 куръ. Сколько куръ было у нея сначала?

Сколько надо прибавить къ одному изъ данныхъ чиселъ, чтобы получить другое данное число? Сколько надо прибавить къ 3, чтобы получить 8? $3+?=8$.

На стѣнѣ висѣло 3 картины; когда туда повѣсили еще нѣсколько картинъ, тогда всѣхъ картинъ на стѣнѣ стало 8. Сколько картинъ повѣсили на стѣну?

Сколько надо отнять отъ одного изъ данныхъ чиселъ, чтобы осталось другое данное число? Сколько надо отнять отъ 8, чтобы осталось 3? 8—?=3.

У мастера было было 8 фунт. серебра; когда онъ сдѣлалъ изъ него нѣсколько ложекъ, то у него осталось серебра 3 фунта. Сколько серебра пошло на ложки?

Въ задачахъ на умноженіе и дѣленіе косвенная форма заданія проявляется менѣе отчетливо.

35. Сложныя задачи. Всякая сложная задача приводится къ простымъ. Чтобы рѣшить сложную задачу, ее надо разбить на простыя, т.-е. надо найти, какія простыя задачи и въ какомъ порядкѣ слѣдуетъ рѣшить для того, чтобы опредѣлить то, что отыскивается въ сложной задачѣ. Найти содержаніе и порядокъ простыхъ задачъ, на которыя разлагается задача сложная, значитъ составить планъ рѣшенія сложной задачи.

Ариѳметическія задачи принято раздѣлять на 1) задачи чисто ариѳметическія и 2) задачи алгебраическаго характера (иногда называемыя задачами съ предположеніями). Къ первымъ относятся задачи болѣе легкія, такія, условія которыхъ прямо указываютъ рядъ дѣйствій, приводящій къ отысканію неизвѣстнаго. Задачи алгебраическаго характера — это задачи болѣе трудныя, условія которыхъ скорѣе указываютъ рядъ дѣйствій, совершонныхъ надъ искомыми и данными (простѣйшими образцами такихъ задачъ могутъ служить приведенныя выше простыя задачи, выраженныя въ косвенной формѣ).

Примѣръ задачи чисто ариѳметической:

Торговка смѣшала 12 десятковъ яблоковъ одного сорта съ 18 десятками яблоковъ другого сорта и продала смѣшанныя яблоки по одинаковой цѣнѣ за десятокъ; самой ей яблоки перваго сорта обходились по 17 коп., другого сорта — по 11 коп. десятокъ; отъ продажи всѣхъ яблоковъ она имѣла 78 коп. прибыли. Почемъ продавала она десятокъ смѣшанныхъ яблоковъ?

Примѣръ задачи алгебраическаго характера:

Торговка продала 30 десятковъ яблоковъ двухъ сортовъ за 4 руб. 80 коп. и получила при этомъ 78 коп. прибыли;

самой ей яблоки одного сорта обошлись по 17 коп., другого сорта—по 11 коп. десятокъ. Сколько десятковъ яблоковъ того и другого сорта продала торговка?

Въ своемъ мѣстѣ мы укажемъ главнѣйшіе типы задачъ, встрѣчающіеся въ сборникахъ задачъ для обученія начальной ариѳметикѣ, которыя могутъ быть отнесены къ задачамъ алгебраическаго характера.

Для рѣшенія сложныхъ задачъ, т.-е. для опредѣленія содержанія и порядка простыхъ задачъ, на которыя распадаются сложныя, существуютъ два пріема: синтетическій и аналитическій, или *синтезъ* и *анализъ*.

Задача. Торговецъ смѣшалъ 20 фунт. чаю, фунтъ котораго обходился ему въ 3 руб., и 90 фунт. чаю, фунтъ котораго стоилъ ему 1 руб. 20 коп. Почемъ долженъ онъ продавать фунтъ смѣси, чтобы отъ всей продажи получить 19 руб. прибыли?

Употребляя синтетическій пріемъ, рѣшаемъ задачу такъ. Выбираемъ изъ данныхъ чиселъ два числа, напр. 20 фунт. и 3 руб., и по нимъ составляемъ простую задачу; по значенію выбранныхъ чиселъ (количество чая и цѣна одного фунта его) вопросъ ея будетъ такой: сколько стоитъ весь чай перваго сорта? Точно такъ же по числамъ 90 фунт. и 1 р. 20 к. составляемъ простую задачу съ вопросомъ: сколько стоитъ весь чай второго сорта? Беремъ снова два числа, найденныя въ двухъ первыхъ задачахъ — стоимость всего чая перваго и стоимость всего чая второго сорта; по этимъ числамъ составляемъ простую задачу съ вопросомъ: сколько стоитъ вся смѣсь? Взявъ число, найденное въ этой послѣдней задачѣ, и одно изъ чиселъ, данныхъ въ самой сложной задачѣ—19 руб., составляемъ простую задачу съ вопросомъ: за сколько должно продать всю смѣсь? Числа 20 фунт. и 90 фунт., данныя въ сложной задачѣ, приводятъ къ простой задачѣ, имѣющей вопросъ: сколько фунтовъ во всей смѣси? Взявши найденное число, показывающее, за сколько надо продать всю смѣсь, и число, показывающее количество смѣси, составляемъ простую задачу съ вопросомъ: почемъ должно продавать фунтъ смѣси? Это будетъ послѣдняя простая задача: ея вопросъ совпадаетъ съ вопросомъ сложной задачи, и отвѣтъ на нее служитъ отвѣтомъ на данную сложную задачу.

Употребляя пріемъ аналитическій, поступаемъ такъ. Беремъ вопросъ сложной задачи: почемъ должно продавать фунтъ смѣси? и подыскиваемъ такія данныя, которыя бы позволили рѣшить этотъ вопросъ однимъ дѣйствіемъ. Чтобы рѣшить этотъ вопросъ однимъ дѣйствіемъ, надо знать: 1) сколько фунтовъ во всей смѣси? и 2) за сколько должно продать всю смѣсь? ни то ни другое въ задачѣ не дается. Подыскиваемъ такія данныя, которыя бы позволили рѣшить однимъ дѣйствіемъ каждый изъ этихъ двухъ вопросовъ. Для рѣшенія перваго вопроса надо знать, сколько фунтовъ чаю перваго сорта и сколько фунтовъ чаю второго сорта вошло въ смѣсь; то и другое въ задачѣ дается. Для рѣшенія второго вопроса (за сколько должно продать всю смѣсь?) надо знать: 1) сколько стоитъ вся смѣсь? и 2) сколько прибыли желаютъ получить? Послѣднее имѣется въ числѣ данныхъ задачи. Чтобы узнать однимъ дѣйствіемъ стоимость всей смѣси, надо знать стоимость перваго и стоимость второго сорта чаю. Чтобы найти стоимость перваго сорта, надо знать его количество и цѣну одного фунта; это дается въ задачѣ. Чтобы найти стоимость второго сорта, надо знать его количество и цѣну одного фунта; это также дается въ задачѣ.

Въ синтезѣ мы всякій разъ по двумъ даннымъ составляемъ вопросъ, который можетъ быть посредствомъ ихъ рѣшенъ. Въ анализѣ мы къ поставленному вопросу подбираемъ такія данныя, зная которыя, мы могли бы рѣшить этотъ вопросъ однимъ дѣйствіемъ.

Примѣчаніе. Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію задачи тѣмъ или другимъ пріемомъ, мы должны, конечно, вникнуть въ условія и вопросъ ея, должны усвоить содержаніе задачи. Это ознакомленіе съ содержаніемъ задачи ведетъ къ тому, что мы до извѣстной степени уже намѣчаемъ себѣ зависимость искомаго числа отъ данныхъ. Поэтому, приступая къ рѣшенію задачи синтезомъ, мы выбираемъ данныя не совсѣмъ произвольно, или наугадъ: мы беремъ такія числа, чтобы составленное по нимъ новое число могло служить къ дальнѣйшему рѣшенію задачи; такъ, выбирая числа 20 фунт. и 3 руб., мы уже намѣтили, по крайней мѣрѣ, вопросъ объ опредѣленіи стоимости всей смѣси, къ рѣшенію котораго послужитъ число, найденное по числамъ 20 фунт. и 3 руб., показывающее стоимость чая перваго сорта. Такимъ образомъ, составляя вопросъ по выбраннымъ даннымъ, мы оцѣниваемъ число, даваемое рѣшеніемъ этого вопроса, съ точки зрѣнія даннаго, необходимаго для рѣшенія уже другого намѣченнаго вопроса,

т.-е. вмѣстѣ съ синтезомъ дѣлаемъ и анализъ. (Напр., мы не беремъ числа 3 руб. и 1 руб. 20 коп. и не ставимъ, напр., вопроса: насколько фунтъ чаю перваго сорта дороже фунта чаю второго сорта, потому что не знаемъ, какъ воспользоваться этимъ даннымъ для дальнѣйшаго рѣшенія задачи). Съ другой стороны, рѣшая задачу анализомъ, подбирая данныя, которыя бы позволили однимъ дѣйствіемъ рѣшить вопросъ: почемъ должно продавать фунтъ смѣси, мы останавливаемся на такихъ данныхъ, которыя могутъ быть найдены по условіямъ задачи, или мы оцѣниваемъ эти данныя какъ результаты, которые могутъ быть получены изъ другихъ данныхъ, т.-е. вмѣстѣ съ анализомъ дѣлаемъ и синтезъ. Конечно, можетъ случиться такъ, что при рѣшеніи задачи синтезомъ мы выберемъ иногда такія данныя и составимъ по нимъ такой вопросъ, рѣшеніе котораго безполезно для отысканія неизвѣстнаго сложной задачи, и который потомъ должны будемъ отбросить; при рѣшеніи задачи анализомъ мы иногда временно остановимся на такомъ данномъ, которое по условіямъ задачи не можетъ быть найдено, и взамѣнъ котораго станемъ потомъ искать другое данное.

Для рѣшенія болѣе трудныхъ задачъ (задачъ алгебраическаго характера) употребляется слѣдующій пріемъ, называемый также анализомъ.

Если мы затрудняемся рѣшить данную задачу, то замѣняемъ ее другою задачею съ тѣмъ же самымъ вопросомъ. Для этого измѣняемъ условія данной задачи, оставляя безъ перемѣны искомое. Если затрудняемся рѣшить и новую задачу, то подобнымъ же образомъ замѣняемъ ее третьею и т. д. до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ такой задачѣ, рѣшить которую умѣемъ.

Задача. Куплено 14 пуд. муки одного сорта и 9 пуд. муки другого сорта; за весь первый сортъ отдали на 6 руб. 30 коп. больше, чѣмъ за второй; а за пудъ муки перваго сорта платили на 20 коп. дороже, чѣмъ за пудъ второго сорта. Почемъ платили за пудъ муки того и другого сорта?

Въ этой задачѣ два неизвѣстныхъ; но разъ найдено одно изъ нихъ, легко опредѣлится и другое. Поэтому будемъ искать, напр., цѣну пуда муки второго сорта. Разсуждаемъ. За муку перваго сорта заплачено дороже по двумъ причинамъ: 1) ея куплено больше; 2) пудъ ея стоитъ дороже. Устранимъ одну изъ этихъ причинъ, напр. вторую; для этого сбросимъ по 20 коп. съ цѣны каждаго пуда муки перваго сорта (т.-е. предположимъ, что пудъ муки перваго сорта стоитъ столько же, сколько и пудъ второго сорта), тогда со всей стоимости муки перваго сорта придется скинуть 20 к. $\times 14 = 2$ руб. 80 коп., и первый сортъ бу-

детъ дороже второго только на 3 руб. 50 коп. (6 руб. 30 коп.— —2 руб. 80 коп.=3 руб. 50 коп.). Данную задачу мы замѣнили такою:

Куплено 14 пуд. муки одного сорта и 9 пуд. муки другого сорта; за муку перваго сорта отдали на 3 руб. 50 коп. больше, чѣмъ за муку второго сорта, за пудъ муки того и другого сорта платили поровну. Почемъ платили за пудъ муки?

За муку перваго сорта заплатили дороже по одной только причинѣ: ея купили больше на 5 пуд.; слѣд. 3 руб. 50 коп. есть стоимость 5 пуд. муки. Мы пришли къ простой задачѣ: 5 пуд. муки стоятъ 3 руб. 50 коп. Сколько стоитъ пудъ? 3 руб. 50 коп.:5=70 коп.

Измѣняя условія данной задачи, мы оставили безъ перемѣны цѣну пуда муки второго сорта; слѣд. 70 коп. стоитъ пудъ муки второго сорта. Цѣна муки перваго сорта равна: 70 коп.+20 коп.=90 коп.

ГЛАВА IX.

Дроби.

36. Происхожденіе дробей. Опредѣленіе дробей. Какъ мы говорили выше (гл. I, § 5), то, что считаютъ (чему ведутъ счетъ), иногда не принимаютъ за самостоятельную единицу, а разсматриваютъ какъ часть единицы. Тогда получаемое число наз. *числомъ дробнымъ*, или *дробью*. Весьма часто такъ поступаютъ при измѣреніи. Съ этой точки зрѣнія (счетъ равными частями единицы) дроби дано такое опредѣленіе:

Дробь есть совокупность нѣсколькихъ одинаковыхъ частей (а также одна часть) единицы.

Одну часть единицы называютъ также *долею*.

Для выраженія дроби необходимы два числа: 1) число, показывающее, на сколько равныхъ частей раздѣлена единица, или означающее (знаменующее) величину частей; оно наз. *знаменателемъ* дроби, и 2) число, показывающее, сколько взято (соединено) такихъ частей; оно наз. *числителемъ*

дроби (число взятыхъ частей). Числитель произносится сначала, знаменатель потомъ: двѣ пятыхъ (части); письменное обозначеніе: $^2/_5$ или $\frac{2}{5}$.

Пусть надо число 3 раздѣлить на 5 равныхъ частей, т.-е. найти пятую часть 3-хъ единицъ (такого дѣленія—меньшаго числа на большее — требуютъ многіе практическіе вопросы). Пользуясь свойствомъ дѣленія, разложимъ дѣлимое на единицы, раздѣлимъ каждую изъ нихъ на 5 равныхъ частей (получимъ пятую часть единицы) и результаты сложимъ. Имѣемъ $3:5=(1+1+1):5={}^1/_5+{}^1/_5+{}^1/_5={}^3/_5$, т.-е. пятая часть трехъ единицъ (числа 3) равна 3 пятымъ частямъ единицы, т.-е. равна дроби $^3/_5$.

Разсмотримъ дѣленіе по содержанію. Раздѣлить по содержанію одно число на другое, напр. 20 на 5, значитъ узнать, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, или иначе—значитъ измѣрить дѣлимое дѣлителемъ (число 20 измѣрить числомъ 5, пяткомъ). Пусть надо раздѣлить 3 на 5 въ смыслѣ содержанія (примѣръ: во сколько часовъ можно пройти 3 версты, если проходить въ часъ по 5 верстъ?), или измѣрить число 3 числомъ 5. Здѣсь мы имѣемъ случай, подобный тому, какъ если бы намъ надо было, напр., измѣрить саженью длину стола, каторая меньше сажени. Такъ какъ мѣра (5) больше измѣряемаго числа (3), то мы раздѣлимъ мѣру на равныя части, именно на 5 равныхъ частей, и произведемъ измѣреніе такою частью. Пятая часть дѣлителя (1) содержится въ дѣлимомъ 3 раза, слѣд. дѣлимое равно $^3/_5$ дѣлителя; т.-е. раздѣливши 3 на 5 въ смыслѣ содержанія, получимъ въ результатѣ дробь $^3/_5$.

Итакъ, дробь происходитъ не только отъ дѣленія единицы на равныя части и соединенія нѣсколькихъ такихъ частей, но и отъ дѣленія вообще какого-нибудь числа (числителя) на другое число (знаменателя). Съ этой точки зрѣнія:

Дробь есть частное, происходящее отъ дѣленія числителя на знаменателя.

Это опредѣленіе дроби ведетъ къ отысканію полнаго частнаго при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ въ томъ случаѣ, когда дѣленіе совершается съ остаткомъ. Раздѣливъ, напримѣръ, 27 на 4, имѣемъ въ частномъ 6 и въ остаткѣ 3; этотъ остатокъ также подлежитъ дѣленію и дастъ въ част-

номъ $^3/_4$, такъ что полное частное состоитъ изъ 6 цѣлыхъ единицъ и $^3/_4$ единицы.

Дробь, меньшая единицы, наз. *правильной* дробью; у такой дроби числитель меньше знаменателя: $^1/_2$, $^3/_4$. Дробь, большая единицы или равная единицѣ, наз. *неправильной* дробью; у такой дроби числитель больше знаменателя или равенъ ему: $^8/_5$, $^{24}/_6$, $^7/_7$.

Сумма цѣлаго и дроби наз. *цѣлымъ съ дробью*, или смѣшаннымъ *числомъ;* въ обозначеніи его знакъ + опускается: $4^5/_8$ — четыре и пять восьмыхъ; $3^1/_4$ — три съ четвертью: $1^1/_2$ — полтора.

37. Измѣненіе вида и величины дробей. Мы не станемъ излагать здѣсь подробно вопросъ объ обращеніи цѣлаго съ дробью въ неправильную дробь и исключеніи цѣлаго изъ неправильной дроби, объ измѣненіи величины дробей при увеличеніи и уменьшеніи въ нѣсколько разъ числителя и знаменателя, о неизмѣняемости величины дроби при совмѣстномъ умноженіи или дѣленіи числителя и знаменателя на одно и то же число, о сокращеніи дробей и приведеніи ихъ къ общему знаменателю. Всѣ преобразованія дробныхъ чиселъ и измѣненія ихъ можно вывести, разсматривая дробь или какъ совокупность одинаковыхъ частей единицы, или какъ частное отъ дѣленія числителя на знаменателя.

Примѣры:

1) Цѣлое съ дробью, напр., $3^5/_8$, обратить въ неправильную дробь (въ восьмыя доли).

Разсуждаемъ: въ единицѣ 8 восьмыхъ, въ 3 единицахъ въ 3 раза больше, т.-е. $8 \times 3 = 24$ восьмыхъ; 24 восьмыхъ и 5 восьмыхъ составляютъ $\frac{29}{8}$.

Иначе: цѣлое съ дробью $3^5/_8$ разсматриваемъ, какъ полное частное отъ дѣленія нѣкотораго числа на 8, гдѣ 3 есть цѣлое частное, 5 — остатокъ; дѣлимое (искомый числитель) равно произведенію цѣлаго частнаго и дѣлителя, сложенному съ остаткомъ: $3 \times 8 + 5 = 29$.

Итакъ, $3^5/_8$ есть частное отъ дѣленія 29 на 8, т.-е. дробь $\frac{29}{8}$.

2) Величина дроби не измѣняется отъ умноженія или дѣленія числителя и знаменателя на одно и то же число.

Разсуждаемъ: если умножить только числителя на какое-нибудь цѣлое число, напр. на 3, то дробь увеличится въ 3 раза, потому что доли остаются прежнія, а число ихъ становится втрое больше; если умножить только знаменателя, напр. на 3, то дробь уменьшится въ три раза, потому что число долей остается прежнимъ, а доли дѣлаются въ 3 раза мельче; итакъ, если умножимъ числителя дроби, напр. на 3, то дробь въ 3 раза увеличится; если умножимъ теперь на 3 знаменателя получаемой дроби, то она въ 3 раза уменьшится, т.-е. приметъ прежнюю величину. Подобнымъ же образомъ разсуждаемъ при дѣленіи числителя и знаменателя на одно и то же число.

Иначе: дробь есть частное, а частное, какъ мы знаемъ, не измѣняется отъ умноженія или дѣленія дѣлимаго (числителя) и дѣлителя (знаменателя) на одно и то же число.

38. Дѣйствія надъ дробями. Дробь, какъ было указано выше (гл. I, § 5), имѣетъ сходство съ именованнымъ числомъ: числитель дроби соотвѣтствуетъ числу мѣръ, знаменатель — наименованію этихъ мѣръ. (Цѣлое съ дробью сходно съ составнымъ именованнымъ числомъ). Это сходство полезно имѣть въ виду при распространеніи на дроби четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій. Складывая цѣлыя числа, мы соединяемъ ихъ въ одно число, содержащее столько единицъ, сколько ихъ находится во всѣхъ слагаемыхъ. При этомъ единицы слагаемыхъ должны быть одинаковы, должны имѣть одно и то же названіе: 5 саж.+4 саж.=9 саж.; 5 пуд.+4 пуд.=9 пуд. Отвлеченныя единицы мы принимаемъ также одинаковыми между собою. Если же единицы слагаемыхъ, будучи однородными, отличаются величиною и носятъ поэтому разныя наименованія, то предварительно надо выразить слагаемыя въ одинаковыхъ единицахъ 2 пуд.+35 фун.; раздробляемъ пуды въ фунты: 80 фунт.+35 фунт.=115 фунт.; 4 фута+2 арш.; раздробляемъ футы и аршины въ дюймы: 48 дюйм.+56 дюйм.=104 дюйма.

Примѣчаніе. Сумму чиселъ 2 пуд. и 35 фун. можно представить въ видѣ составного именованнаго числа 2 пуд. 35 фун., которое считается за одно число; но мы имѣемъ здѣсь цѣлью получить сумму въ видѣ такого одного числа, единицы котораго имѣютъ только десятичную группировку (сгруппированы только по системѣ счисленія).

Дробь отличается отъ цѣлаго числа тѣмъ, что представляетъ собою совокупность не единицъ, а долей единицы:

мѣсто единицы занимаетъ доля единицы. Складывать, поэтому, можно только такія дроби, которыя состоятъ изъ одинаковыхъ долей, или имѣютъ одинаковыхъ знаменателей. Если же слагаемыя дроби состоятъ изъ долей не одинаковыхъ, то предварительно надо выразить ихъ въ одинаковыхъ доляхъ, или привести къ одному знаменателю. Сложеніе дробей имѣетъ цѣлью найти сумму ихъ, т.-е. такую дробь, которая содержитъ столько долей, сколько ихъ находится во всѣхъ слагаемыхъ. Ясно, что дѣйствіе сводится къ сложенію числителей; знаменатель, какъ наименованіе, остается безъ перемѣны: 5 восьмыхъ+2 восьмыхъ=7 восьмыхъ: $^5/_8+^2/_8=^7/_8$.

При сложеніи смѣшанныхъ чиселъ, какъ и въ случаѣ составныхъ именованныхъ чиселъ, можно складывать цѣлыя съ цѣлыми, дроби съ дробями.

Легко видѣть, что всѣ свойства сложенія цѣлыхъ чиселъ, напр. свойство перемѣстительности и сочетательности, принадлежатъ и сложенію дробей.

Подобно сложенію, можетъ быть распространено на дроби и вычитаніе.

Обратимся къ умноженію. Такъ какъ умножить число значитъ повторить его слагаемымъ нѣсколько разъ, то умноженіе цѣлыхъ чиселъ легко распространяется на тотъ случай, когда дробь надо умножить на цѣлое число. Умножить $^5/_{24}$ на 3 значитъ дробь $^5/_{24}$ повторить слагаемымъ 3 раза: $^5/_{24}\times3=^5/_{24}+^5/_{24}+^5/_{24}$; для сложенія этихъ дробей надо сложить ихъ числителей, а это приводятся къ умноженію числителя дроби на 3.

Умноженіе дроби на цѣлое число можно также вывести, исходя изъ того, что умножить дробь на цѣлое число значитъ увеличить дробь въ нѣсколько разъ, а для этого, какъ извѣстно, надо увеличить (умножить) числителя или, если можно, уменьшить (раздѣлить) знаменателя. Можно разсуждать и такъ: дробь есть частное; а для того, чтобы умножить частное на какое-нибудь число (цѣлое), можно умножить на него дѣлимое или раздѣлить дѣлителя.

Укажемъ сходство умноженія дроби съ умноженіемъ именованнаго числа. Пусть надо 2 арш. умножить на 3. Увеличиваемъ въ 3 раза число мѣръ, оставляя ихъ прежними: 2 арш.$\times$3=6 арш.; это соотвѣтствуетъ умноженію числи-

теля. Оставляемъ прежнее число мѣръ, но беремъ мѣры втрое крупнѣе — сажени вмѣсто аршинъ: 2 арш. $\times 3 = 2$ саж.; это соотвѣтствуетъ дѣленію знаменателя.

Раздѣлить одно число на другое (цѣлое) значитъ разложить дѣлимое на нѣсколько равныхъ частей или найти часть дѣлимаго. Пусть надо дробь $^6/_{25}$ раздѣлить на 3 равныя части. Мы сдѣлаемъ это, если раздѣлимъ на 3 равныя части ея числителя: $^6/_{25}$: $3 = {}^2/_{25}$; въ справедливости этого убѣдимся, когда повторимъ частное 3 раза и, получивши дѣлимое, увидимъ, что $^2/_{25}$ дѣйствительно есть третья часть дѣлимаго. Поступимъ еще иначе. Разложимъ дѣлимое на двадцать-пятыя доли единицы и раздѣлимъ на 3 равныя части каждую такую долю. Такъ какъ двадцать-пятыхъ долей въ единицѣ 25, и такъ какъ каждая изъ нихъ будетъ содержать 3 новыхъ доли, то новыхъ долей будетъ въ единицѣ въ 3 раза больше: $25 \times 3 = 75$. Итакъ, $^1/_{25}$ по дѣленіи на 3 равныхъ части дастъ $^1/_{75}$, а $^6/_{25}$ дадутъ $^6/_{75}$. Въ томъ случаѣ, когда числитель дроби не дѣлится на дѣлителя, возможенъ только этотъ послѣдній пріемъ.

Дѣленіе дроби на равныя части можно также вывести, исходя изъ того, что въ данномъ случаѣ мы отыскиваемъ часть дѣлимаго; часть же меньше дѣлимаго во столько разъ, сколько частей; слѣд. такимъ дѣленіемъ мы уменьшаемъ дробь въ нѣсколько разъ, для чего, какъ извѣстно, надо увеличить (умножить) знаменателя или, если можно, уменьшить (раздѣлить) числителя.

Можно разсуждать и такъ: дробь есть частное; а для того, чтобы раздѣлить частное на какое-нибудь цѣлое число, можно умножить на это число дѣлителя или раздѣлить дѣлимое.

Укажемъ сходство дѣленія дробей съ дѣленіемъ именованныхъ чиселъ. Пусть надо 6 саж. раздѣлить на 3 равныя части. Дѣлимъ число мѣръ, оставляя мѣры прежними; имѣемъ 6 саж.: $3 = 2$ саж.; это соотвѣтствуетъ дѣленію числителя. Пусть требуется 7 фут. раздѣлить на 12. Оставляемъ прежнимъ число мѣръ, но беремъ мѣры въ 12 разъ мельче — дюймы вмѣсто футовъ: имѣемъ 7 фут.: $12 = 7$ дюйм.; это соотвѣтствуетъ умноженію знаменателя.

Разсмотримъ дѣленіе по содержанію. Раздѣлить по содержанію одно число на другое — значитъ одно число из-

мѣрить другимъ, т.-е. узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, какую часть одного числа составляетъ другое, или сдѣлать кратное сравненіе двухъ чиселъ. Пусть требуется узнать, сколько разъ $^3/_{20}$ содержится въ $^9/_{10}$. Чтобы сдѣлать кратное сравненіе двухъ чиселъ, мы предварительно выражаемъ эти числа въ одинаковыхъ единицахъ; такъ, для сравненія 4 пуд. съ 20 фунт. мы раздробляемъ 4 пуда въ фунты. Подобнымъ образомъ поступимъ и въ настоящемъ случаѣ: выразимъ обѣ дроби въ одинаковыхъ доляхъ, для чего раздробимъ $^9/_{10}$ въ 20-ыя доли; имѣемъ $^{18}/_{20}$. Разсуждаемъ: $^3/_{20}$ содержатся въ $^{18}/_{20}$ столько разъ, сколько 3 содержится въ 18, т.-е. 6 разъ. Слѣд., дѣленіе дробей, по приведеніи ихъ къ общему знаменателю, сводится къ дѣленію числителей.

Если одно изъ данныхъ будетъ цѣлое число, то его раздробляемъ въ такія доли, въ какихъ выражено другое число.

Раздѣлимъ $^3/_5$ на $^7/_8$; приведемъ дроби къ одному знаменателю, имѣемъ: $\frac{3.8}{5.8}$ и $\frac{7\cdot5}{8.5}$; дѣлимъ числителей; получимъ $\frac{3.8}{7.5}$.

Итакъ, $^3/_5 : {}^7/_8 = \frac{3.8}{7.8}$. Отсюда — извѣстное правило дѣленія.

Въ случаѣ смѣшанныхъ чиселъ ихъ обращаютъ въ неправильныя дроби.

Намъ остается разсмотрѣть умноженіе на дробь и дѣленіе на дробь, соотвѣтствующее дѣленію на части.

Рѣшимъ вопросы: 1) Найти $^3/_5$ числа 40. Находимъ одну пятую часть 40, для чего 40 дѣлимъ на 5; получаемъ 8; беремъ 3 такихъ части, для чего 8 умножаемъ на 3; имѣемъ 24; $^3/_5$ числа $40=24$. 2) Найти $^7/_8$ числа 30. Находимъ одну восьмую часть 30; $30:8=3^3/_4$; беремъ 7 такихъ частей; $3^3/_4\times7=26^1/_4$; $^7/_8$ числа $30=26^1/_4$. 3) Найти $^3/_5$ дроби $^7/_{12}$. Отыскиваемъ одну пятую часть дроби $^7/_{12}$; $^7/_{12}:5=\frac{7}{12.5}$; беремъ 3 такихъ части: $\frac{7}{12.5}\times3=\frac{7.3}{12.5}$; $^3/_5$ дроби $^7/_{12}=\frac{7.3}{12.5}={}^7/_{20}$.

Взятіе частей числа и названо умноженіемъ этого числа на дробь. Итакъ, умножить какое-нибудь число на дробь — значитъ найти часть этого числа, выражаемую множителемъ. Напр. умножить какое-нибудь число на $^3/_4$ значитъ найти $^3/_4$ этого числа. Изъ рѣшенія приведенныхъ примѣровъ легко выводится правило умноженія на дробь.

Умножить какое-нибудь число на число смѣшанное, напр. на $5^2/_3$ — значитъ повторить множимое 5 разъ и еще взять $^2/_3$ множимаго. Можно также, обративши множителя въ неправильную дробь, взять $\frac{17}{3}$ множимаго.

Взятіе частей имѣетъ сходство съ умноженіемъ на цѣлое число: умножая какое-нибудь число, напр. на 3, мы повторяемъ множимое 3 раза слагаемымъ; умножая какое-нибудь число, напр. на $^3/_8$, мы также повторяемъ 3 раза слагаемымъ — только не цѣлое множимое, а его восьмую часть.

Кромѣ того, взятіе частей употребляется при рѣшеніи такихъ вопросовъ, которые въ случаѣ цѣлыхъ чиселъ рѣшаются умноженіемъ. Приведемъ для примѣра двѣ задачи, въ которыхъ отыскивается пройденный путь по данной скорости движенія и времени. 1) Пароходъ проходитъ въ часъ 15 верстъ. Сколько верстъ пройдетъ онъ въ 3 часа? Эта задача рѣшается умноженіемъ. 2) Пароходъ проходитъ въ часъ 15 верстъ. Сколько верстъ пройдетъ онъ въ $^2/_3$ часа? Эта задача рѣшается взятіемъ частей. Называя послѣднее умноженіемъ, мы можемъ сказать, что обѣ задачи эти, различающіяся только числовыми данными, рѣшаются умноженіемъ.

Легко видѣть, что умноженіе дробей имѣетъ всѣ свойства, принадлежащія умноженію цѣлыхъ чиселъ. Надо только помнить, что умножить не всегда значитъ увеличить, такъ какъ отъ умноженія на правильную дробь число уменьшается.

Обратимся къ дѣленію на дробь.

Рѣшимъ вопросы: 1) $^3/_5$ неизвѣстнаго числа равны 24. Найти неизвѣстное число. Находимъ $^1/_5$ искомаго, для чего дѣлимъ 24 на 3, такъ какъ въ 24 заключаются 3 такихъ части; получимъ 8; 8 повторяемъ 5 разъ, такъ какъ искомое содержитъ 5 такихъ частей; имѣемъ 40. 2) $\frac{3}{5}$ неизвѣстнаго числа равны $^7/_{20}$. Найти неизвѣстное число. Находимъ $^1/_5$ искомаго — $\frac{7}{20}:3=\frac{7}{20.3}$; беремъ 5 такихъ частей — $\frac{7}{20.3}\times 5=$ $=\frac{7.5}{20.3}=\frac{7}{12}$.

Отысканіе числа по данной его части названо дѣленіемъ на дробь. Итакъ, раздѣлить какое-нибудь число на дробь,

напр., на $^3/_4$, значитъ найти число, $^3/_4$ котораго равны данному числу (дѣлимому). Изъ рѣшенія приведенныхъ вопросовъ легко вывести извѣстное правило дѣленія на дробь. Замѣтимъ, что правило это — то же самое, какое примѣняется къ дѣленію на дробь въ смыслѣ содержанія.

Взятіе частей даннаго числа наз. умноженіемъ на дробь: взять $^3/_5$ числа 40 — значитъ 40 умножить на $^3/_5$. Вопросъ объ отысканія числа по данной его части — $^3/_5$ неизвѣстнаго числа равны 24, найти неизвѣстное — является обратнымъ вопросу о нахожденіи частей, или умноженію на дробь: здѣсь требуется отыскать множимое по данному произведенію (24) и множителю ($^3/_5$). Дѣйствіе, обратное умноженію, есть дѣленіе; поэтому отысканіе числа по данной его части и названо дѣленіемъ на дробь.

Кромѣ того, отысканіе числа по части употребляется при рѣшеніи такихъ вопросовъ, которые въ случаѣ цѣлыхъ чиселъ рѣшаются дѣленіемъ (на части). Приведемъ для примѣра двѣ задачи, въ которыхъ по стоимости товара и его вѣсу отыскивается цѣна единицы вѣса. 1) 5 пуд. сахару стоятъ 30 руб.; сколько стоитъ пудъ? Эта задача рѣшается дѣленіемъ (на части). 2) $^2/_3$ пуда сахару стоятъ 4 руб.; сколько стоитъ пудъ? Эта задача рѣшается отысканіемъ цѣлаго по данной его части. Называя послѣднее дѣйствіе дѣленіемъ, мы можемъ сказать, что обѣ эти задачи (различающіяся только числовыми данными) рѣшаются дѣленіемъ.

Дѣленіе дробей имѣетъ всѣ свойства, принадлежащія дѣленію цѣлыхъ чиселъ. Надо только помнить: отъ дѣленія на правильную дробь число увеличивается.

Содержаніе I части.

Стран.

Глава I. Предварительныя понятія. Счисленіе. Понятіе объ ариѳм. дѣйствіи . . . . . 1—15

§ 1. Происхожденіе понятій о числѣ и дѣйствіяхъ надъ числами. § 2. Величина. § 3. Счетъ. Число предметное. Число отвлеченное. § 4. Измѣреніе. Число именованное. § 5. Числа цѣлыя и дробныя. § 6. Словесное счисленіе. § 7. Письменное счисленіе. § 8. Ариѳметическія дѣйствія.

Глава II. Сложеніе . . . . . 15—20

§ 9. Опредѣленіе. § 10. Правило сложенія. § 11. Таблица сложенія. 12. Сумма нѣсколькихъ чиселъ.

Глава III. Вычитаніе . . . . . 20—26

§ 13. Опредѣленіе. § 14. Правило вычитанія. § 15. Таблица вычитанія.

Глава IV. Умноженіе . . . . . 26—32

§ 16. Опредѣленіе. § 17. Правила умноженія. § 18. Таблица умноженія. § 19. Произведеніе нѣсколькихъ чиселъ.

Глава V. Дѣленіе . . . . . 32—39

§ 20. Опредѣленіе. § 21. Правила дѣленія. § 22. Таблица дѣленія.

Глава VI. Измѣненіе результатовъ ариѳм. дѣйствій . . . . . 40—45

§ 23. Измѣненіе величины числа. § 24. Измѣненія суммы § 25. Измѣненія разности. § 26. Измѣненія произведенія. § 27. Измѣненія частнаго.

Глава VII. Частные пріемы выполненія ариѳм. дѣйствій . . . 45—50

§ 28. Сокращенные, или частные, пріемы вычисленія. § 29. Пріемъ округленія чиселъ. § 30. Умноженіе и дѣленіе на 5, 25, 125. § 31. Разложеніе множителя и дѣлителя на сомножителей. § 32. Нѣкоторые другіе сокращенные пріемы.

Стран.

Глава VIII. Задачи . . . . . **50—58**

§ 33. Ариѳм. задачи и примѣры. § 34. Простыя задачи. § 35. Сложныя задачи.

Глава IX. Дроби . . . . . **58—66**

§ 36. Происхожденіе дробей. Опредѣленіе дробей. § 37. Измѣненіе вида и величины дробей. § 38. Дѣйствія надъ дробями.

ЧАСТЬ II.

Методика ариѳметики.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Цѣль обученія ариѳметикѣ въ начальной народной школѣ. «*Обученіе ариѳметикѣ имѣетъ двоякую цѣль: практическую и общеобразовательную. Для достиженія той и другой цѣли необходимо, чтобы дѣти научились свободно вычислять, умѣли примѣнять свои знанія къ рѣшенію задачъ и сознательно усвоили основныя ариѳметическія понятія*»[1]).

Ученикъ народнаго училища *начинаетъ* въ немъ свое школьное образованіе; поэтому начальная народная школа должна быть школой общеобразовательной, такъ какъ общее образованіе должно предшествовать какому бы то ни было спеціальному, или профессіональному. Но въ народномъ училищѣ ученикъ свое школьное образованіе и *заканчиваетъ;* поэтому начальной народной школѣ не должно быть чуждо проведеніе знаній, практически полезныхъ въ жизни той среды, къ которой принадлежитъ и будетъ принадлежать ея ученикъ.

Итакъ, съ одной стороны, задача начальной народной школы состоитъ въ томъ, чтобы развивать въ своихъ питомцахъ общечеловѣческія способности, не стремясь къ одностороннему изощренію какихъ-либо спеціальныхъ умѣній

---

[1]) «Примѣрныя программы предметовъ, преподаваемыхъ въ начальныхъ народныхъ училищахъ вѣдомства Министерства Народнаго Просвѣщенія», утвержденныя 7 февраля 1897 года.

и навыковъ и отнюдь не замѣняя развивающаго обученія суммою рецептовъ изъ различныхъ отраслей прикладного знанія; даже совсѣмъ не имѣя въ виду утилитарныхъ цѣлей, общеобразовательная начальная школа все-таки достигнетъ ихъ, такъ какъ на одномъ и томъ же поприщѣ трудъ развитого человѣка, при прочихъ равныхъ условіяхъ, значительно производительнѣе, нежели трудъ люда темнаго. Но, съ другой стороны, школа, завершающая обученіе, не можетъ отказать своимъ ученикамъ въ сообщеніи практически полезныхъ знаній и умѣній, которыя могутъ пригодиться имъ въ ихъ быту; это не лишитъ начальную народную школу ея общеобразовательнаго характера, если только практическимъ цѣлямъ не придавать преувеличеннаго значенія, если достиженіе ихъ не будетъ происходить на счетъ общаго развитія учащихся, но будетъ находиться съ нимъ въ тѣсной связи, будетъ дополнять его и содѣйствовать поднятію интереса къ ученію какъ въ самихъ учащихся, такъ и со стороны населенія.

Образовательная цѣль обученія, вообще, состоитъ въ развитіи ума, чувства и воли. Для достиженія этой цѣли обученіемъ ариѳметикѣ:

1) всѣ ариѳметическія знанія и умѣнія на каждой ступени должны восприниматься и усвоиваться учащимися вполнѣ сознательно, такъ чтобы ученики въ области доступныхъ для нихъ понятій и отношеній давали бы себѣ вѣрный и ясный отчетъ: почему и для чего это такъ дѣлается?

2) мысль учащихся должна быть пріучена къ самостоятельной дѣятельности, какъ при выводѣ различныхъ правилъ, такъ и при рѣшеніи задачъ;

3) учащіеся должны пріобрѣсти довѣріе къ собственнымъ силамъ, терпѣніе и настойчивость въ преодолѣніи встрѣчающихся трудностей.

Все это ведетъ къ развитію въ ученикахъ уваженія, любви и способности умственному труду. А рядомъ съ развитіемъ способности мыслить должно итти, конечно, и развитіе способности выражать свои мысли, т.-е. развитіе рѣчи и нѣкотораго навыка въ письменномъ изложеніи мыслей.

Практическая цѣль обученія начальной ариѳметикѣ заключается въ томъ, чтобы дать учащимся такіе умѣнья и

навыки, которые непосредственно могли бы имъ пригодиться въ жизни, а именно:

1) навыкъ въ быстромъ вычисленіи, главнымъ образомъ, устномъ и выкладкахъ на торговыхъ счетахъ[1]);

2) умѣнье свободно рѣшать задачи практическаго содержанія, съ которыми постоянно приходится встрѣчаться въ обиходной жизни.

При обученіи начальной ариѳметикѣ обѣ цѣли — образовательная и практическая — могутъ быть соединены самымъ тѣснымъ образомъ и достигаемы въ одно и то же время.

2. Объемъ и характеръ курса начальной ариѳметики. Курсъ начальной ариѳметики составляютъ: нумерація и четыре дѣйствія надъ числами цѣлыми — отвлеченными и именованными, а также надъ простѣйшими дробями, наиболѣе часто встрѣчающимися въ житейскихъ расчетахъ. (Дроби проходятся безъ помощи тѣхъ ученій, которыя излагаются въ статьѣ о дѣлимости, т.-е. ученій о числахъ первоначальныхъ и составныхъ, взаимно простыхъ, признакахъ дѣлимости, наибольшемъ дѣлителѣ, наименьшемъ кратномъ.)[2])

Принимая во вниманіе возрастъ и развитіе дѣтей, поступающихъ въ начальную народную школу, время обученія въ ней, условія внѣшкольной и послѣшкольной жизни ея учениковъ; затѣмъ исходя изъ того, что развивающее обученіе достижимо лишь при условіи проработки *посильнаго* матеріала, — можно сказать, что курсъ ариѳметики, про-

---

[1]) При этомъ должно замѣтить, что выкладки на счетахъ не стоятъ особнякомъ отъ пріемовъ устнаго или письменнаго вычисленія, но могутъ прекрасно иллюстрировать эти пріемы и тѣмъ содѣйствовать пониманію ихъ сущности.

[2]) Въ видѣ дополнительныхъ свѣдѣній, даваемыхъ начальнымъ народнымъ училищемъ, министерская программа ставитъ умѣнье производить четыре дѣйствія надъ простыми и десятичными (конечными) дробями, а также вычислять площади, поверхности и объемы простѣйшихъ тѣлъ. Эти дополнительныя свѣдѣнія допускаются программою лишь для тѣхъ случаевъ, когда школа находится въ особенно благопріятныхъ условіяхъ (напр. для каждаго отдѣленія есть особый учитель или учительница), и лишь съ разрѣшенія директора народныхъ училищъ, которое дается отдѣльно для каждой школы, съ доведеніемъ о семъ до свѣдѣнія попечителя учебнаго округа.

ходимый въ начальной народной школѣ, долженъ имѣть преимущественно *практическій характеръ*, противополагая практическій характеръ теоретическому, а не общеобразовательному. Мы хотимъ сказать этимъ, что въ курсѣ начальной ариѳметики не слѣдуетъ придавать особеннаго значенія такимъ обобщеніямъ, которыя трудны для дѣтей: или потому, что послѣднія не могутъ вполнѣ сознать значеніе этихъ обобщеній, или потому, что не могутъ свободно выражать ихъ по недостаточности развитія рѣчи. Такъ, мы полагаемъ:

1) Не должно требовать отъ учениковъ начальной школы заучиванія опредѣленій дѣйствій (что наз. сложеніемъ и проч.) и другихъ ариѳметическихъ понятій (о числѣ, цифрѣ и проч.) въ той или иной *обязательной* формѣ: достаточно ограничиться тѣмъ, что ученики понимаютъ смыслъ и значеніе ариѳметическихъ дѣйствій, что̀ они выкажутъ, безошибочно выбирая надлежащее дѣйствіе для каждой данной простой задачи. Въ самомъ дѣлѣ, отъ пониманія вещей до точнаго, логическаго опредѣленія ихъ — довольно большой шагъ. Опредѣленіе должно быть даваемо лишь тогда, когда потребность въ немъ можетъ быть вполнѣ сознана; а для этого требуется сравнительно высокое развитіе ума и рѣчи. Въ противномъ случаѣ заучиваніе опредѣленій, ничего не прибавляя къ знаніямъ дѣтей, поведетъ лишь къ потерѣ времени и — мало того — можетъ вызвать въ учащихся нежелательное отношеніе къ ариѳметикѣ. Кромѣ того, точность и строгость иныхъ принятыхъ опредѣленій подлежитъ нѣкоторому сомнѣнію. Намъ кажется, что въ начальной школѣ точныя и строгія опредѣленія вполнѣ могутъ быть замѣнены *объясненіемъ* словъ: или такихъ, съ которыми дѣти доселѣ не встрѣчались, какъ напр. названіе данныхъ и искомыхъ въ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ, слово процентъ и т. п.; или такихъ, которыя хотя и употребляются въ обиходной рѣчи, но, какъ ариѳметическіе термины, имѣютъ условное значеніе, какъ напр. слово умножить, которое въ обиходной рѣчи означаетъ просто увеличить. Подобныя объясненія нѣтъ нужды облекать въ форму текстовъ, подлежащихъ обязательному заучиванію наизусть отъ слова до слова.

2) Не слѣдуетъ требовать и того, чтобы ученики формулировали правила дѣйствій въ общемъ видѣ: „чтобы сло-

жить два или нѣсколько чиселъ, надо подписать ихъ одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы были подъ единицами" и т. д. Если дѣти въ каждомъ данномъ случаѣ правильно и сознательно выполняютъ дѣйствіе и могутъ, по требованію, объяснить, почему они такъ поступаютъ, то для начальной школы этого будетъ вполнѣ достаточно. Заучиваніе правилъ въ общей формѣ (а она довольно пространна), ничего не уясняя, только отниметъ время, столь дорогое въ начальной школѣ.

3) Знаніе зависимости между данными и искомыми въ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ и свойствъ дѣйствій, а въ томъ числѣ измѣненія результатовъ, весьма важно, такъ какъ оно уясняетъ взаимную связь дѣйствій, раскрываетъ происхожденіе всѣхъ дѣйствіи изъ счета и даетъ основанія пріемамъ вычисленія. Но, думаемъ мы, въ курсѣ начальной ариѳметики не слѣдуетъ выдѣлять этихъ ученій въ особый отдѣлъ и облекать ихъ въ теоретическую форму. Общіе выводы въ родѣ такихъ: «уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному съ разностью», «если множителя увеличить на нѣсколько единицъ, то произведеніе увеличится на столько же множимыхъ» — не легко даются дѣтямъ и весьма скоро позабываются ими. Причина тому лежитъ какъ въ недостаточности развитія дѣтской рѣчи, такъ и въ непривычкѣ дѣтской мысли къ сужденіямъ въ области отвлеченныхъ понятій. Зависимость между данными и искомыми и свойства дѣйствій должны усвоиваться учениками при изученіи дѣйствій, какъ со стороны выполненія ихъ, такъ и со стороны примѣненія къ задачамъ, и притомъ не въ общей отвлеченной формѣ, но на примѣрахъ и задачахъ [1]). Здѣсь, какъ и раньше, можно ограничиться лишь пониманіемъ, не требуя заучиванія выводовъ въ общей формѣ.

---

[1]) Желая, напр., уяснить дѣтямъ зависимость между слагаемыми и суммою, ведущую къ одному изъ способовъ повѣрки сложенія, можно дать ученикамъ задачу въ родѣ такой. У помѣщика была земля въ трехъ уѣздахъ: въ одномъ 568 дес., въ другомъ 386 дес. и въ третьемъ 275 дес. Сколько было у него всей земли? Потомъ землю въ первомъ уѣздѣ онъ продалъ. Какъ узнать, сколько земли у него осталось? Два рѣшенія: 1) изъ общаго числа десятинъ вычесть число десятинъ въ первомъ уѣздѣ (проданныхъ); 2) сложить число десятинъ во второмъ и третьемъ уѣздахъ, такъ какъ въ нихъ только осталась земля у помѣщика.

Всѣ общіе и отвлеченные выводы могли бы быть сдѣланы учениками при помощи учителя и заучены по возможно краткому учебнику по окончаніи всего начальнаго курса ариѳметики, въ послѣдній годъ обученія, служа повтореніемъ и систематическимъ обзоромъ пройденнаго. Но въ большинствѣ случаевъ время и общее развитіе учащихся едва ли позволятъ сдѣлать это сколько-нибудь успѣшно, безъ риска живое обученіе замѣнить мертвымъ формализмомъ.

Практическій характеръ курса начальной ариѳметики заключается въ томъ, что въ начальной школѣ ариѳметика должна усвоиваться учениками главнымъ образомъ при помощи задачъ, преимущественно общежитейскаго, практическаго содержанія, вполнѣ доступнаго пониманію дѣтей. Такимъ образомъ, въ начальной ариѳметикѣ задачи являются и цѣлью (научить дѣтей рѣшать задачи), и средствомъ (выяснять и выводить при помощи задачъ ариѳм. понятія и пріемы вычисленія). Практическій характеръ придаетъ курсу начальной ариѳметики и забота о развитіи въ дѣтяхъ навыка въ быстромъ вычисленіи, преимущественно устномъ, и выкладкахъ на торговыхъ счетахъ.

Расположеніе учебнаго матеріала и характеръ упражненій, вообще построеніе курса начальной ариѳметики, вмѣстѣ съ формой обученія, обусловливается тѣмъ требованіемъ, чтобы ариѳметическія знанія и умѣнія на каждой ступени обученія воспринимались и усвоивались дѣтьми вполнѣ сознательно, при возможно самостоятельной работѣ дѣтской мысли, имѣя въ виду, что приступающія къ изученію ариѳметики восьмилѣтнія дѣти приходятъ въ школу, не умѣя ни читать, ни писать, съ запасомъ лишь тѣхъ свѣдѣній, которыя они вынесли изъ собственнаго наблюденія и опыта. Чтобы выяснить построеніе курса, согласное съ изложеннымъ требованіемъ, посмотримъ, какъ поставлено было у насъ преподаваніе ариѳметики въ то время, когда еще не было вопроса о необходимости какихъ-либо особыхъ пріемовъ для обученія *начальной* ариѳметикѣ; укажемъ, въ какой формѣ первоначально появился и распространился у насъ методъ обученія начальной ариѳметикѣ, и какимъ измѣненіямъ онъ педвергся; разсмотримъ затѣмъ тѣ начала, на которыхъ должно быть основано построеніе элементарнаго курса ариѳметики.

3. Отсутствіе методовъ обученія начальной ариѳметикѣ. Лѣтъ сорокъ тому назадъ у насъ не было руководствъ по обученію начальной ариѳметикѣ. Начинающимъ дѣтямъ ариѳметика преподавалась такъ, какъ она излагается въ систематическихъ курсахъ этого предмета: сначала полностію проходили нумерацію, потомъ одно за другимъ четыре дѣйствія. При этомъ задачи на всѣ дѣйствія, требующія не только умѣнья вычислять, но и умѣнья устанавливать послѣдовательный рядъ дѣйствій, — задачи эти отодвигаются такъ далеко, что за недостаткомъ времени, остающагося послѣ прохожденія отдѣльныхъ дѣйствій, становятся на второй планъ, уступая первое мѣсто такимъ упражненіямъ, которыя развиваютъ преимущественно навыкъ въ механизмѣ вычисленія (задачи и примѣры на отдѣльныя указанныя, назначенныя, дѣйствія). Приведенное расположеніе курса было тѣсно связано съ догматической формой обученія, при которой учитель даетъ ученикамъ готовыя опредѣленія и правила, а дѣти заучиваютъ ихъ наизусть.

Вотъ какую картину обученія ариѳметикѣ находимъ мы въ воспоминаніяхъ одного изъ педагоговъ того времени (*Е. Стрѣльцовъ*. Изъ 25-лѣтней практики сельскаго учителя. Воспоминанія, очерки и замѣтки. Часть первая. Сельская школа 1849—1864).

«Сначала я учу считать до ста и болѣе, — говоритъ выводимый авторомъ воспоминаній учитель въ бесѣдѣ съ лицомъ, обозрѣвающимъ школы. Посажу всѣхъ учениковъ и самъ громко считаю: разъ, два, три, четыре и такъ далѣе, а дѣти повторяютъ хоромъ. Такъ они и научатся считать до ста; а тамъ ужъ — то же самое пойдетъ далѣе: сто одинъ, сто два. — И дѣти всѣ научатся такимъ образомъ считать? — Ну, есть всякіе; иному ни за что не научиться считать дальше десяти: какъ дошелъ до 11-ти, такъ и стой, собьется. Потомъ пишутъ до ста: я прописываю на доскѣ; а когда научатся писать вразбивку до 100, то начинаю учить нумерацію. Поставлю учениковъ въ кружокъ къ доскѣ, напишу имъ число съ милліономъ и, показывая на первую цифру, говорю: единицы, десятки (на нихъ и показываю), сотни, тысячи, десятки тысячъ, сотни тысячъ, милліоны. Такъ показываю и твержу, а дѣти повторяютъ за мною хоромъ до тѣхъ поръ, пока будутъ знать и подъ рядъ, и вразбивку. Потомъ заставляю ихъ выговаривать числа съ милліонами (больше милліоновъ рѣдко употребляю), а потомъ учу писать такія же числа подъ диктовку. — И понимаютъ? — Сначала, конечно, трудно; особенно нулей ставить долго не научаются; но послѣ поймутъ хорошо. Потомъ — сложеніе. Сперва разскажу, какъ подписывать числа: единицы подъ

единицы, десятки подъ десятки и т. д. Потомъ покажу, съ чего начинать сложеніе, что̀ писать, что̀ въ умѣ — и все тутъ. Конечно, есть другіе, что или сложить не умѣетъ, сколько 7 да 9, 8 да 6 и проч., или въ умѣ оставляетъ; но такихъ немного, потому что я даю учить наизусть таблицу сложенія небольшихъ чиселъ. Потомъ вычитаніе — то же самое; только тутъ занимать учу, когда нельзя вычесть. Вычитаніе понимаютъ скоро. Умноженіе труднѣе; тутъ таблицы иному и въ зиму не выучить. А кто выучитъ таблицу, тотъ скоро начнетъ дѣлать; да и просто: умножай по таблицѣ, а подписывай, какъ въ сложеніи. Только тутъ многіе все сбиваются: помножитъ на вторую цифру, а пишетъ подъ первою; помножаетъ на третью, а писать и не знаетъ куда; но и то скоро привыкаютъ писать лѣсенкой. А тамъ — дѣленіе. Дѣленіе сперва на одну цифру, потомъ на двѣ. Дѣленіе — всего труднѣе; задаваться рѣдко кто можетъ сразу вѣрно».

Видя, какъ въ школѣ этого учителя дѣти рѣшаютъ задачи, можно было убѣдиться, что «ученики буквально *дѣлаютъ* задачи, не понимая того, что они дѣлаютъ, какъ и для чего все это дѣлается. Задачи ихъ состояли изъ чисто отвлеченныхъ чиселъ, обрабатываемыхъ по заранѣе опредѣленному плану: 33125 раздѣлить на 7! командуетъ старшій ученикъ, и отдѣленіе его дружно скрипитъ грифелями... Пробовали дать имъ нѣсколько изустныхъ задачъ изъ крестьянскаго быта, и нѣкоторые ребята считали вѣрно, но *по-своему*. Продалъ мужикъ возъ сѣна — 25 пудовъ по 27 коп. за пудъ; сколько ему приходится получить денегъ? — По гривеннику — два съ полтиной; по другому — опять два съ полтиной, да по четвертаку — 1 р. 25 к.; всего будетъ 6 р. 25 к.; да по копейкѣ — 25 коп.; по другой — еще 25 коп... Позабылъ сосчитанное и запутался. — Почему — по гривеннику, такъ будетъ два съ полтиной? — Такъ ужъ приходится. — Да почему приходится? Можетъ, и не такъ? — Нѣтъ, ужъ такъ; по гривеннику — всегда такъ. — Кто жъ тебѣ это сказалъ? — Отецъ всегда такъ на счетахъ считаетъ».

«Но скажите — спрашиваютъ учителя — какая польза дѣтямъ отъ того, что они привыкаютъ дѣлать всѣ эти задачи? (т.-е. задачи съ отвлеченными числами на опредѣленныя, назначенныя, дѣйствія). — Будутъ знать, какъ дѣлается. Конечно, у нихъ дома все на счетахъ или на память считаютъ, — это скорѣе; но такъ гораздо вѣрнѣе. — Какъ же вѣрнѣе, когда вы говорите, что часто ошибаются въ нуляхъ или подписываютъ десятки подъ единицы? И гдѣ же крестьянину придется считать большія числа съ милліонами? Да, наконецъ, ваши задачи нельзя дѣлать безъ бумаги и карандаша; неужели же крестьянину всегда носить ихъ съ собою? А главное — вотъ что: если вашему ученику придется сосчитать, сколько, напр., въ тысячѣ сороковъ, то кто же ему скажетъ: помножить надо или раздѣлить? — Конечно, *тутъ нуженъ свой умъ*, и я тоже заставляю дѣлать задачи на память; но вѣдь вы знаете — крестьянскія дѣти; они понимаютъ плохо; а если показано правило, какъ написать и дѣлать, то гораздо легче поймутъ. — Но вѣдь правило они могутъ позабыть, и тогда

что же? — Правила я диктую и заставляю учить наизусть; конечно, и тутъ забываютъ другіе. — Но пользоваться правиломъ, приложить его къ дѣлу, можетъ только тотъ, у кого, какъ вы сказали, есть *свой умъ*. Откуда же послѣ возьмется у ребенка этотъ свой умъ, если въ школѣ не позаботятся развить его? — Вырастутъ, станутъ умнѣе. Жизнь сама учитъ человѣка».

Приведенный разсказъ показываетъ, какъ поставлено было въ то время обученіе ариѳметикѣ, и какъ иные педагоги смотрѣли на образовательныя задачи начальной школы.

Такое расположеніе учебнаго матеріала и форма обученія не соотвѣтствуютъ естественному процессу пріобрѣтенія познаній, не удовлетворяютъ условіямъ сознательности и самодѣятельности. Понятія о числѣ и дѣйствіяхъ надъ числами берутъ свое начало въ наблюденіи и опытѣ надъ предметами и явленіями окружающаго міра, который для образованія этихъ понятій даетъ матеріалъ въ видѣ практическихъ вопросовъ-задачъ. Весьма сомнительно, чтобы тогдашнимъ преподаваніемъ ариѳметики сколько-нибудь достигалась образовательная цѣль обученія. Все, что могли выносить изъ школы ея ученики, — это механизмъ вычисленія. Конечно, при благопріятныхъ условіяхъ дальнѣйшаго образованія или самообразованія нѣкоторые изъ бывшихъ учениковъ школы доходили до яснаго пониманія ученій ариѳметики; школа же была тутъ почти ни при чемъ.

4. Методъ изученія чиселъ. Въ семидесятыхъ годахъ появляются у насъ руководства по обученію начальной ариѳметикѣ, которыя ставили себѣ задачею построеніе курса этого предмета сообразно съ пониманіемъ, развитіемъ и ростомъ умственныхъ силъ учащихся. Методы эти, заимствованные изъ Германіи, болѣе или менѣе видоизмѣнялись нашими педагогами при пересадкѣ на русскую почву. Наиболѣе широкимъ распространеніемъ пользовался методъ нѣмецкаго педагога Грубе въ той обработкѣ, какая у насъ сдѣлана Евтушевскимъ. Этотъ методъ состоитъ въ изученіи каждаго изъ чиселъ первой сотни. Изученіе числа заключается въ томъ, что число разлагается на каждое изъ предшествующихъ ему чиселъ; эти разложенія, дающія составъ числа изъ чиселъ меньшихъ, закрѣпляются въ памяти учащихся соотвѣтственными упражненіями и прилагаются къ рѣшенію практическихъ вопросовъ-задачъ. Приведемъ примѣръ изученія чиселъ по Евтушевскому.

Четыре. (Упражненіе на кубикахъ.)

1) **Образованіе числа.**

На верхней планкѣ доски учитель ставитъ три кубика вмѣстѣ.

Сколько здѣсь кубиковъ? (Потомъ приставляетъ четвертый кубикъ.) А теперь сколько?

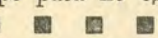
Какъ же составляются четыре кубика изъ трехъ и одного? Нужно къ тремъ кубикамъ прибавить, приставить одинъ кубикъ.

2) **Разложеніе на слагаемыя.**

Какъ можно составить четыре кубика? или: Какъ четыре кубика можно разложить?

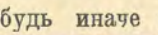
Четыре кубика можно разложить на два и на два.

Четыре кубика можно составить изъ одного, одного, одного еще одного, или взять четыре раза по одному кубику.



Четыре кубика можно разложить на три и одинъ.

Можно составить изъ одного, одного и двухъ.



Можно ли еще какъ-нибудь иначе разложить четыре кубика? Ученики убѣждаются, что никакого другого отличнаго отъ этихъ разложенія быть не можетъ. Если ученики станутъ еще разлагать четыре кубика такимъ образомъ: одинъ, два и одинъ, или два, одинъ и одинъ, или одинъ и три, то учителю легко имъ показать, что эти разложенія составляютъ повтореніе уже имѣющихся разложеній, только въ другомъ порядкѣ.

Всякій разъ, по указанія новаго пріема разложенія, предложеннаго учениками, учитель на одной изъ планокъ доски выставляетъ кубики въ томъ видѣ, какъ они изображены здѣсь. Такимъ образомъ, въ нашемъ случаѣ на верхней планкѣ будутъ стоять четыре кубика вмѣстѣ, на второй два и два, на третьей четыре кубика раздѣльно на нѣкоторомъ разстояніи одинъ отъ другого, на четвертой три и одинъ и на пятой одинъ, одинъ и два.

3) **Разложеніе въ порядкѣ.**

Весьма можетъ случиться, что дѣти сразу укажутъ разложеніе числа на слагаемыя въ порядкѣ. Для установленія порядка въ разложеніи предлагаются классу такіе вопросы:

Вотъ вы составили четыре кубика изъ двоекъ, изъ отдѣльныхъ кубиковъ и изъ троекъ; въ какомъ порядкѣ лучше поставить наши кубики на доскѣ? Съ чего начать разложеніе четырехъ кубиковъ? Съ разложенія на отдѣльные кубики,

Какъ составить четыре кубика изъ отдѣльныхъ кубиковъ? Надо взять четыре раза по одному.

Какъ составить четыре кубика изъ двоекъ, изъ паръ?

Нужно взять двѣ двойки; два раза по два кубика; двѣ пары кубиковъ.

Какъ потомъ составить четыре кубика? Можно составить изъ троекъ; для этого взять три и одинъ, или одинъ и три.

Выясняется ученикамъ, что послѣднее разложеніе, т.-е. 1+1+2, не подходитъ подъ принятый порядокъ и есть видоизмѣненіе одного изъ первыхъ трехъ.

Такимъ образомъ путемъ самаго разложенія числа на слагаемыя ученики сравниваютъ его съ 1, съ 2 и съ 3. Учитель во время разговора съ учениками располагаетъ постепенно на классной доскѣ эти разложенія уже въ порядкѣ, т.-е.:

На первой планкѣ ■ ■ ■ ■
На второй » ■ ■ ■ ■
На третьей » ■ ■ ■ ■
На четвертой » ■ ■ ■ ■

Такъ какъ это упражненіе есть основное и самое важное при изученіи числа, то для закрѣпленія въ памяти учениковъ сдѣланныхъ разложеній имъ предлагаются упражненія письменныя на доскахъ или въ тетрадяхъ. Письменная работа учениковъ состоитъ въ разложеніи того же числа посредствомъ черточекъ, крестиковъ, кружковъ и проч. Кубики снимаются съ классной доски, и по требованію учителя: «возьмите ваши доски и разложите *четыре* посредствомъ крестиковъ такъ, какъ мы разложили на классной доскѣ четыре кубика», дѣти на память разлагаютъ четыре такимъ образомъ:

× × × ×
× × × ×
× × × ×
× × × ×

Въ случаѣ ошибки, или безпорядка въ разложеніи, или наконецъ упущенія одного изъ разложеній, учитель поправляетъ учениковъ, провѣряя ихъ работу.

Затѣмъ одинъ ученикъ, по требованію учителя, читаетъ всѣ разложенія примѣрно такъ: четыре состоитъ изъ одного, еще одного, еще одного и еще одного; четыре состоитъ изъ двухъ и двухъ; четыре состоитъ изъ трехъ и одного.

4) Выводы изъ предыдущаго упражненія.

На сложеніе и вычитаніе. Сколько надо прибавить къ одному, чтобы получить четыре? Сколько къ двумъ, тремъ? Сколько будетъ два да два? Одинъ да три? Три да одинъ?

Сколько разъ отъ четырехъ можно отнять по одному? Сколько разъ по два, по три?

Сколько останется, если отъ четырехъ отнять одинъ, два, три?

Сколько единицъ недостаетъ одному, двумъ, тремъ до четырехъ?

Чѣмъ четыре больше одного, двухъ, трехъ?

Сколько останется, если отъ четырехъ отнять четыре раза по одному, два раза по два?

На умноженіе и дѣленіе. Сколько разъ нужно взять по одному, по два, чтобы получить четыре? Сколько разъ нужно повторить два, чтобы составить четыре? Сколько будетъ дважды два? Четырежды одинъ?

Сколько разъ одинъ, два, четыре содержится въ четырехъ?

Во сколько разъ четыре больше одного, двухъ?

Какъ велика четвертая часть четырехъ, половина четырехъ?

Сколько получится, если взять въ два раза, въ четыре раза меньше четырехъ?

Такимъ образомъ всѣ отношенія числа четыре къ предшествовавшимъ числамъ вытекаютъ сами собою изъ разложенія числа на слагаемыя и слѣдовательно изъ знакомства черезъ то учениковъ съ составомъ числа. Въ случаѣ затрудненія ученика въ отвѣтѣ на предложенный вопросъ, учитель пользуется кубиками для нагляднаго представленія ученику того, что его затруднило.

5) **Задачи.**

Задачи при изученіи чиселъ служатъ для приложенія узнаннаго учениками изъ предыдущихъ упражненій къ рѣшенію чисто практическихъ вопросовъ. Кромѣ того рѣшеніемъ задачъ имѣется въ виду развитіе въ учащихся соображенія и выработка языка.

6) **Бѣглое вычисленіе и вопросы, относящіеся къ числу отвлеченному.**

а) Вычисленіе въ формѣ задачъ. Имѣя четыре яблока, я далъ двумъ мальчикамъ по одному яблоку, потомъ купилъ еще одно яблоко и съѣлъ самъ два. Сколько яблокъ у меня осталось?

Ученики вычисляютъ по мѣрѣ того, какъ учитель медленно читаетъ задачу, и по окончаніи вопроса задачи тотчасъ даютъ отвѣтъ.

б) Вычисленіе въ отвлеченномъ видѣ. Отъ четырехъ отнимаю три, потомъ прибавляю къ остатку два, отъ полученнаго числа отнимаю одинъ, къ полученному числу прибавляю еще два и все полученное дѣлю пополамъ. Сколько получилось у меня въ каждой половинѣ?

Опять-таки отвѣтъ учениковъ долженъ явиться тотчасъ по предложеніи вопроса учителемъ. Вѣрность и быстрота отвѣта учениковъ покажутъ въ этомъ случаѣ учителю, насколько они овладѣли числомъ.

в) Вопросы для повторенія. Сколько будетъ четыре раза одинъ? Одиножды четыре? Два раза два? Если взять трижды одинъ, то чего недостаетъ до четырехъ? Два сколько разъ содержится въ четырехъ? Половина четырехъ чѣмъ меньше трехъ? Сколько будетъ четыре безъ трехъ, безъ двухъ? Если отъ четырехъ отнять два, то полученное число во сколько разъ больше единицы? и т. п.»

Подобнымъ образомъ ведется у Евтушевскаго изученіе и другихъ чиселъ. Наглядными пособіями, кромѣ кубиковъ, служатъ: классные счеты, пуговки, жетоны, спички, камешки; письменные значки: крестики, кружки. Разложеніе дѣлается и безъ наглядныхъ пособій на основаніи знанія разложеній предшествующихъ: зная, напр., что восемь состоитъ изъ двухъ троекъ и двойки, и что девять получается изъ восьми прибавленіемъ единицы, мы можемъ вывести, что девять состоитъ изъ трехъ троекъ.

По ознакомленіи съ цифрами и знаками (Евтушевскій дѣлаетъ это послѣ изученія чиселъ перваго десятка) выполненныя разложенія чиселъ записываются въ видѣ табличекъ. Напр. при изученіи числа двѣнадцать ученики составляютъ такую таблицу.

«12=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1.
12=2+2+2+2+2+2.
12=3+3+3+3.
12=4+4+4.
12=5+5+2.
12=6+6.
12=7+5.
12=8+4.
12=9+3.
12=10+2.
12=11+1.

Первые шесть рядовъ записываются въ сокращенномъ видѣ:

12=1×12.
12=2×6.
12=3×4.
12=4×3.
12=5×2+2.
12=6×2

Изъ сравненія второй строчки этой послѣдней таблицы съ шестою и третьей съ четвертою ученики убѣждаются, что изъ разложеній 12=2×6 или 12=3×4 сами собой вытекаютъ совершенно однозначащія съ ними разложенія 12=6×2 и 12=4×3. Обращая вниманіе на эту особенность состава чиселъ и при другихъ числахъ, ученики впослѣдствіи выведутъ теорему, что отъ перестановки множителей произведеніе не измѣняетъ своей величины.

На основаніи сокращеннаго записыванія состава изучаемаго числа изъ другихъ ученики выводятъ кратныя отношенія этого числа къ другимъ. Такъ изъ того, что 10=5×2, ученики выводятъ, что 10 : 2=5 и т. д.».

Грубе и нѣкоторые изъ русскихъ послѣдователей его метода ведутъ сравненіе каждаго числа съ предыдущими нѣсколько иначе, но сущность метода (изученіе чиселъ) остается та же.

Послѣ изученія чиселъ[1]) ученики знакомятся съ дѣйствіями и пріемами ихъ выполненія; ариѳметика вступаетъ на обычный путь.

Методъ Грубе, называемый методомъ изученія чиселъ, исходитъ изъ того принимаемаго имъ положенія, что числа до 100 доступны *непосредственному созерцанію*, или *осязательному пониманію*, позволяющему путемъ надлежащихъ упражненій (мы видѣли, какихъ) достигнуть того, что дѣти будутъ твердо знать и *ясно представлять* себѣ составъ каждаго числа первой сотни изъ предшествующихъ чиселъ, такъ что, *не зная пріемовъ вычисленія*, будутъ, однако, въ состояніи вычислять въ этомъ предѣлѣ[2]).

5. Методъ изученія дѣйствій. Методъ изученія чиселъ, вызвавшій противъ себя отдѣльныя нападки уже вскорѣ послѣ своего появленія, безраздѣльно господствовалъ въ нашей школѣ около десяти лѣтъ, въ тѣхъ или другихъ видоизмѣненіяхъ. Въ восьмидесятыхъ годахъ является новое направленіе въ обученіи начальной ариѳметикѣ, отвергающее изученіе чиселъ и начинающее съ дѣйствій и пріемовъ вычисленія, сначала, конечно, въ формѣ простого счета. «Непосредственное созерцаніе» чиселъ признано психологически невозможнымъ. А если такъ, то изученіе чиселъ не достигаетъ той цѣли, которую ставятъ его сторонники. Если разложить каждое число первой сотни на всѣ ему предшествующія числа, то этихъ разложеній будетъ такъ много, что одна память (безъ помощи особаго «непосредственнаго созерцанія», или «осязательнаго пониманія») безсильна усвоить ихъ; а потому вся продолжительная работа по изученію чиселъ пропадаетъ почти даромъ въ смыслѣ подготовки къ пріемамъ вычисленія. Если же, какъ это дѣлалось на практикѣ, при изученіи чиселъ указывать

---

[1]) Грубе занимается изученіемъ чиселъ не только отъ 1 до 100, но — хотя менѣе подробно — и отъ 100 до 1000. Евтушевскій разсматриваетъ подробно каждое изъ чиселъ первыхъ двухъ десятковъ; отъ 20 до 100 изучаются преимущественно такія числа, которыя имѣютъ много дѣлителей, какъ 36, 48 и т. п.

[2]) Пусть надо рѣшить задачу: куплено нѣсколько фунтовъ свѣчей по 23 коп. за фунтъ, и съ рубля, отданнаго въ уплату, получено 8 коп. сдачи; сколько фунтовъ свѣчей куплено? Для рѣшенія этого вопроса дѣти должны только представить себѣ (живо припомнить) составъ числа 100 по отношенію къ числу 23, т.-е. $100 = 23 \times 4 + 8$.

и пріемы вычисленія[1]), то изученіе чиселъ можно разсматривать только какъ своеобразный видъ упражненій въ примѣненіи этихъ пріемовъ. Но упражненія въ разложеніи чиселъ, представляя собою работу весьма однообразную и утомительную, не имѣютъ прямого отношенія къ ариѳметикѣ и, не заключая въ себѣ никакой способной къ развитію идеи, не могутъ быть оправданы и цѣлями общеобразовательными.

Новый методъ обученія ариѳметикѣ, названный методомъ изученія дѣйствій и являющійся какъ бы поворотомъ къ старинѣ, создался подъ сильнымъ вліяніемъ своего предшественника, метода изученія чиселъ, у котораго онъ заимствовалъ весьма многое и важное, а именно: 1) образованіе ариѳметики первой сотни съ выдѣленіемъ перваго десятка и иногда второго десятка; это ведетъ къ совмѣстному разсмотрѣнію дѣйствій и концентрическому расположенію учебнаго матеріала; 2) введеніе въ ариѳметику практическихъ задачъ; 3) наглядность обученія; 4) устныя вычисленія на ряду съ письменными; 5) вопросо-отвѣтную (катихизическую) форму обученія, открывающую ученикамъ обширное поле самодѣятельности.

Разсмотримъ это подробнѣе.

6. Совмѣстное изученіе дѣйствій и концентрическое расположеніе матеріала. Разумное обученіе должно исходить и опираться на тѣ познанія, которыя ученики приносятъ съ собою въ школу; это — умѣнье считать до нѣкотораго предѣла (иногда до десяти, иногда больше и меньше) и рѣшать простенькіе вопросы съ небольшими числами: съ такими вопросами дѣти, конечно, встрѣчались въ своихъ наблюденіяхъ и опытахъ. При этомъ должно замѣтить, что дѣтямъ чужда область отвлеченныхъ понятій, имъ доступно число конкретное, какъ группа предметовъ.

Это требованіе ведетъ 1) къ тому, что въ началѣ обученія не должно выводить дѣтей изъ области небольшихъ чиселъ, и 2) къ тому, что слѣдуетъ научить дѣтей выполнять надъ этими небольшими числами всѣ ариѳметическія дѣйствія, не задерживая искусственно учениковъ только на

---

[1]) Евтушевскій напр. сообщаетъ такіе пріемы при изученіи чиселъ отъ 20 до 100 и даже отъ 10 до 20.

тѣхъ вопросахъ, которые требуютъ лишь нѣкоторыхъ изъ этихъ дѣйствій. Такимъ образомъ, прежде всего надо научить дѣтей правильно называть и писать небольшія числа, производить надъ этими числами всѣ ариѳм. дѣйствія и примѣнять эти дѣйствія къ рѣшенію задачъ. Это — маленькая ариѳметика, лежащая въ основаніи остального курса. Затѣмъ надлежитъ пополнить и расширить пройденное, познакомивъ дѣтей съ такими понятіями и пріемами вычисленія, которые не могли быть указаны раньше, потому что выводу ихъ должно предшествовать усвоеніе перваго отдѣла, т.-е. надо пройти нумерацію и четыре дѣйствія надъ числами бо́льшими, чѣмъ то было ранѣе. Этотъ второй отдѣлъ, въ свою очередь, будетъ служить основаніемъ для отдѣла слѣдующаго, въ которомъ предѣлы чиселъ расширены еще болѣе и т. д. Такимъ образомъ, курсъ начальной ариѳметики распадается на отдѣлы, сходные между собою по содержанію (въ каждомъ изъ нихъ изучается нумерація и четыре дѣйствія) и различающіеся объемомъ, а вслѣдствіе того и полнотою развитія ариѳметическихъ понятій и пріемовъ вычисленія. Каждый слѣдующій отдѣлъ заключаетъ въ себѣ предыдущій и расширяетъ его. Всѣ эти отдѣлы могутъ быть уподоблены кругамъ, описаннымъ изъ общаго центра различными радіусами, и приведенное расположеніе учебнаго матеріала называется концентрическимъ. Достоинство концентрическаго расположенія учебнаго матеріала заключается и въ томъ, что оно ведетъ къ болѣе прочному усвоенію знаній, такъ какъ при изученіи каждаго новаго отдѣла самъ собою повторяется и отдѣлъ предыдущій, чѣмъ — между прочимъ — устраняется необходимость отводить особое время на повтореніе пройденнаго; кромѣ того, ученикъ оставившій школу до окончанія полнаго курса (теперь у насъ это явленіе обычное), все-таки можетъ вынести законченный кругъ свѣдѣній по ариѳметикѣ.

Число и объемъ этихъ концентрическихъ отдѣловъ могутъ быть опредѣлены самой сущностью начальной ариѳметики (изученіе нумераціи и четырехъ дѣйствій).

Въ основѣ нумераціи лежитъ понятіе о сложныхъ счетныхъ единицахъ и о мѣстномъ значеніи цифръ (часть I, глава I, §§ 6 и 7). Пріемы вычисленія основаны на свой-

ствахъ дѣйствій, позволяющихъ дѣйствія надъ числами любой величины свести къ дѣйствіямъ надъ ихъ десятичными группами, а выполненіе дѣйствій надъ десятичными группами требуетъ знанія таблицъ дѣйствій, берущихъ свое начало въ счетѣ (часть I, глава II, §§ 10 и 11; глава III, §§ 14 и 15; глава IV, §§ 17 и 18; глава V, §§ 21 и 22).

Въ основаніи нумераціи лежитъ счетъ до десяти: для того чтобы умѣть называть и писать числа любой величины, надо прежде всего научиться называть и писать числа до десяти. Такимъ образомъ, первымъ отдѣломъ начальнаго курса ариѳметики долженъ быть первый десятокъ.

Для усвоенія понятія о сложной счетной единицѣ слѣдуетъ остановиться нѣкоторое время на вычисленіяхъ съ круглыми десятками до ста. Это будетъ вторымъ отдѣломъ курса.

Такъ какъ изученію дѣйствій надъ числами любой величины должно предшествовать составленіе и усвоеніе таблицъ дѣйствій; такъ какъ таблицы дѣйствій, вообще, заключены въ предѣлѣ ста (наибольшій результатъ таблицы умноженія $9 \times 9 = 81$), — то становится понятнымъ выдѣленіе ариѳметики первой сотни. Такъ какъ, въ частности, таблицы сложенія и вычитанія содержатся въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ (наибольшій результатъ таблицы сложенія $9 + 9 = 18$), то въ области первой сотни можетъ быть сдѣлано подраздѣленіе: можетъ быть выдѣлено изученіе дѣйствій въ предѣлѣ двухъ первыхъ десятковъ.

Нумерація до тысячи лежитъ въ основаніи нумераціи чиселъ любой величины (часть I, глава I, § 6). Вслѣдствіе этого весьма полезно выдѣлить первую тысячу въ особый отдѣлъ. Разъ нумерація и дѣйствія надъ числами до тысячи усвоены вполнѣ прочно, нумерація и дѣйствія надъ числами любой величины даются дѣтямъ весьма легко. Къ выдѣленію первой тысячи побуждаетъ и то практическое соображеніе, что кончающему курсъ начальной школы рѣдко придется имѣть дѣло съ числами выше тысячи; въ виду этого является весьма желательнымъ, чтобы ученики начальной школы вполнѣ свободно, даже мастерски, дѣлали расчеты въ предѣлѣ тысячи, не затрачивая особенно много времени на вычисленія съ очень большими числами.

Отдѣлъ о составныхъ именованныхъ числахъ можетъ быть поставленъ въ концѣ курса, служа примѣненіемъ усвоенныхъ пріемовъ вычисленія и пріобрѣтеннаго навыка въ рѣшеніи задачъ къ преобразованіямъ, дѣйствіямъ и задачамъ съ составными именованными числами.

Итакъ, требованіе совмѣстнаго изученія дѣйствій и концентрическаго расположенія матеріала, затѣмъ условія, необходимыя для болѣе основательнаго изученія нумераціи и пріемовъ вычисленія, — приводятъ къ такому порядку изученія ариѳметики цѣлыхъ чиселъ: а) первый десятокъ, б) круглые десятки до ста, в) первые два десятка, г) первая сотня, д) первая тысяча, е) числа любой величины, ж) составныя именованныя числа.

Посмотримъ, чѣмъ характеризуется каждый изъ этихъ отдѣловъ, и что должно быть достигнуто изученіемъ каждаго изъ нихъ.

а) Первый десятокъ. По отношенію къ нумераціи, отдѣлъ этотъ характеризуется отсутствіемъ понятія о сложной единицѣ и о мѣстномъ значеніи цифръ: каждое число перваго десятка, представляя собой только группу простыхъ единицъ (точно такъ же разсматривается здѣсь и десятокъ), имѣетъ особое названіе (не составленное изъ названій другихъ чиселъ) и изображается особымъ знакомъ (обозначеніе 10 указывается здѣсь безъ всякихъ поясненій о мѣстномъ значеніи цифръ и нуля). По отношенію къ дѣйствіямъ, особенность этого отдѣла та, что всѣ дѣйствія выполняются тутъ не по правиламъ (при которыхъ числа разлагаются на десятичныя группы), но сначала (сложеніе и вычитаніе) путемъ счета, а затѣмъ на основаніи уже усвоенныхъ памятью результатовъ. Результаты всѣхъ дѣйствій надъ каждыми двумя числами должны сдѣлаться достояніемъ памяти. Проходя этотъ отдѣлъ, дѣти научаются правильно называть и писать числа перваго десятка; усвоиваютъ счетъ до десяти, на который должны смотрѣть какъ на пріемъ, или средство, выполнять дѣйствія, выражаемыя словами «прибавить» и «отнять»; затѣмъ знакомятся съ понятіями «повторить», «раздѣлить», «сколько разъ содержится» и съ пріемами выполненія этихъ дѣйствій въ предѣлѣ десяти; научаются обозначать дѣйствія знаками и примѣнять ихъ къ рѣшенію вопросовъ, требующихъ одного и нѣсколь-

кихъ дѣйствій. Здѣсь же можно познакомить учениковъ и съ понятіями «увеличить и уменьшить на сколько-нибудь и во сколько-нибудь разъ», «на сколько и во сколько разъ больше или меньше», — понятіями, которыя расширяютъ кругъ примѣненія ариѳм. дѣйствій. Однако, это послѣднее можетъ быть отнесено и дальше, напр. въ третій отдѣлъ, если учитель не найдетъ нужнымъ задерживать долго дѣтей на вычисленіяхъ въ предѣлѣ перваго десятка.

б) Круглые десятки до ста. Этотъ отдѣлъ, служа повтореніемъ предыдущаго, долженъ главнымъ образомъ преслѣдовать цѣль: пріучить дѣтей смотрѣть на десятокъ, какъ на *единицу*, что̀ весьма важно для усвоенія понятія о сложныхъ единицахъ и десятичномъ составѣ чиселъ.

в) Первые два десятка. Главная цѣль этого отдѣла закончить таблицы сложенія и вычитанія, часть (половина) которыхъ уже знакома ученикамъ послѣ изученія перваго отдѣла. Затѣмъ внѣтабличные случаи сложенія и вычитанія (14+5, 2+16, 17—3, 20—18) уже намѣчаютъ пользованіе десятичнымъ составомъ чиселъ, разложеніемъ чиселъ на десятки и единицы. Сложеніе и вычитаніе въ предѣлахъ таблицъ и внѣ ихъ даютъ возможность подвинуть далѣе и таблицы умноженія и дѣленія.

г) Первая сотня. Намѣченные въ предыдущемъ отдѣлѣ пріемы сложенія и вычитанія, при которыхъ данныя числа разбивались на десятки и единицы, получаютъ здѣсь дальнѣйшее развитіе въ примѣненіи къ сложенію двузначнаго числа съ двузначнымъ и къ вычитанію двузначнаго числа изъ двузначнаго. Овладѣвши пріемами сложенія и вычитанія въ предѣлѣ сотни, дѣти продолжаютъ и заканчиваютъ составленіе и изученіе таблицъ умноженія и дѣленія, а также знакомятся съ пріемами умноженія и дѣленія въ тѣхъ случаяхъ, которые выходятъ изъ предѣловъ таблицъ (24×4, 3×32, $72 : 2$, $84 : 21$).

Такимъ образомъ, пройдя ариѳметику первой сотни, ученики получаютъ понятія о десяткѣ, какъ единицѣ, и о мѣстномъ значеніи цифръ; знакомятся съ составомъ чиселъ изъ десятковъ и единицъ; усвоиваютъ таблицы дѣйствій, т.-е. тѣ элементы вычисленія, которые должны быть удержаны памятью; овладѣваютъ такими пріемами вычисленія, отъ которыхъ потомъ легко перейти къ правиламъ производства дѣйствій надъ

числами любой величины. Всѣ эти свѣдѣнія пріобрѣтаются въ тѣснѣйшей связи съ уразумѣніемъ значенія каждаго дѣйствія въ смыслѣ примѣненія его къ различнаго рода вопросамъ-задачамъ и прилагаются къ рѣшенію такихъ задачъ, которыя требуютъ выполненія нѣсколькихъ дѣйствій.

д) Первая тысяча. Говоря выше о причинахъ выдѣленія первой тысячи, мы указали вмѣстѣ съ тѣмъ и цѣли, которыя должны бытъ достигнуты изученіемъ этого отдѣла. Прибавимъ сюда еще слѣдующее. Обычные пріемы выполненія ариѳметическихъ дѣйствій, называемые иногда нормальными пріемами, состоятъ въ томъ, что дѣйствія надъ данными числами сводятся къ дѣйствіямъ надъ ихъ десятичными группами. Иногда можно получить результатъ проще и скорѣе, пользуясь сокращенными, или частными, пріемами (часть I, глава VII). Сокращенные пріемы вычисленія имѣютъ значеніе и въ цѣляхъ образовательныхъ, и въ цѣляхъ практическихъ; а потому нѣкоторые изъ нихъ должны имѣть мѣсто въ курсѣ начальной ариѳметики. Образовательное значеніе сокращенныхъ пріемовъ состоитъ въ пониманіи тѣхъ свойствъ дѣйствій, на которыхъ эти пріемы основаны; въ большей сознательности вычисленія и въ развитіи наблюдательности и смѣтливости, такъ какъ стремленіе путемъ частнаго пріема легче и скорѣе достигнуть результата заставляетъ всматриваться въ данныя числа съ цѣлью подмѣтить въ нихъ такія особенности, которыя позволили бы съ удобствомъ примѣнить частный пріемъ. Практическое значеніе ихъ понятно само собою. Сокращенные пріемы можно указать ученикамъ при случаѣ еще во время прохожденія первой сотни и, конечно, предоставить дѣтямъ пользоваться ими, если они сами на нихъ нападутъ. Наиболѣе же умѣстны сокращенные пріемы при вычисленіяхъ въ предѣлѣ тысячи, почему здѣсь и надо обратить на нихъ должное вниманіе. Съ одной стороны, раньше этого, въ предѣлѣ сотни, выгода сокращенныхъ пріемовъ сравнительно не велика; къ тому же мѣсто этихъ пріемовъ — послѣ прочнаго усвоенія пріемовъ нормальныхъ; съ другой стороны, письменныя вычисленія надъ большими числами, производимыя по опредѣленнымъ правиламъ, носятъ преимущественно механическій характеръ, не располагающій вычисляющаго къ отступленію отъ этого механизма. Между тѣмъ, какъ о томъ будетъ сказано ниже, при вычисленіяхъ

въ предѣлѣ тысячи желательно весьма широкое примѣненіе устныхъ расчетовъ, для которыхъ въ этомъ предѣлѣ сокращенные пріемы имѣютъ довольно большое значеніе.

е) Числа любой величины. Подъ числами любой величины мы разумѣемъ здѣсь числа не выше первыхъ трехъ классовъ по трехразрядной системѣ: не выше сотенъ милліоновъ. Но и такія числа могутъ имѣть мѣсто лишь при изученіи нумераціи; въ вычисленія же едва ли есть нужда часто вводить даже десятки милліоновъ и простые милліоны: съ такими большими числами окончившему начальную школу врядъ ли когда придется встрѣтиться, уразумѣнію сущности правилъ дѣйствій и пріобрѣтенію механизма вычисленія эти числа особенной помощи не оказываютъ, а потому вычисленія съ ними могутъ повести только къ непроизводительной тратѣ времени.

Послѣ прочнаго усвоенія нумераціи и пріемовъ вычисленія въ предѣлѣ тысячи, изученіе нумераціи чиселъ любой величины и выводъ правилъ дѣйствій надъ такими числами являются дѣломъ весьма нетруднымъ.

Здѣсь придется обратить особенное вниманіе на правильное, аккуратное и возможно изящное расположеніе записей, какъ при отдѣльныхъ дѣствіяхъ, такъ и при выполненіи ряда дѣйствій, необходимыхъ для рѣшенія задачъ.

Что же касается правильности и быстроты письменнаго производства дѣйствій, то качества эти въ достаточной мѣрѣ должны быть развиты и подготовлены изученіемъ предшествующихъ отдѣловъ, а механичность письменнаго вычисленія пріобрѣтается сама собою.

ж) Составныя именованныя числа. Простыя именованныя числа проходятъ черезъ весь курсъ ариѳметики, постоянно встрѣчаясь въ задачахъ, при чемъ дѣти знакомятся со многими мѣрами и ихъ единичными отношеніями. Въ этомъ отдѣлѣ надо расширить и дополнить свѣдѣнія учениковъ, познакомивъ ихъ съ тѣми мѣрами, которыя имъ еще неизвѣстны, и приведя всѣ мѣры въ порядокъ, въ систему; вывести понятіе о составномъ именованномъ числѣ и сообщить термины, относящіеся къ именованнымъ числамъ и совершаемымъ надъ ними преобразованіямъ. Дѣйствія надъ составными именованными числами не заключаютъ въ себѣ ничего существенно новаго и усвоиваются учениками легко. Здѣсь,

какъ и раньше, надлежитъ обратить вниманіе на выполненіе записей, которыя дѣлаются при вычисленіяхъ съ такими числами. Изъ задачъ, которыя являются здѣсь впервые, слѣдуетъ отмѣтить задачи на вычисленіе времени и задачи на вычисленіе поверхностей и объемовъ.

Свѣдѣнія о дробяхъ. Курсъ начальной ариѳметики собственно ограничивается цѣлыми числами, такъ какъ въ него не входятъ тѣ статьи, которыя необходимы для основательнаго изученія дробей (о признакахъ дѣлимости, наибольшемъ дѣлителѣ, наименьшемъ кратномъ). Но, какъ говоритъ министерская программа, — «въ виду практической необходимости въ курсъ введены вычисленія съ долями, на каждомъ шагу требуемыя жизнью. Потребность въ нихъ такъ велика, что на практикѣ они уже существуютъ въ школахъ, но ими не слѣдуетъ увлекаться и сильно затруднять учениковъ».

Затѣмъ программа опредѣляетъ объемъ и характеръ элементарнаго курса дробей. «Наибольшій размѣръ свѣдѣній о доляхъ, какія могутъ быть допускаемы, слѣдующій: 1) нахожденіе одной или нѣсколькихъ частей (цѣлаго числа), которыя сами выражаются цѣлымъ числомъ; 2) нахожденіе такихъ частей единицы, которыя наиболѣе употребительны въ жизни (напр. $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{10}$, $^1/_5$, $^1/_3$, $^1/_6$); 3) употребленіе *нѣсколькихъ* изъ числа уже знакомыхъ долей единицы; 4) образованіе цѣлыхъ изъ частей единицы и выраженіе цѣлыхъ въ доляхъ единицы; 5) сложеніе и вычитаніе одинаковыхъ частей единицы; 6) повтореніе частей единицы нѣсколько разъ; 7) нахожденіе по цѣлому части и по части цѣлаго, когда и данное, и искомое суть числа цѣлыя; 8) сложеніе и вычитаніе различныхъ долей могутъ быть допущены только относительно употребительнѣйшихъ въ жизни случавъ, напр. $^1/_2$ съ $^1/_8$, и если ученики сейчасъ же угадываютъ, въ какихъ доляхъ можетъ быть выражена сумма. Всѣ эти упражненія могутъ быть допускаемы только при рѣшеніи задачъ, безъ всякихъ теоретическихъ объясненій и выводовъ».

«Изъ перечисленныхъ упражненій обязательны только 1, 2, 4 и 5. Упражненія съ долями, не составляя особой части курса, должны распредѣляться на два года обученія, при рѣшеніи задачъ, дающихъ къ тому поводъ, и при

упражненіи въ отвлеченномъ счетѣ, постепенно дѣлаясь нѣсколько сложнѣе».

Такъ какъ программа не даетъ подробныхъ указаній относительно распредѣленія свѣдѣній о дробяхъ между другими статьями курса, то учителю должно выработать себѣ въ достаточной мѣрѣ опредѣленный планъ прохожденія дробей въ намѣченномъ программою объемѣ. Такіе планы могутъ быть, конечно, разнообразны. Предлагаемъ одинъ изъ нихъ.

Ограничиваясь сначала простѣйшими изъ наиболѣе употребительныхъ долей, а именно долями $^1/_2$, $^1/_4$ и $^1/_8$, можно начать упражненія съ этими долями, закончивъ дѣленіе чиселъ первой сотни, послѣ котораго умѣстно познакомить дѣтей съ дѣленіемъ *единицы* на равныя части и употребленіемъ нѣсколькихъ такихъ частей, что̀ и ведетъ къ появленію чиселъ, называемыхъ дробными, или дробями; при этомъ показывается обозначеніе дробей. Упражненіемъ для закрѣпленія понятія о дробяхъ и способа ихъ обозначенія можетъ служить на первыхъ порахъ отысканіе частей цѣлаго числа[1]). Затѣмъ идетъ происхожденіе дроби отъ дѣленія на равныя части *нѣсколькихъ* единицъ ($3:4=^3/_4$) и упражненія въ отысканіи полнаго частнаго ($75:8=9^3/_8$). Встрѣчаясь временами, въ задачахъ на всѣ дѣйствія въ предѣлѣ сотни, съ отысканіемъ частей цѣлаго и нахожденіемъ полнаго частнаго, дѣти въ достаточной мѣрѣ усвоятъ понятіе о дробяхъ. Послѣ этого считаемъ умѣстнымъ поставить: образованіе цѣлыхъ изъ частей единицы (сколько единицъ въ $^8/_2$, въ $^{15}/_4$?) и выраженіе цѣлыхъ въ доляхъ единицы (сколько половинъ въ 3-хъ единицахъ, сколько восьмыхъ въ $5^7/_8$); сравненіе $^1/_2$ съ $^1/_4$, $^1/_4$ съ $^1/_8$, $^1/_2$ съ $^1/_8$; раздробленіе половинъ въ четверти и восьмыя, четвертей въ восьмыя; превращеніе четвертей и восьмыхъ въ половины, восьмыхъ въ четверти. Дѣйствія надъ дробями — въ объемѣ, указанномъ программой, — могутъ быть пройдены послѣ соотвѣтствующихъ дѣйствій надъ цѣлыми числами въ предѣлѣ тысячи. Упражненія съ половинами, четвертями и восьмыми слѣдуетъ вводить,

---

[1]) Отысканіе частей цѣлаго, но безъ упоминанія о дробяхъ и способѣ ихъ обозначенія, можетъ имѣть мѣсто и ранѣе, при рѣшеніи задачъ на дѣленіе и умноженіе: какъ велика половина 8-ми? найти три четверти 24-хъ.

отъ времени до времени, въ задачи на всѣ дѣйствія въ предѣлѣ тысячи.

Подобныя же упражненія съ другими изъ употребительнѣйшихъ долей (какъ $^1/_3$, $^1/_6$, $^1/_5$, $^1/_{10}$) могутъ быть распредѣлены въ отдѣлѣ чиселъ любой величины слѣдующимъ образомъ: вслѣдъ за изученіемъ нумераціи — нахожденіе частей одной единицы и нѣсколькихъ единицъ, составъ полнаго частнаго, образованіе цѣлыхъ изъ частей единицы и выраженіе цѣлыхъ въ доляхъ единицы, сравненіе долей между собою и выраженіе однѣхъ долей въ другихъ доляхъ; а дѣйствія надъ дробями — послѣ соотвѣтствующихъ дѣйствій надъ цѣлыми числами. Извѣстныя ученикамъ вычисленія съ знакомыми имъ дробями должны, отъ времени до времени, входить въ задачи на всѣ дѣйствія съ числами любой величины и съ составными именованными числами.

Изложенный планъ прохожденія дробей въ достаточной степени удовлетворяетъ условіямъ концентрическаго расположенія матеріала и, думаемъ, приведетъ къ прочному усвоенію учениками элементарныхъ свѣдѣній о дробяхъ.

7. Значеніе задачъ въ курсѣ начальной ариѳметики. Какъ мы уже говорили выше, при обученіи начальной ариѳметикѣ задачи являются и цѣлью (научить дѣтей рѣшать задачи), и средствомъ (выяснять и выводить на задачахъ ариѳм. понятія и пріемы вычисленія). Послѣдняя роль принадлежитъ преимущественно задачамъ *простымъ*, а первому назначенію служатъ задачи *сложныя* (часть I, глава VIII). На простыхъ, преимущественно, задачахъ ученики 1) убѣждаются въ необходимости ариѳм. дѣйствій: необходимость эта прямо вытекаетъ изъ тѣхъ задачъ, которыя создаются потребностями обиходной жизни, и необходимость существованія которыхъ не подлежитъ для дѣтей никакому сомнѣнію; 2) знакомятся съ различными случаями примѣненія одного и того же дѣйствія; 3) уясняютъ свойства дѣйствій и пріемы ихъ выполненія[1]). Съ этой точки зрѣнія, какъ иногда говорятъ, *курсъ начальной ариѳметики долженъ быть построенъ на задачахъ*. На задачахъ сложныхъ дѣти примѣняютъ выработанныя понятія

---

[1]) Такъ напр. сокращенные пріемы вычисленія весьма удобно выясняются при помощи задачъ.

о дѣйствіяхъ и выведенные пріемы выполненія ихъ. Такъ какъ сложныя задачи часто задаются потребностями обиходной жизни, то школа, въ цѣляхъ практическихъ, должна научить своихъ учениковъ рѣшать такія задачи. Этими же задачами главнымъ образомъ достигается цѣль образовательная, такъ какъ на этихъ задачахъ, вырабатывая планъ ихъ рѣшенія, *мысль пріучается къ послѣдовательному ряду умозаключеній, дающему отвѣтъ на поставленный вопросъ.* Этимъ назначеніемъ опредѣляется характеръ сложныхъ задачъ, которыя могутъ имѣть мѣсто въ начальной ариѳметикѣ. Это — преимущественно задачи чисто ариѳметическія (часть I, глава VIII). Въ самомъ дѣлѣ, образовательная цѣль рѣшенія задачъ (не говоря уже о практической) можетъ считаться достигнутой лишь въ томъ случаѣ, если ученики, сначала, конечно, руководимые учителемъ, станутъ потомъ рѣшать задачи вполнѣ самостоятельно. Между тѣмъ, задачи алгебраическаго характера для установленія плана ихъ рѣшенія требуютъ, вообще, такого тонкаго анализа и такой сложной работы мысли, до какихъ ученики начальной школы доведены быть не могутъ: этого не позволятъ сдѣлать и возрастъ учащихся, и время ученія, вообще весь строй начальной школы. Къ тому же большинство такихъ задачъ отличаются искусственностью условій и въ практической жизни почти совсѣмъ не встрѣчаются.

Конечно, возможно достигнуть того, что ученики станутъ рѣшать трудныя алгебраическія задачи опредѣленныхъ типовъ по готовому образцу, или рецепту. Но такіе результаты, не имѣя цѣны въ практическомъ отношеніи, по самому характеру этихъ задачъ, — едва ли имѣютъ какое-либо значеніе и по отношенію къ общему развитію учащихся.

Полагаемъ, что учителю начальной школы при выборѣ задачъ можно руководствоваться слѣдующимъ: 1) задачи должны быть такія, какія, по убѣжденію учителя, дѣти могутъ научиться рѣшать вполнѣ самостоятельно; 2) содержаніе задачъ должно быть совершенно понятно для дѣтей, естественно и сообразно съ тѣми требованіями, какія можетъ ставить жизнь.

Скажемъ теперь объ употребленіи въ начальномъ обученіи синтетическаго и аналитическаго пріемовъ рѣшенія задачъ.

Въ синтезѣ мы по даннымъ составляемъ вопросъ; въ анализѣ — къ поставленному вопросу подбираемъ данныя, которыя позволили бы его рѣшить. Синтезъ ведетъ отъ извѣстнаго къ неизвѣстному, анализъ — отъ неизвѣстнаго къ извѣстному. Сравнивая эти два пріема, можно видѣть что синтезъ легче анализа: легче по даннымъ составить вопросъ, нежели къ вопросу подыскать данныя. Торговецъ составилъ 110 фунт. смѣшаннаго чаю и желаетъ продать весь этотъ чай за 187 руб. Что можно изъ этого узнать? (См. задачу въ § 35 части I). Вопросъ напрашивается самъ собою: почемъ долженъ онъ продавать фунтъ смѣси? Торговецъ составилъ смѣшанный чай. Что надо знать, чтобы однимъ дѣйствіемъ рѣшить вопросъ: почемъ долженъ онъ продавать фунтъ смѣси? Подбирать данныя труднѣе.

Легкость синтеза увеличивается еще тѣмъ, что здѣсь можно не откладывать вычисленій до тѣхъ поръ, пока будетъ выработанъ весь планъ рѣшенія: мы можемъ производить вычисленія попутно съ установленіемъ плана рѣшенія. Такъ, поставивши вопросы: сколько стóитъ весь чай перваго сорта? сколько стóитъ весь чай второго сорта?, ученики могутъ тотчасъ же и рѣшить ихъ: 3 р. $\times$ 20 = 60 р.; 1 р. 20 к. $\times$ 90 = 108 р. При составленіи дальнѣйшихъ вопросовъ дѣтямъ легче имѣть дѣло съ числами, нежели съ величинами, которыя только предполагаются извѣстными. Зная, что чай перваго сорта стóитъ 60 р., а второго 108 р., можемъ узнать, сколько стóитъ вся смѣсь; для этого надо 60 р. и 108 р. сложить. При анализѣ разсужденіе труднѣе для дѣтей: чтобы узнать, сколько стóитъ вся смѣсь, надо знать, сколько стóитъ чай перваго и второго сорта; мы узнаемъ, сколько стóитъ смѣсь, когда сложимъ стоимость чая перваго сорта и стоимость чая второго сорта (сложимъ, сколько стóитъ первый сортъ и сколько стóитъ второй сортъ).

Иногда думаютъ, что анализъ вѣрнѣе ведетъ къ цѣли, нежели синтезъ. Едва ли это такъ. Правда, синтезъ носитъ характеръ попытокъ, угадываній: составляя по даннымъ числамъ простую задачу, мы можемъ поставить такой вопросъ, рѣшеніе котораго не нужно для дальнѣйшаго хода, и который, слѣдовательно, не подвинетъ насъ дальше. Но, съ другой стороны, всякій вопросъ можетъ быть рѣшенъ

при помощи различныхъ данныхъ, а потому и въ анализѣ, подыскивая къ вопросу данныя, мы можемъ выбрать такія, которыя по условіямъ задачи не могутъ быть найдены. Полагаемъ, что по отношенію къ задачамъ чисто ариѳметическимъ, идя синтетическимъ путемъ, мы не будемъ блуждать больше, чѣмъ на пути аналитическомъ; напротивъ, скорѣе придемъ къ цѣли, такъ какъ путь этотъ болѣе легкій[1]).

Полагаемъ, едва ли возможно достигнуть того, чтобы ученики начальной школы стали самостоятельно рѣшать задачи анализомъ. Однако, въ виду образовательнаго своего значенія, анализъ отъ времени до времени можетъ имѣть мѣсто въ начальной школѣ при рѣшеніи задачъ вмѣстѣ съ учителемъ, не говоря уже о томъ, что частичное примѣненіе анализа можетъ встрѣчаться довольно часто: когда, напр., рѣшая задачу синтезомъ, дѣти пропустятъ одинъ изъ послѣдовательныхъ вопросовъ, или же составятъ такой вопросъ, который окажется безполезнымъ для дальнѣйшаго рѣшенія задачи, путемъ анализа весьма удобно разъяснить ученикамъ сдѣланную ими ошибку. Что же касается послѣдовательнаго проведенія анализа самими учениками, то все, чего можно требовать отъ нихъ, — это изложить въ аналитической формѣ рѣшеніе такой задачи, которая уже рѣшена ими инымъ (синтетическимъ) путемъ; анализъ при этомъ, конечно, перестаетъ быть пріемомъ рѣшенія, дѣлаясь только формой изложенія.

По приведеннымъ соображеніямъ мы можемъ сказать, что преобладающимъ въ начальной школѣ пріемомъ рѣшенія задачъ долженъ быть синтезъ.

8. Наглядность обученія. Условія сознательности и возможной самодѣятельности въ пріобрѣтеніи ариѳм. свѣдѣній требуютъ, чтобы—согласно естественному ходу усвоенія познаній — обученіе ариѳметикѣ не начиналось съ сообщенія дѣтямъ отвлеченныхъ понятій и готовыхъ правилъ, но, будучи на первыхъ порахъ нагляднымъ, постепенно вело бы учениковъ отъ нагляднаго къ отвлеченному, отъ

---

[1]) Что касается до задачъ алгебраическаго характера, то и здѣсь этотъ анализъ не приведетъ къ цѣли скорѣе, чѣмъ синтезъ. Такія задачи требуютъ анализа другого рода, сущность котораго изложена въ VIII главѣ I части.

частнаго къ общему. Только при этомъ условіи обученіе ариѳметикѣ дастъ дѣтямъ прочныя познанія и принесетъ свою не малую лепту дѣлу общаго развитія учащихся. Наглядность и практическія задачи, вполнѣ доступныя дѣтямъ по содержанію и способныя возбудить ихъ интересъ, должны лежать въ основѣ правильно поставленнаго обученія начальной ариѳметикѣ. Имѣя въ виду только указать здѣсь значеніе наглядности, мы не станемъ перечислять и описывать тутъ различныя наглядныя пособія, которыя могутъ имѣть мѣсто при обученіи ариѳметикѣ: мы сдѣлаемъ это позже, когда будемъ излагать пріемы прохожденія различныхъ отдѣловъ курса.

9. Устныя вычисленія. Первоначальный пріемъ вычисленія есть счетъ. Непосредственнымъ счетомъ мы составляемъ сравнительно небольшую часть таблицы сложенія и вычитанія. Добытые результаты, сдѣлавшись достояніемъ памяти, позволяютъ докончить таблицы сложенія и вычитанія путемъ болѣе короткимъ, чѣмъ простой счетъ. При помощи этихъ таблицъ, а затѣмъ пріемовъ выполненія этихъ дѣйствій внѣ таблицъ, но въ предѣлѣ сотни, идетъ составленіе таблицъ двухъ остальныхъ дѣйствій, при чемъ и здѣсь уже добытые и усвоенные памятью результаты дѣйствія могутъ служить къ дальнѣйшему составленію его таблицы. Дѣйствія надъ числами любой величины состоятъ изъ ряда дѣйствій надъ десятичными группами этихъ чиселъ и сводятся такимъ образомъ къ таблицамъ. Составленіе таблицъ и выводъ правилъ дѣйствій требуютъ болѣе или менѣе дѣятельной работы мысли; но разъ правила выведены, вычисленія по этимъ правиламъ скоро становятся механическими, представляя собою работу памяти, руки и глаза, но не мысли. Рано или поздно, школа должна, конечно, довести своихъ учениковъ до такого механизма вычисленія, при которомъ ариѳм. дѣйствія становятся исключительно орудіями для рѣшенія задачъ, вся же дѣятельность ума сосредоточивается на раскрытіи связи между входящими въ задачу величинами и на установленіи послѣдовательнаго ряда дѣйствій, приводящаго къ рѣшенію вопроса.

Однако не слѣдуетъ спѣшить съ письменнымъ механическимъ вычисленіемъ. Въ начальной школѣ должны имѣть широкое примѣненіе устные расчеты, которые, помимо своего

очевиднаго практическаго значенія, представляютъ собою одинъ изъ важныхъ образовательныхъ элементовъ обученія начальной ариѳметикѣ: устные расчеты сознательнѣе письменнаго вычисленія, живѣе напоминая о системѣ счисленія, о свойствахъ дѣйствій, на которыхъ основаны пріемы ихъ выполненія, и, кромѣ того, изощряя наблюдательность и смѣтливость учащихся, которые при устномъ вычисленіи могутъ отступать отъ обычныхъ правилъ производства дѣйствій и примѣнять иные, сокращенные, пріемы.

Опредѣлимъ точнѣе, что̀ разумѣемъ мы подъ устными вычисленіями и чѣмъ отличаемъ ихъ отъ письменныхъ. Производя дѣйствіе письменно, мы записываемъ результаты дѣйствій надъ отдѣльными группами по мѣрѣ ихъ полученія; выполняя дѣйствіе устно, мы держимъ эти результаты въ памяти. Напр., производя письменно сложеніе чиселъ 574 и 389, мы записываемъ цифру единицъ суммы (3) тотчасъ послѣ того, какъ эта цифра найдена, не дожидаясь, пока сложены будутъ десятки; записываемъ цифру десятковъ суммы (6), не дожидаясь, пока сложены будутъ сотни. Вычисляя устно, мы безъ всякихъ промежуточныхъ записей находимъ сполна всю сумму въ умѣ и потомъ, если нужно, записываемъ ее. При устномъ вычисленіи слѣдуетъ начинать всѣ дѣйствія съ высшихъ разрядовъ, такъ какъ въ названіи числа высшіе разряды предшествуютъ низшимъ; при письменномъ вычисленіи первыя три дѣйствія удобнѣе начинать съ разряда низшаго: въ противномъ случаѣ пришлось бы весьма часто записанную уже цифру замѣнять другою, стирая или зачеркивая ее. Такимъ образомъ, устное вычисленіе, какъ мы его понимаемъ, вовсе не требуетъ того, чтобы данныя числа мы держали въ умѣ: числа эти могутъ быть написаны раньше вычисленія, а результатъ лишь тогда, когда онъ цѣликомъ найденъ въ умѣ. Такъ какъ устные расчеты удобны надъ числами сравнительно небольшими, то общепринятое при письменномъ вычисленіи расположеніе записей не представляетъ здѣсь особенной выгоды: числа данныя и найденныя съ удобствомъ могутъ быть записываемы въ строку.

Производя дѣйствіе устно, ученикъ непремѣнно долженъ назвать (хотя бы и про себя) тѣ отдѣльныя группы, на которыя разбиваются данныя числа; и при письменномъ вы-

численіи слѣдуетъ требовать отъ учениковъ, на первыхъ порахъ, чтобы они называли тѣ группы, надъ которыми производятъ дѣйствіе; но здѣсь это не вызывается необходимостью, здѣсь мѣсто группы единицъ заступаетъ значокъ — цифра, и дѣти скоро же будутъ говорить: «трижды пять — пятнадцать; пять писать, одну замѣчать», вмѣсто словъ: «три раза по пяти десятковъ — будетъ пятнадцать десятковъ, или одна сотня и пять десятковъ». Называя группы, дѣти относятся къ вычисленію сознательнѣе.

Въ прямыхъ дѣйствіяхъ (сложеніи и умноженіи) данныя числа всегда разбиваются на группы десятичныя (на разряды); въ дѣйствіяхъ обратныхъ (вычитаніи и дѣленіи) уменьшаемое и дѣлимое весьма часто разлагаются на группы не десятичныя, а иныя; такъ, для вычитанія 378 изъ 925 разбиваемъ уменьшаемое на 8 сот., 11 дес. и 15 ед.; для раздѣленія 672 на 7 разбиваемъ дѣлимое на 63 дес. и 42 ед. При письменномъ вычитаніи и дѣленіи такое разложеніе уменьшаемаго и дѣлимаго совершается незамѣтно и постепенно; при устномъ вычисленіи это разложеніе должно быть сдѣлано явно и напередъ. Такое явное образованіе группъ вноситъ въ вычисленіе извѣстную долю сознательности.

Далѣе, при устномъ вычисленіи широкое примѣненіе могутъ имѣть сокращенные пріемы, которые, какъ мы уже упоминали выше, изощряютъ наблюдательность и смѣтливость учащихся.

Какъ обширна должна быть область устныхъ вычисленій въ начальной школѣ? Намъ кажется, что обязательно устно слѣдуетъ производить: 1) дѣйствія въ предѣлѣ сотни; 2) дѣйствія надъ круглыми числами, сводящіяся къ вычисленіямъ въ предѣлѣ сотни: 25000×3 (25 тыс. $\times 3$), $6400 : 4$ (64 сот. : 4); 3) вычисленія, легко выполнимыя при помощи частныхъ пріемовъ: $72 \times 125 = (72 : 8) \times 1000 = 9000$; 4) дѣйствія въ особенно удобныхъ случаяхъ: $46620 : 2$. Но кромѣ того, *весьма желательно пріучить дѣтей производить устно всѣ дѣйствія въ предѣлѣ первой тысячи.* Конечно, нѣтъ нужды насиловать память ученика, заставляя его держать данныя числа въ умѣ; но разъ эти числа записаны (будь то при рѣшеніи задачъ или при вычисленіи примѣровъ), — результатъ слѣдуетъ найти устно и уже потомъ записать.

Намѣчая указанный объемъ устныхъ вычисленій, какъ желательный, предлагаемъ учителю, во всякомъ случаѣ, не спѣшить знакомить учениковъ съ письменными правилами тотчасъ по выходѣ изъ области первой сотни и, хотя бы въ видѣ попытки, заставить учениковъ примѣнять къ числамъ до тысячи пріемы устнаго выполненія дѣйствій, которыми они пользовались въ предѣлѣ сотни. Тѣ ученики, для которыхъ это могло бы оказаться труднымъ, пусть пользуются и промежуточными записями, т.-е., въ сущности, производятъ дѣйствіе письменно. Но письменныхъ правилъ во всей ихъ полнотѣ сообщать не слѣдуетъ: не надо указывать общепринятаго расположенія записей, удобства начинать три первыя дѣйствія съ низшихъ разрядовъ; пусть дѣти производятъ всѣ дѣйствія съ высшихъ разрядовъ, какъ дѣлали это раньше, исправляя, гдѣ надо, записанныя цифры. Вообще, письменнымъ пріемамъ надо придать здѣсь характеръ исключенія. Этимъ путемъ можно достигнуть того, что большинство учениковъ станетъ производить всѣ расчеты устно. Если письменные пріемы показаны слишкомъ рано (напр. тотчасъ по выходѣ изъ сотни), то потомъ трудно будетъ развить въ дѣтяхъ привычку и интересъ къ устнымъ расчетамъ. Не говоря уже о самостоятельныхъ работахъ, даже во время занятія съ учителемъ, который въ данномъ случаѣ, положимъ, требуетъ устнаго вычисленія, дѣти по большей части будутъ производить дѣйствія по правиламъ письменнаго выполненія ихъ, рисуя въ умѣ картину расположенія записей.

Практическое значеніе устныхъ расчетовъ очевидно: кончающему курсъ начальной школы рѣдко придется дѣлать вычисленія на бумагѣ: устные расчеты и выкладки на счетахъ—вотъ та область, въ которой онъ найдетъ главное примѣненіе вынесенныхъ изъ школы познаній по ариѳметикѣ.

10. Форма обученія. Наиболѣе удобная форма начальнаго обученія—вопросо-отвѣтная, или катихизическая; при этомъ своими вопросами учитель не только выспрашиваетъ у дѣтей уже сообщенное имъ (катихизація повторительная), но и наводитъ учениковъ на новыя свѣдѣнія (катихизація наводительная). Вопросо-отвѣтная форма весьма умѣстна въ то время, когда дѣти еще не умѣютъ слу-

шать, т.-е. болѣе или менѣе продолжительное время съ должнымъ вниманіемъ слѣдить за разсказомъ учителя. Наводящіе вопросы, требуя самодѣятельности учащихся, возбуждаютъ ихъ вниманіе и интересъ и дѣлаютъ прочнымъ усвоеніе знаній. Затѣмъ, катихизическая форма обученія, постоянно контролируя познанія учащихся, всегда укажетъ учителю, что̀ для дѣтей непонятно или трудно, а потому требуетъ для разъясненія иного пріема, чѣмъ тотъ, который былъ примѣненъ; на чемъ слѣдуетъ подольше остановиться, что̀ можно на время отложить. Вопросо-отвѣтная (наводительная) форма обученія болѣе, нежели къ какому другому предмету, приложима къ ариѳметикѣ: всѣ существенные выводы начальной ариѳметики ученики могутъ сдѣлать сами подъ руководствомъ учителя.

Однако не слѣдуетъ слишкомъ увлекаться этой формой обученія и впадать въ мелочную катихизацію тамъ, гдѣ это можетъ повести только къ непроизводительной тратѣ времени и утомленію дѣтей. Помимо терминовъ, расположенія записей, до которыхъ или невозможно, или весьма трудно довести учениковъ, и въ другихъ случаяхъ прямое указаніе учителя можетъ повести только къ сбереженію времени, столь дорогого въ начальной школѣ.

11. Распредѣленіе занятій между группами. Обычный типъ нашей начальной школы — это одноклассное училище съ трехлѣтнимъ курсомъ, при одномъ учителѣ. Ученики, помѣщаясь въ одной классной комнатѣ, раздѣляются на три группы, или отдѣленія: младшее (первый годъ обученія), среднее (второй годъ обученія) и старшее (третій и послѣдній годъ обученія).

Такъ какъ познанія учениковъ трехъ группъ различны, то учитель, занимаясь самъ съ учениками одной группы, даетъ на это время другимъ группамъ самостоятельныя работы[1]).

Свои занятія учитель долженъ распредѣлить между тремя группами возможно равномѣрнѣе.

Представляются возможными три способа распредѣленія занятій учителя: 1) Раздѣлить часовой урокъ поровну

---

[1]) Иногда, правда, рѣдко, учителя ведутъ занятія одновременно съ двумя группами, напр. упражняя дѣтей въ такъ называемомъ бѣгломъ счетѣ.

между тремя группами и, занявшись сначала съ одной изъ нихъ, перейти затѣмъ къ другой и, наконецъ, къ третьей. Такимъ образомъ, каждое отдѣленіе треть урока занимается съ учителемъ и двѣ трети урока — самостоятельно. Болѣе частый переходъ отъ группы къ группѣ представляется, вообще, дѣломъ весьма не легкимъ. Мы говоримъ здѣсь, конечно, не о присмотрѣ за учениками, работающими самостоятельно, и не о помощи, которую иногда приходится оказывать при встрѣтившихся имъ затрудненіяхъ. 2) Раздѣлить часъ поровну только между двумя группами: двѣ группы занимаются по получасу съ учителемъ и по получасу самостоятельно; одна группа весь часъ работаетъ самостоятельно. 3) Весь урокъ учитель ведетъ занятія лишь съ одной группой, двѣ другія заняты самостоятельной работой; этимъ послѣднимъ группамъ удѣляется часть урока для заданія работъ и для повѣрки ихъ, если повѣрка дѣлается на томъ же урокѣ.

Намъ кажется, что послѣднее распредѣленіе занятій самое удобное: будучи легче для учителя, оно производительнѣе въ смыслѣ сбереженія времени, такъ какъ въ одинъ часовой урокъ вообще можно сдѣлать больше, чѣмъ, напримѣръ, въ два получасовыхъ, раздѣленныхъ болѣе или менѣе длиннымъ промежуткомъ времени[1]). При этомъ надо замѣтить, что, называя урокъ часовымъ, мы на самомъ дѣлѣ имѣемъ въ распоряженіи минутъ 40—45, такъ какъ часть урока идетъ на заданіе, а иногда—и повѣрку самостоятельныхъ работъ.

12. Самостоятельныя работы и повѣрка ихъ. Такъ или иначе распредѣляя, по возможности, равномѣрно свои уроки между тремя отдѣленіями, учитель занимается съ каждымъ изъ нихъ лишь одну треть учебнаго времени, а двѣ трети этого времени ученики работаютъ одни. Отсюда само собой понятно огромное значеніе самостоятельныхъ работъ, которыя отнюдь не должны являться простымъ заполненіемъ времени или средствомъ заставить дѣтей держать себя тихо подъ предлогомъ занятій. Во время этихъ ра-

---

[1]) Въ послѣднемъ случаѣ, если тема урока въ первый получасовой урокъ не окончена, то часть другого урока пойдетъ на припоминаніе того, что сдѣлано на предыдущемъ.

ботъ ученики усвоиваютъ и отчасти подготовляютъ тѣ выводы, которые дѣлаются на урокахъ съ учителемъ; пріобрѣтаютъ необходимый навыкъ въ вычисленіяхъ и упражняются въ примѣненіи дѣйствій къ рѣшенію задачъ.

Какъ бы хорошо ни былъ выбираемъ матеріалъ для самостоятельныхъ работъ, онѣ тогда только достигнутъ своей цѣли, когда будутъ тщательно провѣряемы: въ противномъ случаѣ онѣ легко могутъ привести къ отрицательному результату, такъ какъ ученики станутъ относиться къ нимъ небрежно. Не говоримъ уже о томъ, что, при недостаточной внимательности къ этимъ работамъ, учитель лишается прекраснаго средства контролировать успѣхи учениковъ.

Время повѣрки самостоятельныхъ работъ выбирается учащими различно. 1) Работы провѣряются на урокѣ: на томъ же или на слѣдующемъ. 2) Повѣркѣ отводится внѣклассное время: послѣ уроковъ, въ перемѣну между уроками, до начала уроковъ слѣдующаго дня. 3) Работы провѣряются частью на урокахъ, частью во внѣклассное время.

Нѣкоторые учащіе дѣлаютъ просмотръ каждой работы съ подчеркиваніемъ ошибокъ: дѣлается это или самимъ учителемъ въ классѣ или у себя на дому, или же учениками, которые обмѣниваются досками или тетрадями и просматриваютъ работу другъ друга. Просмотрѣнныя работы возвращаются ученикамъ, и тѣ исправляютъ ошибки, или сами доходя до сознанія ихъ, или по указанію учителя. Другіе практикуютъ *общую повѣрку:* ученики по очереди читаютъ рѣшеніе задачи или примѣра и сдѣланныя при этомъ вычисленія, прочіе слѣдятъ по своимъ доскамъ или тетрадямъ, заявляя, такъ или не такъ у нихъ сдѣлано; вычисленія, выполненныя кѣмъ-либо невѣрно, производятся на классной доскѣ. Общая повѣрка работъ кажется намъ въ высшей степени желательною. Предоставить самимъ ученикамъ исправить указанныя (подчеркнутыя) ошибки— конечно, весьма хорошо. Но это потребуетъ вторичной повѣрки, съ цѣлью убѣдиться, поняты ли учениками ошибки, и исправлены ли онѣ, какъ должно. Дѣло очень усложняется. Если же надо будетъ разъяснять ошибки и заставлять при себѣ исправлять ихъ, то не лучше ли къ исправленію ошибокъ привлекать всѣхъ учениковъ отдѣленія: для тѣхъ, работа которыхъ вѣрна, это послужитъ небезполезнымъ

повторенiемъ задачи или примѣра и будетъ служить къ развитiю увѣренности въ своихъ силахъ; другимъ это покажетъ, что работа посильна для ихъ товарищей, и приведетъ, быть можетъ, скорѣе къ сознанiю ошибокъ, чѣмъ разъясненiе учителя, дѣйствуя нѣкоторымъ образомъ на чувство самолюбiя. Является только вопросъ: надо ли раньше общей повѣрки дѣлать просмотръ каждой работы? Предварительный просмотръ работъ при многолюдности школы отнимаетъ очень много времени и представляетъ для учителя не малый трудъ, едва ли окупаемый результатами. Поручить такую повѣрку самимъ ученикамъ врядъ ли удобно, такъ какъ легко можетъ случиться, что ученики, обмѣнявшiеся работами, оба допустили одну и ту же ошибку и открыть ее другъ у друга не смогутъ (или укажутъ несуществующую ошибку). Намъ кажется, что такой просмотръ съ удобствомъ можетъ быть замѣненъ предварительнымъ опросомъ отвѣтовъ, для котораго найдется время въ концѣ того же урока, на какомъ работа выполнена. Спрашивая, у кого какой получился окончательный отвѣтъ на задачу или примѣръ, учитель велитъ самимъ ученикамъ подчеркнуть невѣрные отвѣты и доискаться ошибки, если есть время (напр., если учитель будетъ провѣрять работы еще въ другой группѣ). Это — предварительная повѣрка. Затѣмъ дѣлается общая повѣрка такъ, какъ показано выше, или во внѣклассное время, или въ началѣ слѣдующаго урока.

13. Распредѣленiе учебнаго матерiала по годамъ обученiя. Министерская программа 1897 года даетъ такое *примѣрное* распредѣленiе матерiала по годамъ обученiя.

1-й годъ.

Счетъ прямой и обратный до 100.

Четыре дѣйствiя въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ.

Примѣчанiе. Расширенiе требованiй можетъ быть допущено только при достиженiи твердаго знакомства съ дѣйствiями въ указанныхъ предѣлахъ.

Знакомство съ цифрами и знаками дѣйствiй.

Указанiе на примѣрахъ основныхъ ариѳметическихъ понятiй (прибавить, отнять, повторить, сколько разъ содер-

жится, раздѣлить, на сколько больше или меньше, во сколько разъ больше или меньше).

Римская нумерація до XX.

2-й годъ.

Нумерація и четыре дѣйствія въ предѣлѣ 100 и 1000.

Объясненіе ариѳметическихъ выраженій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе; разностное и кратное сравненіе чиселъ.

Увеличеніе и уменьшеніе въ 10, въ 100 разъ.

Ознакомленіе съ наиболѣе употребительными русскими мѣрами.

Рѣшеніе задачъ, устно и письменно, соотвѣтствующихъ курсу.

Знакомство съ долями.

3-й годъ.

Нумерація и четыре дѣйствія надъ числами любой величины и повѣрка дѣйствій.

Дѣйствія надъ составными именованными числами

Простѣйшія вычисленія съ долями.

Рѣшеніе устныхъ и письменныхъ задачъ.

Такое распредѣленіе курса по годамъ «сдѣлано въ программахъ примѣрно, и преподаватели могутъ, согласно мѣстнымъ условіямъ, переносить части курса изъ одного года въ другой, имѣя однако въ виду, чтобы, при нормальныхъ условіяхъ, ученики непремѣнно къ концу третьей зимы прошли все указанное программою».

Намѣченное программою распредѣленіе курса представляется очень удобнымъ. Въ первый годъ, при особенно благопріятныхъ условіяхъ, намъ кажется возможнымъ пройти еще сложеніе и вычитаніе въ предѣлѣ сотни. Что же касается второго года, то думаемъ, что расширять его программу ни въ какомъ случаѣ не слѣдуетъ: съ большими числами рѣдко придется встрѣтиться окончившему курсъ начальной школы, и держать учениковъ долго на такихъ числахъ нѣтъ основанія; напротивъ, желательно подольше остановить дѣтей на вычисленіяхъ въ такомъ предѣлѣ, какъ тысяча, достигнувъ этимъ того, что дѣти станутъ свободно

и по возможности устно производить эти вычисленія, примѣняя ихъ къ рѣшенію задачъ, преимущественно общежитейскаго, практическаго, содержанія.

ГЛАВА I.

Первый десятокъ.

1. Счетъ прямой и обратный. Упражненія въ предѣлѣ перваго десятка мы начинаемъ присчитываніемъ и отсчитываніемъ по единицѣ. Но прежде чѣмъ заставлять дѣтей *прибавлять* и *отнимать* по единицѣ, учителю необходимо убѣдиться, умѣютъ ли его ученики *считать* до десяти, т.-е. твердо ли они знаютъ тотъ порядокъ, въ которомъ числительныя другъ за другомъ слѣдуютъ и другъ другу предшествуютъ, и правильно ли относятъ извѣстное числительное къ соотвѣтствующей группѣ единицъ. Этому испытанію можетъ быть посвященъ первый урокъ ариѳметики.

Умѣя считать, мы имѣемъ возможность составлять числа. Но, кромѣ того, у каждаго есть въ обиходѣ нѣкоторый запасъ уже готовыхъ чиселъ. Съ цѣлью вывѣдать этотъ запасъ готовыхъ чиселъ, учитель спрашиваетъ дѣтей о томъ, сколько кому лѣтъ, сколько у кого братьевъ и сестеръ, сколько дней въ недѣлѣ, сколько пальцевъ на рукахъ и т. п. Спросивши затѣмъ, что надо сдѣлать, чтобы узнать: сколько? (что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько учениковъ въ младшемъ отдѣленіи?), и получивши отвѣтъ: надо сосчитать, учитель приступаетъ къ испытанію дѣтей въ умѣньи считать.

Выставивъ на планку доски кубики (положивши шарики на классныхъ счетахъ, начертивъ рядъ крестиковъ на доскѣ), учитель, послѣ общаго вопроса, обращеннаго ко всѣмъ ученикамъ: сколько кубиковъ поставилъ я?, и послѣ отвѣтовъ, данныхъ на него съ мѣста, вызываетъ къ доскѣ (или счетамъ) нѣсколько учениковъ (по очереди), преимущественно тѣхъ, которые съ мѣста дали отвѣтъ невѣрный или не дали никакого отвѣта, и заставляетъ ихъ вести вслухъ, при помощи указки, количественный прямой счетъ: одинъ, два, три, четыре и т. д. Тутъ можетъ обнаружиться, что иные

ученики, зная названія чиселъ, не твердо знаютъ порядокъ ихъ слѣдованія одного за другимъ: такъ, ученикъ послѣ слова «шесть» скажетъ «восемь»; иные, зная порядокъ числительныхъ, неправильно отнесутъ числительное къ группѣ предметовъ: такъ, ученикъ, указывая на шестой кубикъ, успѣетъ назвать по порядку всѣ числа, кончая пятью или семью.

Послѣ прямого счета идетъ счетъ обратный. Учитель снимаетъ по кубику (скидываетъ по шарику, стираетъ по крестику), а дѣти говорятъ: десять, девять, восемь, семь и т. д. Ученики, знающіе порядокъ, въ которомъ числительныя предшествуютъ другъ другу, будутъ сразу называть число остающихся кубиковъ; а тѣ ученики, которые остающіеся кубики станутъ считать, не умѣютъ вести обратнаго счета.

Испытаніе дѣтей въ умѣньи считать можно закончить упражненіями въ порядковомъ счетѣ. Ученики считаютъ напр. крестики, начерченные на классной доскѣ: первый, второй, третій и т. д.; потомъ обратно: десятый, девятый, восьмой и т. д. Затѣмъ, уже безъ наглядныхъ пособій, отвѣчаютъ на вопросы: какой крестикъ находится послѣ пятаго? какой — передъ седьмымъ? какой — между седьмымъ и девятымъ? и пр.

Если окажется, что нѣкоторые ученики считаютъ плохо, то прежде всего слѣдуетъ научить ихъ считать. Для этой цѣли могутъ служить такія же упражненія, какія приведены выше. Полезно при этомъ вести счетъ и хоромъ.

При упражненіяхъ въ счетѣ слѣдуетъ разнообразить наглядныя пособія: 1) это придаетъ разнообразіе и оживленіе уроку; 2) зарождаетъ мысль, что счетъ ведется одинаково, каковы бы ни были предметы; а эта мысль служитъ къ образованію понятія о числѣ отвлеченномъ.

2. Присчитываніе и отсчитываніе по единицѣ. Присчитываніе по единицѣ мы отличаемъ отъ простого счета. Одинъ, два, три, четыре, пять; это — счетъ. Одинъ да одинъ — два, два да одинъ — три, три да одинъ — четыре, четыре да одинъ пять; это — присчитываніе по одному. Подобнымъ же образомъ отсчитываніе по единицѣ отличается отъ счета обратнаго. Въ присчитываніи и отсчитываніи явно выступаетъ понятіе о дѣйствіи, о прибавленіи и отнятіи, выражаемое напр. словами «да», «безъ».

Правда, и производя счетъ, мы присоединяемъ (дѣйствительно или мысленно) одинъ предметъ къ другому, но тамъ эта мысль о прибавленіи сознается нами не совсѣмъ ясно, такъ какъ мы считаемъ тогда, когда желаемъ опредѣлить, сколько предметовъ находится въ *одной* группѣ, данной намъ, какъ цѣлое (сколько учениковъ въ классѣ, сколько картинъ на стѣнѣ). Счетъ всегда начинается съ единицы. Присчитывая, мы узнаемъ, сколько предметовъ въ *двухъ* (не менѣе двухъ) группахъ. Присчитываніе начинается съ числа предметовъ, составляющихъ одну изъ группъ; напр. мы хотимъ узнать, сколько картинъ виситъ на двухъ стѣнахъ; считаемъ сначала, сколько картинъ на каждой стѣнѣ; пусть на одной изъ нихъ 5, на другой 4 картины; тогда мы начинаемъ съ 5-ти: 5 да 1—6, 6 да 1 — 7 и т. д.; это — присчитываніе. (Часть I, глава II, § 9.)

Присчитываніе и отсчитываніе по единицѣ, съ одной стороны, тѣсно примыкаютъ къ счету (прямому и обратному); съ другой стороны, начинаютъ собою сложеніе и вычитаніе, давая первыя понятія объ этихъ дѣйствіяхъ и служа первоначальными пріемами ихъ выполненія.

Присчитываніе и отсчитываніе по единицѣ не можетъ затруднить дѣтей въ смыслѣ отысканія результата, если дѣти умѣютъ вести прямой и обратный счетъ. Вся суть настоящихъ упражненій заключается въ томъ, чтобы познакомить учениковъ съ понятіями «прибавить» и «отнять» и пріучить дѣтей подводить подъ эти понятія тѣ разнообразныя выраженія, подъ которыми понятія эти скрыты въ практическихъ вопросахъ-задачахъ, какъ-то: купить, подарить, найти, продать, потерять, съѣсть и т. д.

На планку доски ставится нѣсколько, напр. пять, кубиковъ.

— Сколько кубиковъ стоитъ на планкѣ? Какъ это узнать? Поди и считай вслухъ.

Рядомъ съ ними ставится еще кубикъ.

— Сколько кубиковъ теперь на планкѣ? Слушайте, дѣти: считали вы сейчасъ всѣ кубики снова, съ самаго начала, или сразу сказали, что стало шесть кубиковъ?

— Сказали сразу.

Въ случаѣ противоположнаго отвѣта учитель можетъ разъяснить дѣтямъ, что считать кубики снова незачѣмъ, а надо прямо, сразу, сказать, сколько стало кубиковъ, такъ какъ мы знаемъ, что за пятью идетъ шесть.

— Да, мы сейчасъ не *считали* всѣхъ кубиковъ, а только *присчитали* одинъ кубикъ къ пяти кубикамъ. Что же мы сейчасъ сдѣлали?

Дѣти даютъ *полный отвѣтъ:* присчитали одинъ кубикъ къ пяти кубикамъ.

— Одинъ кубикъ присчитать къ пяти кубикамъ — сколько будетъ кубиковъ?

Полный отвѣтъ.

— Слушайте, дѣти: вмѣсто «присчитать» говорятъ также «прибавить». Что же мы сдѣлали съ кубиками?

— Къ пяти кубикамъ прибавили одинъ кубикъ — стало шесть кубиковъ.

То же присчитываніе продѣлывается на другихъ предметахъ, для того чтобы потомъ перейти къ отвлеченнымъ числамъ.

— Сколько шариковъ положилъ я на счетахъ?

Кладется еще одинъ шарикъ

— Сколько шариковъ положено теперь? Что же мы сейчасъ сдѣлали?

— Къ пяти шарикамъ прибавили одинъ шарикъ — стало шесть шариковъ.

— Сколько крестиковъ написалъ я?

Чертится еще одинъ крестикъ.

— Сколько крестиковъ написано теперь? Что мы сейчасъ сдѣлали?

— Къ пяти крестикамъ прибавили одинъ крестикъ — стало шесть крестиковъ.

— Къ пяти кубикамъ прибавить одинъ кубикъ — сколько будетъ кубиковъ?

— Къ пяти шарикамъ прибавить одинъ шарикъ — сколько будетъ шариковъ?

— Къ пяти крестикамъ прибавить одинъ крестикъ — сколько будетъ крестиковъ?

— Къ пяти прибавить одинъ — сколько будетъ?

Идетъ присчитываніе по одному въ порядкѣ.

— Къ одному прибавить одинъ — сколько будетъ? Къ двумъ прибавить одинъ? Къ тремъ прибавить одинъ? и т. д. Къ девяти прибавить одинъ?

Затѣмъ слѣдуютъ задачи.

— Дѣвочка пошла въ лѣсъ за грибами; скоро набрала она пять грибовъ и положила ихъ въ корзинку; потомъ нашла она еще одинъ грибъ, положила и его въ корзинку. Сколько грибовъ стало у нея въ корзинкѣ?

— Шесть грибовъ.

— А какъ это узнать?

На этотъ вопросъ дѣти обыкновенно пересказываютъ задачу: было пять грибовъ, нашла еще одинъ грибъ, стало шесть грибовъ. На желаемый отвѣтъ можно навести дѣтей при помощи наглядныхъ пособій.

— Сколько грибовъ было въ корзинкѣ раньше? А мы поставимъ пять кубиковъ. Сколько еще грибовъ нашла дѣвочка? А мы поставимъ еще одинъ кубикъ. Сколько стало всѣхъ кубиковъ? Что сдѣлали мы сейчасъ съ кубиками?

— Къ пяти кубикамъ прибавили одинъ кубикъ.

— Такъ какъ же узнать, сколько грибовъ стало въ корзинкѣ?

— Къ пяти грибамъ прибавить одинъ грибъ — будетъ шесть грибовъ.

— Скажемъ это короче: къ пяти прибавить одинъ — будетъ шесть. Какъ же узнать, сколько грибовъ стало въ корзинкѣ?

— Къ пяти прибавить одинъ — будетъ шесть.

Задачи №№ 1—9 нашего сборника содержатъ въ порядкѣ всѣ случаи присчитыванія по единицѣ. Эти задачи могутъ быть даны дѣтямъ послѣ приведеннаго разъясненія того, какіе отвѣты должны давать ученики при рѣшеніи задачъ.

На планку доски ставится нѣсколько, напр. шесть, кубиковъ.

— Сколько кубиковъ стоитъ на планкѣ? Какъ это узнать? Поди и считай вслухъ.

Одинъ кубикъ снимается.

— Что я сдѣлалъ сейчасъ?

— Одинъ кубикъ сняли.

— Сколько кубиковъ осталось на планкѣ? Слушайте, дѣти: считали вы снова тѣ кубики, что̀ остались, или сказали сразу, сколько ихъ?

— Сказали сразу.

— Запомните: когда мы сняли одинъ кубикъ и сказали, сколько осталось, то мы *отсчитали* одинъ кубикъ отъ шести кубиковъ. Что же мы сдѣлали?

Дѣти даютъ полный отвѣтъ: отсчитали одинъ кубикъ отъ шести кубиковъ.

— Отъ шести кубиковъ отсчитать одинъ кубикъ — сколько кубиковъ останется?

Полный отвѣтъ.

— Слушайте, дѣти: вмѣсто «отсчитать» говорятъ также «отнять». Что же мы сдѣлали съ кубиками»?

— Отъ шести кубиковъ отняли одинъ кубикъ — осталось пять кубиковъ.

То же отсчитываніе продѣлывается и на другихъ предметахъ для перехода къ отвлеченнымъ числамъ.

— Сколько шариковъ положилъ я на счетахъ?

Одинъ шарикъ скидывается.

— Сколько шариковъ положено теперь? Что же мы сейчасъ сдѣлали?

— Отъ шести шариковъ отняли одинъ шарикъ — осталось пять шариковъ.

— Сколько кружковъ написалъ я?

Одинъ кружокъ стирается.

— Сколько кружковъ написано теперь? Что же мы сейчасъ сдѣлали?

— Отъ шести кружковъ отняли одинъ кружокъ — осталось пять кружковъ.

— Отъ шести кубиковъ отнять одинъ кубикъ — сколько останется кубиковъ? Отъ шести шариковъ отнять одинъ шарикъ — сколько останется шариковъ? Отъ шести кружковъ отнять одинъ кружокъ — сколько останется кружковъ? Отъ шести отнять одинъ — сколько останется?

Идетъ отсчитываніе въ порядкѣ.

— Отъ двухъ отнять одинъ — сколько останется? Отъ трехъ отнять одинъ? Отъ четырехъ отнять одинъ? и т. д. Отъ десяти отнять одинъ?

Затѣмъ слѣдуютъ задачи.

— У хозяйки было шесть стакановъ, одинъ стаканъ она разбила. Сколько стакановъ осталось у хозяйки?

— Пять стакановъ.

— А какъ это узнать?

Если не послѣдуетъ желаемаго отвѣта, то можно навести на него такъ, какъ это сдѣлано раньше.

— Сколько стакановъ было сначала у хозяйки? А мы поставимъ шесть кубиковъ. Сколько стакановъ она разбила? А мы одинъ кубикъ снимемъ. Сколько кубиковъ осталось? Что сдѣлали мы сейчасъ съ кубиками?

— Отъ шести кубиковъ отняли одинъ кубикъ.

— Такъ какъ же узнать, сколько стакановъ осталось у хозяйки?

— Отъ шести стакановъ отнять одинъ стаканъ — останется пять стакановъ.

— Скажите короче.

— Отъ шести отнять одинъ — останется пять.

Задачи №№ 10—18 нашего сборника содержатъ въ порядкѣ всѣ случаи отсчитыванія по единицѣ.

Послѣ нихъ идутъ задачи №№ 19—36 на присчитываніе и отсчитываніе единицы вразбивку.

Если дѣти скоро станутъ давать желаемые отвѣты при рѣшеніи задачъ, т.-е. быстро освоятся съ понятіями «прибавить» и «отнять», то можно ограничиться только нѣкоторыми изъ задачъ, приведенныхъ подъ №№ 1—36.

3. Присчитываніе и отсчитываніе нѣсколькихъ единицъ. Присчитываніе и отсчитываніе нѣсколькихъ (а также и одной) единицъ есть сложеніе и вычитаніе въ предѣлѣ перваго десятка. Но вводить терминологію этихъ дѣйствій (сложить, сложеніе; вычесть, вычитаніе; слагаемыя, сумма; уменьшаемое, вычитаемое, остатокъ) было бы здѣсь преждевременно; дѣти означаютъ первое изъ этихъ дѣйствій словами «присчитать», «прибавить», а второе — словами «отсчитать», «отнять». Впрочемъ надо замѣтить, что терминъ «сложить», вслѣдствіе его простоты и понятности, дѣти иногда вводятъ сами. Не препятствуя этому, учитель предоставляетъ ученикамъ употреблять слово «сложить» на ряду съ выраженіями «присчитать», «прибавить».

Первоначальный пріемъ сложенія и вычитанія есть присчитываніе и отсчитываніе по единицѣ. Пусть надо, напримѣръ, къ пяти прибавить три: къ пяти прибавить одинъ —

будетъ шесть, къ шести прибавить одинъ — будетъ семь, къ семи прибавить одинъ — будетъ восемь. Такъ поступаемъ мы, если пользуемся какими-либо наглядными пособіями. Если же сложеніе выполняется безъ всякихъ наглядныхъ пособій, то мы должны вести счетъ и прибавляемымъ единицамъ: къ пяти прибавимъ первую единицу — будетъ шесть, къ шести прибавимъ вторую единицу — будетъ семь, къ семи прибавимъ третью единицу — будетъ восемь; иначе мы, конечно, не будемъ знать, гдѣ остановиться; или же мы опредѣляемъ всякій разъ, сколько еще осталось прибавить: къ пяти прибавить одинъ — будетъ шесть, осталось прибавить два; къ шести прибавить одинъ — будетъ семь, осталось прибавить одинъ; къ семи прибавить одинъ — будетъ восемь. Подобнымъ же образомъ поступаемъ и при вычитаніи.

Если нѣкоторые результаты сложенія и вычитанія уже усвоены памятью, то этимъ можно пользоваться для болѣе скораго нахожденія другихъ результатовъ. Положимъ, напримѣръ, что мы запомнили результаты присчитыванія и отсчитыванія двухъ и трехъ; тогда, чтобы прибавить, напримѣръ, пять къ четыремъ, мы разобьемъ пять не на единицы, но на группы два и три; приложимъ сразу, на память, два къ четыремъ и потомъ три къ шести; точно такъ же, мы вычтемъ напр. пять изъ восьми, отнимая отъ восьми два и затѣмъ отъ шести — три. Мы видимъ, что примѣненіе этого пріема къ сложенію требуетъ умѣнья и вычитать: разбивая придаваемое число пять на группы и назначая первую группу въ двѣ единицы, для опредѣленія второй группы мы должны отъ пяти отнять два. Вслѣдствіе этого сложеніе и вычитаніе въ предѣлѣ перваго десятка мы ведемъ параллельно (чередуя присчитываніе и отсчитываніе), а не одно послѣ другого. Кромѣ того, такое совмѣстное изученіе дѣйствій вноситъ въ занятія разнообразіе.

Такимъ образомъ, при составленіи таблицы сложенія и вычитанія въ предѣлѣ десяти могутъ имѣть мѣсто два пріема: разложеніе придаваемаго и отнимаемаго числа на единицы и разложеніе ихъ на иныя числа. Чтобы внести нѣкоторый порядокъ въ пользованіе тѣмъ и другимъ пріемомъ, мы предлагаемъ поступить такъ.

Таблица сложенія въ предѣлѣ десяти можетъ быть раздѣлена на двѣ, почти равныя, части, отличающіяся одна отъ другой перестановкой слагаемыхъ. Отнесемъ къ первой части тѣ случаи, когда къ большему числу придается меньшее (8+2) или равное къ равному (4+4), а слѣдовательно ко второй части — тѣ случаи, когда къ меньшему числу прибавляется большее (3+5). Первую часть этой таблицы мы предлагаемъ составить присчитываніемъ по одному, а вторую часть — послѣ усвоенія первой части на память — путемъ разложенія второго слагаемаго не на единицы, а на иныя группы; здѣсь же дѣти могутъ пользоваться подмѣченной ими или указанной имъ неизмѣняемостью результата отъ перестановки слагаемыхъ. Таблица вычитанія въ предѣлѣ десяти также можетъ быть разбита на двѣ, почти равныя, части, отличающіяся другъ отъ друга тѣмъ, что одно и то же число въ одной изъ нихъ служитъ вычитаемымъ, а въ другой — остаткомъ (10—4, 10—6). Къ первой изъ нихъ мы отнесемъ тѣ случаи, когда вычитаемое меньше остатка или равно ему (9—3, 8—4), а ко второй — тѣ, когда вычитаемое больше остатка (9—6). Первую часть этой таблицы мы предлагаемъ составить отсчитываніемъ по одному, а вторую — разложеніемъ вычитаемаго не на единицы, а на иныя группы; здѣсь же дѣти могутъ подмѣтить, или же это можетъ быть указано имъ, что при одномъ и томъ же уменьшаемомъ вычитаемое становится остаткомъ, если остатокъ дѣлается вычитаемымъ: отъ 10 отнять 4 — останется 6; а отъ 10 отнять 6 — останется 4; это можетъ служить къ запоминанію таблицы.

Разсмотримъ подробнѣе прохожденіе первой части таблицъ сложенія и вычитанія.

На планку доски ставится налѣво напр. пять кубиковъ, направо — четыре кубика.

— Сколько кубиковъ налѣво? Сколько направо? А сколько всѣхъ кубиковъ на планкѣ? Какъ вы это узнали?

— Сосчитали.

Это — весьма вѣроятный отвѣтъ; можетъ быть, скажутъ иначе: присчитали, прибавили.

— Какъ же вы сосчитали? (присчитали, прибавили?). Поди къ доскѣ и считай вслухъ.

Здѣсь можетъ быть или желаемый отвѣтъ, или же — что вѣроятнѣе — ученикъ будетъ считать такъ: одинъ, два, три, четыре, пять; переходитъ направо: шесть, семь, восемь, девять.

— Слушайте, дѣти: зачѣмъ же намъ еще разъ считать тѣ кубики, что̀ налѣво: вѣдь мы уже знаемъ, что ихъ пять; намъ надо только присчитать, прибавить, четыре кубика къ пяти кубикамъ. Мы съ вами умѣемъ прибавлять по одному. Какъ же прибавить намъ четыре кубика къ пяти кубикамъ?

— По одному кубику.

Ученикъ, вызванный къ доскѣ, отодвигая справа налѣво по одному кубику, говоритъ: къ пяти кубикамъ прибавить одинъ кубикъ — будетъ шесть кубиковъ; шесть кубиковъ да одинъ кубикъ — семь кубиковъ; къ семи кубикамъ прибавить одинъ кубикъ — будетъ восемь кубиковъ; восемь кубиковъ да одинъ — будетъ девять кубиковъ.

— Сколько кубиковъ было налѣво? Сколько направо? Что сдѣлали мы съ этими кубиками?

— Къ пяти кубикамъ прибавили четыре кубика

— Какъ прибавили мы четыре кубика къ пяти кубикамъ: сразу или нѣтъ?

— Не сразу, по одному кубику.

Это упражненіе имѣетъ цѣлью выяснить пріемъ сложенія, который потомъ и примѣняется къ составленію первой части таблицы сложенія.

На планку доски ставятся напр. десять кубиковъ.

— Сколько кубиковъ поставлено на планку? Я хочу отнять отсюда четыре кубика и узнать, сколько кубиковъ останется. Какъ это сдѣлать?

— Отсчитывать по одному кубику.

Если бы такого отвѣта не послѣдовало, на него можно было бы навести, спросивши: а какъ мы прибавляли четыре кубика?

Ученикъ, вызванный къ доскѣ, вслухъ выполняетъ отсчитываніе, отодвигая направо по одному кубику: отъ десяти кубиковъ отнять одинъ кубикъ — останется девять кубиковъ, отъ девяти кубиковъ отнять одинъ кубикъ — останется восемь кубиковъ и т. д. При этомъ надо обращать вниманіе учениковъ на отсчитанные (отодвинутые) кубики. Сколько кубиковъ мы отсчитали? Два. А сколько нужно отсчитать? Четыре. Кончили мы отсчитываніе? Нѣтъ. Продолжай.

— Какъ же отняли мы четыре кубика отъ десяти кубиковъ?

— По одному кубику.

Это упражненіе служитъ для выясненія пріема вычитанія, который затѣмъ примѣняется къ составленію первой части таблицы вычитанія.

Составленіе обѣихъ таблицъ хорошо вести, какъ мы уже говорили, параллельно, т.-е. чередуя сложеніе съ вычитаніемъ, и въ опредѣленномъ порядкѣ, начиная съ присчитыванія и отсчитыванія наименьшихъ группъ, при чемъ слѣдуетъ перебрать всѣ относящіеся сюда случаи, такъ какъ настоящія упражненія имѣютъ цѣлію не только усвоеніе учениками указанныхъ пріемовъ сложенія и вычитанія, но и запоминаніе результатовъ; имѣя въ виду послѣднее, учитель требуетъ, чтобы дѣти, называя получаемое число, непремѣнно говорили и данныя, т.-е. давали бы *полный* отвѣтъ; такъ, на вопросъ: къ пяти прибавить три — сколько будетъ? дѣти должны отвѣчать: къ пяти прибавить

три — будетъ восемь; такіе полные отвѣты, помимо развитія рѣчи, содѣйствуютъ усвоенію на память добываемыхъ результатовъ.

Намъ кажется удобнымъ начинать каждое упражненіе съ задачи, которая и поведетъ къ требованію: одно число прибавить къ другому или отнять отъ другого. Это присчитываніе или отсчитываніе выполняется затѣмъ на наглядныхъ пособіяхъ, а иногда и безъ нихъ; въ тѣхъ же случаяхъ, когда результаты окажутся извѣстными всѣмъ дѣтямъ (въ чемъ, конечно, учитель долженъ убѣдиться), можно и не добывать этихъ результатовъ указанными выше пріемами.

Первая часть таблицы сложенія и вычитанія въ предѣлѣ десяти исчерпывается задачами №№ 39—70 нашего сборника (задачи 37-я и 38-я помѣщены только потому, что содержатъ простѣйшій случай присчитыванія и отсчитыванія двухъ).

Приведемъ примѣръ проработки этихъ задачъ

— Въ комнатѣ два окна по одной стѣнѣ, да два окна по другой. Сколько оконъ въ комнатѣ?

Получится отвѣтъ или нѣтъ, вѣрный или невѣрный, надо спросить:

— А какъ это узнать?

— Надо къ двумъ прибавить два.

Если бы дѣти не дали этого отвѣта, на него можно было бы навести ихъ такъ, какъ это было показано раньше (§ 2).

— Къ двумъ прибавить два — сколько будетъ?

Если не всѣ дѣти вѣрно отвѣтятъ на этотъ вопросъ, слѣдуетъ добыть результатъ на наглядныхъ пособіяхъ, какъ это изложено выше.

— Сколько же всѣхъ оконъ въ комнатѣ?

— Въ комнатѣ четыре окна.

Подобнымъ же образомъ рѣшается задача на вычитаніе.

При добываніи результатовъ сложенія и вычитанія желательно примѣненіе различныхъ наглядныхъ пособій: помимо того, что это придаетъ разнообразіе и оживленіе уроку, употребленіе различныхъ наглядныхъ пособій содѣйствуетъ образованію понятія о числѣ отвлеченномъ: видя, что пять кубиковъ и два кубика составляютъ семь кубиковъ, пять шариковъ и два шарика даютъ семь шариковъ, пять крестиковъ и два крестика — семь крестиковъ, дѣти сознаютъ, что пять какихъ бы то ни было предметовъ и два такихъ же предмета составляютъ семь такихъ же предметовъ, что вообще пять и два будетъ семь. Весьма хорошее пособіе представляютъ здѣсь палочки, которыя должны быть у каждаго ученика, по десяти штукъ.

— Выньте ваши палочки и положите ихъ передъ собою на верхъ стола. Возьмите изъ нихъ пять палочекъ и положите ихъ налѣво. Возьмите еще три палочки и положите ихъ направо. Теперь три палочки, что̀ направо, прибавьте къ тѣмъ пяти палочкамъ, что̀ налѣво. Какъ станете прибавлять? — По одной палочкѣ. — Прибавляйте вы про себя, а ты прибавляй вслухъ. Къ пяти прибавить три — сколько будетъ? Теперь сложите палочки на мѣсто (на верхъ стола). Возьмите девять палочекъ и положите ихъ передъ собою. Отъ девяти палочекъ отнимите четыре палочки. Какъ станете отнимать? — По одной палочкѣ. — Отнимайте вы про себя (отодвигая по палочкѣ направо), а ты

отнимай вслухъ. Отъ девяти отнять четыре — сколько останется? Сложите палочки на мѣсто. — Такія упражненія съ палочками пріучатъ дѣтей пользоваться этими пособіями во время самостоятельныхъ занятій, когда ученики уже безъ помощи учителя будутъ дѣлать сложеніе и вычитаніе; палочки въ этомъ случаѣ очень удобны, какъ пособіе, которое весьма легко достать: каждый ученикъ самъ для себя можетъ заготовить по десяти палочекъ и принести ихъ въ школу. Для той же цѣли могутъ служить и пальцы.

Какъ мы уже говорили, иногда слѣдуетъ заставлять дѣтей выполнять присчитываніе и отсчитываніе и безъ наглядныхъ пособій такъ, какъ это объяснено въ началѣ настоящаго §. Чтобы не вводить слова «единица», можно пользоваться вторымъ изъ указанныхъ пріемовъ, отсчитывая по одному отъ того числа, которое надо прибавить или отнять.

Всѣ разсматриваемые случаи сложенія и вычитанія подлежатъ запоминанію, на что учитель обращаетъ вниманіе дѣтей, поощряя похвалой тѣхъ учениковъ, которые помнятъ многіе изъ такихъ результатовъ. — Къ шести прибавить три — сколько будетъ? Вотъ онъ знаетъ; это хорошо. И всѣ вы, дѣти, потомъ должны будете знать это на память. А пока не знаете, давайте прибавлять по одному.

Въ задачахъ №№ 37—70-й нашего сборника (а равно и въ задачахъ №№ 1—36-й) сложеніе примѣняется къ тѣмъ случаямъ, когда надо узнать, сколько всего, но не увеличить одно число на другое; вычитаніе — когда надо узнать, сколько останется; здѣсь нѣтъ такихъ случаевъ, когда вычитаніемъ мы уменьшаемъ одно число на другое и отыскиваемъ разность между двумя числами (часть I, глава VIII, § 34). Всѣ эти задачи — съ числами предметными, какъ дающіяся дѣтямъ на первыхъ порахъ легче, чѣмъ задачи съ именованными числами (часть I, §§ 3 и 4).

Скажемъ еще нѣсколько словъ о вопросахъ, поставленныхъ въ косвенной формѣ (часть I, глава VII, § 34).

— На стѣнѣ висѣло двѣ картины; когда туда повѣсили еще нѣсколько картинъ, то всѣхъ картинъ на стѣнѣ стало пять. Сколько картинъ повѣсили на стѣну?

Назвавши вѣрно искомое, дѣти на вопросъ: какъ это узнать? могутъ отвѣтить: къ двумъ прибавить три; и ученики будутъ правы: они могли рѣшить задачу, помня, что два да три пять, или прибавляя къ двумъ по одному, пока не получится пять. На это дѣйствіе наводитъ самое условіе задачи.

Если учитель не желаетъ, чтобы дѣти въ подобныхъ задачахъ видѣли задачи на сложеніе, то мы совѣтовали бы избѣгать такихъ задачъ въ предѣлѣ перваго десятка. То же самое относится и къ другимъ задачамъ, условія которыхъ подчеркиваютъ не то дѣйствіе, какимъ задача рѣшается. Эти задачи можно вводить тогда, когда ученики, перейдя къ сравнительно большимъ числамъ, легко сообразятъ, какое именно дѣйствіе надо выполнить для рѣшенія вопроса.

4. Ознакомленіе съ цифрами. Хотя всѣ вычисленія въ предѣлѣ перваго десятка выполняются устно или на

наглядныхъ пособіяхъ, однако съ цифрами и знаками дѣйствій слѣдуетъ познакомить учениковъ раньше, чѣмъ будутъ пройдены всѣ упражненія въ предѣлѣ десяти, съ тою цѣлію, чтобы имѣть надлежащій матеріалъ для самостоятельныхъ работъ; въ противномъ случаѣ учителю пришлось бы или долгое время заниматься съ одною младшею группою, или же давать ученикамъ этой группы такія работы, которыя не имѣютъ прямого отношенія къ ариѳметикѣ, какъ напр. черченіе т. н. числовыхъ фигуръ [1]). Кромѣ того, записывая производимыя (устно) вычисленія, дѣти будутъ давать себѣ болѣе ясный отчетъ въ томъ, какое или какія дѣйствія надо выполнить для рѣшенія предложеннаго вопроса.

Мы считаемъ болѣе удобнымъ показать дѣтямъ предварительно римскія цифры: 1) эти цифры проще арабскихъ, а потому научить дѣтей писать ихъ можно скорѣе, чѣмъ арабскія, вслѣдствіе чего раньше является возможность ввести письменныя упражненія для самостоятельныхъ занятій; 2) римскія цифры нагляднѣе показываютъ ту группу единицъ, изъ которыхъ состоитъ число; 3) римскія цифры подготовляютъ къ арабскимъ: при знакомствѣ съ римскими цифрами дѣти понимаютъ неудобство обозначать черточками большія числа и цѣлесообразность обозначенія чиселъ особыми знаками. Намъ кажется, что съ римскими цифрами, знаками +, — и = удобно познакомить дѣтей именно здѣсь, послѣ прохожденія первой части таблицъ сложенія и вычитанія. Послѣдующія затѣмъ самостоятельныя упражненія въ сложеніи и вычитаніи, относящіяся къ пройденному, закрѣпятъ въ памяти учениковъ первыя части названныхъ таблицъ и подготовятъ дѣтей къ дальнѣйшему сложенію и вычитанію въ предѣлѣ десятка.

Приведемъ примѣрный урокъ по ознакомленію съ римскими цифрами.

Сначала учитель разъясняетъ дѣтямъ, что числа можно не только называть, сказывать, но и показывать, а слѣд. и писать. Затѣмъ знакомитъ ихъ со знаками I, II, III, IIII и упражняетъ дѣтей въ письмѣ ихъ. Послѣ этого переходитъ къ обозначеніямъ V, VI, VII, VIII, VIIII, X: показываетъ дѣтямъ эти знаки и заставляетъ учениковъ писать ихъ.

---

[1]) Черченіе письменныхъ знаковъ, напр. кружковъ, крестиковъ, разставляемыхъ подобно тому, какъ расположены очки игральныхъ картъ.

— Слушайте, дѣти, и смотрите. На крышѣ сидѣло столько голубей, сколько кубиковъ поставилъ я на планку доски. Сколько голубей сидѣло на крышѣ?

— Пять голубей

— *Сказалъ* я вамъ, сколько голубей сидѣло на крышѣ, или *показалъ?*

— Показали.

— Да, я вамъ *показалъ* это, показалъ на кубикахъ. На чемъ же показалъ я вамъ это? Скоро изъ этихъ голубей улетѣло столько, сколько я положилъ шариковъ. Сколько голубей улетѣло?

— Два голубя.

— На чемъ показалъ я вамъ это?

— На шарикахъ.

— Теперь вы покажите мнѣ на пальцахъ: сколько голубей осталось на крышѣ. Вотъ, вы видите, что числа можно показывать. На чемъ же мы показывали числа?

— На кубикахъ, на шарикахъ, на пальцахъ.

— У ямщика было столько лошадей, сколько крестиковъ поставилъ я на доскѣ. Сколько лошадей было у ямщика?

— Шесть лошадей.

— На чемъ я вамъ показалъ это?

— На крестикахъ.

— Гдѣ поставилъ я крестики? Что дѣлаютъ на доскѣ? Значитъ, числа можно писать. Сдѣлаемъ уговоръ: будемъ писать числа черточками. Я сейчасъ напишу вамъ, сколько сыновей было у крестьянина, а вы прочитайте. (Пишетъ I). Сколько же сыновей было у этого крестьянина? А дочерей у него было вотъ сколько. (Пишетъ II). Сколько было у него дочерей? Прочитайте, сколько лѣтъ было его сыну: IIII. Старшей дочери было вотъ сколько лѣтъ: III. Сколько? А младшей II. Сколько лѣтъ было младшей дочери?

— Достаньте доски и грифеля (или тетради и карандаши). Запишите, сколько кубиковъ держу я въ рукѣ (показываетъ кубикъ). Напишите (внизу), сколько глазъ у человѣка. Напишите, сколько ногъ у лошади. Запишите, сколько шариковъ положилъ я (кладетъ три шарика).

Учитель пишетъ II.

— Прочитайте, какое число написалъ я? (Пишетъ IIII). А теперь какое? Какое число труднѣе прочитать: два или пять? Почему?

— Много черточекъ, надо считать.

— Да, большія числа писать черточками неудобно: и писать долго, и читать долго: сразу не прочитаешь, надо считать черточки. Поэтому число пять пишутъ особеннымъ знакомъ, вотъ такъ V. Напиши пять на классной доскѣ (нѣсколько учениковъ по очереди). Напишите пять на своихъ доскахъ.

— Вотъ у меня въ коробочкѣ перья, и я напишу вамъ, сколько ихъ. (Пишетъ VIII). Сколько же перьевъ у меня въ коробочкѣ?

Многіе ученики догадываются и говорятъ: восемь.

— Посмотримъ. (Заставляетъ ученика пересчитать перья.) Да, вѣрно. Какъ вы смекнули, что я написалъ число восемь?

— Пять и еще три.

— Въ огородѣ было засажено капустою вотъ сколько грядъ: VI. Сколько грядъ было засажено капустою? Какъ смекнули вы, что я написалъ число шесть? Прочитайте, какое число написалъ я? (Пишетъ VII). Почему вы думаете, что это семь? Въ старшемъ отдѣленіи школы было вотъ сколько учениковъ: VIIII. Сколько? Какъ догадались вы, что я написалъ число девять?

— Въ саду было шесть кустовъ красной смородины и два куста черной. Сколько было въ саду всѣхъ кустовъ смородины? Вы этого мнѣ не говорите, а запишите на своихъ доскахъ.

Ученики пишутъ VIII.

— У хозяина было десять поросятъ; одного онъ зарѣзалъ къ празднику. Сколько поросятъ осталось у хозяина? Запишите это. Да потомъ двухъ поросятъ продалъ. Сколько поросятъ теперь у хозяина? Запишите это. Мальчикъ купилъ тетрадь за четыре копейки и карандашъ за двѣ копейки. Сколько всего заплатилъ онъ? Запишите это.

Для ознакомленія учениковъ съ цифрой X учитель напередъ изготовляетъ на картонѣ двѣ цифры V въ размѣрѣ подвижныхъ буквъ: для этого можно взять картонъ, длина котораго вдвое больше требуемой, нарисовать на немъ цифру X и разрѣзать картонъ пополамъ; тогда получатся цифры V и V.

— Сколько пальцевъ на одной рукѣ? На другой? На обѣихъ вмѣстѣ? Это какое число? (показываетъ цифру V, нарисованную на картонѣ). А это? (показываетъ другую такую цифру). Кто догадается, какое это будетъ число? (складываетъ цифры такъ, чтобы вышелъ знакъ X).

— Десять.

— На что похожъ этотъ знакъ?

— На крестикъ.

— Напишите у себя на доскахъ число десять.

Примѣчаніе 1. Раньше ознакомленія съ римскими цифрами слѣдуетъ поупражнять дѣтей въ письмѣ элементовъ этихъ цифръ, т.-е. черточекъ трехъ видовъ: прямой | и двухъ наклонныхъ \ / .

Примѣчаніе 2. Показавъ дѣтямъ римскія цифры, учитель долженъ удѣлить, по крайней мѣрѣ, еще одинъ урокъ упражненіямъ въ письмѣ этихъ цифръ, прежде чѣмъ знакомить учениковъ съ знаками +, — и =. Упражненія эти могутъ быть соединены съ рѣшеніемъ задачъ, отвѣты на которыя и записываются учениками. Для этой цѣли могутъ быть повторены нѣкоторыя изъ задачъ №№ 37—70 нашего сборника.

5. Знаки „прибавить“, „отнять“ и знакъ равенства.

— Передъ домомъ растетъ вотъ сколько березокъ (пишетъ III) и вотъ сколько липокъ (пишетъ II направо отъ III, немного отступя). Сколько деревьевъ растетъ передъ домомъ? Какъ это узнать?

— Къ тремъ прибавить два — будетъ пять.

— Что̀ написано на доскѣ? Да, тутъ написано число три, а потомъ число два. Что намъ надо было сдѣлать съ этими числами? Написано ли на доскѣ, что надо *прибавить* два къ тремъ? Смотрите: когда надо при-

бавить, то ставятъ между числами знакъ +, прямой крестикъ: III+II. Это надо читать такъ: къ тремъ прибавить два.

Слѣдуютъ упражненія. Учитель пишетъ на классной доскѣ II+I, IIII+III, V+IIII и т. п., а дѣти читаютъ. Не ограничиваясь чтеніемъ примѣровъ учениками съ мѣста, учитель вызываетъ ученика къ доскѣ и велитъ ему читать примѣръ, указывая на то, что онъ читаетъ: къ пяти (указывается V) прибавить (ученикъ показываетъ на +) четыре (указывается IIII). Весьма полезно заставлять дѣтей читать примѣры хоромъ, при чемъ дѣти произносятъ написанныя числа и знакъ дѣйствія по мѣрѣ того, какъ учитель указываетъ на эти числа и знакъ. Затѣмъ учитель диктуетъ примѣры на сложеніе (къ четыремъ прибавить три и т. п.), а дѣти пишутъ на своихъ доскахъ (или въ тетрадяхъ); для повѣрки одинъ изъ учениковъ записываетъ потомъ примѣръ на классной доскѣ.

Подобнымъ же образомъ можно показать дѣтямъ и знакъ вычитанія.

— У дѣвочки было вотъ сколько яблоковъ (III); изъ нихъ она съѣла вотъ сколько (II). Сколько яблоковъ осталось у дѣвочки? Какъ это узнать?

— Отъ трехъ отнять два — останется одинъ.

— Что написано на доскѣ? Да, тутъ написано число три, а потомъ число два.

— Что намъ надо было сдѣлать съ этими числами?

— Отъ трехъ отнять два.

— Написано ли на доскѣ, что надо *отнять* отъ трехъ два? Смотрите: когда надо отнять, то ставятъ между числами знакъ —, лежачую черточку: III — II. Это надо читать такъ: отъ трехъ отнять два.

Слѣдуютъ упражненія, подобныя тѣмъ, которыя приведены для усвоенія знака сложенія.

Учитель пишетъ IIII + I. Читайте.

— Къ четыремъ прибавить одинъ.

— Къ четыремъ прибавить одинъ — сколько будетъ? Запишемъ V вотъ здѣсь (пишетъ направо, немного отступя: IIII + I V). Прочтите теперь все, что написано на доскѣ.

— Къ четыремъ прибавить одинъ — будетъ пять.

— Прочитаемъ еще разъ и будемъ показывать на то, что читаемъ. Къ четыремъ (указывается IIII) прибавить (указывается +) одинъ (указывается I) — пять (указывается V). А гдѣ же слово «будетъ»?

— Его нѣтъ.

— Смотрите: слово «будетъ» пишется вотъ такъ =, двѣ лежачія черточки: IIII + I = V.

Написанная строка читается дѣтьми хоромъ по мѣрѣ того, какъ учитель указываетъ на числа и знаки; затѣмъ ее читаютъ нѣсколько учениковъ по очереди, сами указывая на то, что читаютъ.

Слѣдуютъ упражненія въ родѣ такихъ.

Учитель пишетъ III + III.

— Читайте.

— Къ тремъ прибавить три.

— Къ тремъ прибавить три — сколько будетъ?

— Къ тремъ прибавить три — будетъ шесть.

— Какъ написать слово «будетъ»? Гдѣ это написать? Покажи. Что написать потомъ?

Написанную строку дѣти читаютъ хоромъ и отдѣльно, какъ показано выше. Такихъ примѣровъ нѣсколько. Знакъ равенства учитель иногда заставляетъ дѣтей читать словомъ «получится».

— Напишите на своихъ доскахъ: къ пяти прибавить пять. (Одинъ ученикъ, для провѣрки, пишетъ потомъ на классной доскѣ V + V.) Къ пяти прибавить пять — сколько будетъ? Что же вы теперь напишете?

— Знакъ «будетъ».

— Напишите. А послѣ этого знака что запишете? Запишите. Прочитайте.

Такихъ примѣровъ нѣсколько. На ряду съ примѣрами могутъ быть даваемы и задачи.

— У крестьянина четыре сына и три дочери. Сколько дѣтей у этого крестьянина? Какъ это узнать?

— Къ четыремъ прибавить три.

— Запишите это.

Далѣе попрежнему.

Учитель пишетъ VII — III.

— Читайте. Отъ семи отнять три — сколько останется? (Записываетъ IIII направо, немного отступя). Слушайте, дѣти: слово «останется» пишется такъ же, какъ и слово «будетъ», «получится». Какъ же написать намъ слово «останется»? Гдѣ написать его? Покажи.

Является запись VII — III = IIII, которую ученики читаютъ хоромъ и отдѣльно. Затѣмъ идутъ упражненія, подобныя приведеннымъ выше. Знакъ равенства и здѣсь читается иногда словами «будетъ», «получится».

Ознакомленіе со знаками сложенія и вычитанія и со знакомъ равенства займетъ, по крайней мѣрѣ, два урока, изъ которыхъ на первомъ можно показать дѣтямъ не болѣе двухъ знаковъ (+ и — или + и =), а на другомъ — третій знакъ.

6. Самостоятельныя упражненія въ сложеніи и вычитаніи. Переходъ отъ римскихъ цифръ къ арабскимъ.

Познакомившись со знаками «прибавить», «отнять» и со знакомъ равенства, ученики самостоятельно упражняются въ сложеніи и вычитаніи. Матеріаломъ для этихъ самостоятельныхъ работъ могутъ служить примѣры №№ 1—6 нашего сборника.

Само собою разумѣется, что самостоятельныя работы, особенно на первыхъ порахъ, должны быть обстоятельно разъяснены дѣтямъ и требуютъ наблюденія за ихъ испол-

неніемъ. Задавая указанную работу, учитель долженъ продѣлать съ учениками, по крайней мѣрѣ, два примѣра (одинъ на сложеніе, другой на вычитаніе) и оставить дѣтей не раньше, чѣмъ убѣдится, что они поняли, какъ эту работу надо исполнить.

— Читайте первую строчку. Спишите ее на свои доски (въ тетради). Къ тремъ прибавить два — сколько будетъ? Если бъ кто не зналъ или забылъ, сколько будетъ три да два, то какъ сталъ бы прибавлять два къ тремъ? Учитель заставляетъ дѣтей выполнить сложеніе на палочкахъ, какъ показано въ § 3, или на пальцахъ. Гдѣ же надо написать V?

III+II=V	
X—II=VIII	

Напишите.

Подобнымъ же образомъ продѣлывается примѣръ на вычитаніе.

Доски (тетради) должны быть напередъ разлиневаны такъ чтобы письмо происходило по двумъ линейкамъ.

Во время самостоятельныхъ упражненій въ сложеніи и вычитаніи можно сдѣлать и переходъ отъ римскихъ цифръ къ арабскимъ, вводя послѣднія постепенно, напр. по двѣ на урокѣ. При этомъ для начала лучше взять такія цифры, которыя легче писать: 1 и 4, какъ состоящія изъ прямолинейныхъ элементовъ; потомъ 7 и 6; 3 и 9; 8 и 5; 2 и 10. Указывая дѣтямъ обозначеніе 10, учитель можетъ сказать, что десять пишется цифрой 1 и кружкомъ, который называется нулемъ; но при этомъ не должно входить ни въ какія разъясненія о значеніи нуля, о первомъ и второмъ мѣстѣ.

Изложимъ для примѣра ходъ занятій по ознакомленію съ цифрами 1 и 4.

Учитель даетъ ученикамъ младшей группы самостоятельную работу, разсчитывая ее приблизительно на полчаса. Для этой работы могутъ служить примѣры №№ 7—9 нашего сборника или только нѣкоторые изъ нихъ, смотря по тому, насколько быстро дѣти справляются съ подобными примѣрами. Провѣривъ работу, учитель говоритъ: будемъ теперь писать числа по-другому, по-новому; смотрите, какъ пишется одинъ: 1. Слѣдуютъ упражненія: дѣти (по вызову) пишутъ 1 на классной доскѣ, а потомъ на своихъ доскахъ или въ тетрадяхъ (это можетъ быть сдѣлано на оборотной сторонѣ доски или страницы, по двумъ линейкамъ). Затѣмъ учитель велитъ дѣтямъ въ сдѣланной ими работѣ стереть (въ случаѣ тетрадей — резиной) знакъ I вездѣ, гдѣ онъ встрѣ-

чается въ отдѣльности, и написать вмѣсто него 1. Послѣ этого ученикамъ показывается цифра 4, которая потомъ и вносится въ сдѣланные ими примѣры на мѣсто прежняго обозначенія IIII.

Подобнымъ же образомъ можно ввести и прочія цифры. Для этой цѣли назначены примѣры №№ 10—12, 13—15, 16—18, 19—21 нашего сборника.

Замѣтимъ, что примѣры №№ 1—21 содержатъ только тѣ случаи сложенія и вычитанія, которые относятся къ первой части таблицъ этихъ дѣйствій (§ 3).

7. Присчитываніе и отсчитываніе нѣсколькихъ единицъ (продолженіе).

Предшествующихъ упражненій въ сложеніи и вычитаніи (задачи №№ 37—70, примѣры №№ 1—21), полагаемъ, достаточно для того, чтобы дѣти усвоили первую часть таблицъ этихъ дѣйствій въ предѣлѣ десяти, т.-е. могли бы сразу, на память, прибавить меньшее число къ большему (7+3) и равное къ равному (4+4) и сдѣлать соотвѣтствующія вычитанія (10—3: вычитаемое меньше остатка; 8—4: вычитаемое равно остатку). Къ дальнѣйшему сложенію и вычитанію въ предѣлѣ десяти удобно примѣнимъ второй изъ указанныхъ въ § 3 пріемовъ: разложеніе придаваемаго и отнимаемаго числа не на единицы, а на иныя группы, такія, которыя дѣти уже могутъ прибавить и отнять на память (4+6=4+4+2=8+2=10; 10—7=10—4—3=6—3=3). Этотъ пріемъ долженъ быть показанъ дѣтямъ, такъ какъ вмѣстѣ съ нимъ уясняется и то свойство сложенія и вычитанія (возможность прибавленія и вычитанія по частямъ), на которомъ основываются правила этихъ дѣйствій (часть I, глава II, § 10; глава III, § 14). Здѣсь же можно указать ученикамъ и на неизмѣняемость суммы при перестановкѣ слагаемыхъ, — свойство, которое дѣти, можетъ-быть, уже подмѣтили сами. Для добыванія результатовъ вычитанія ученики могутъ пользоваться и таблицей сложенія: для того чтобы узнать, сколько останется, когда отъ 8-ми отнимемъ 5, припомнимъ: къ какому числу надо прибавить 5 или какое число надо прибавить къ 5-ти, для того чтобы получить 8. Этотъ пріемъ послужитъ къ уясненію связи между вычитаніемъ и сложеніемъ.

Матеріаломъ для настоящихъ упражненій могутъ служить задачи №№ 71—108 нашего сборника; примѣры №№ 24—44, въ которыхъ встрѣчаются и ранѣе пройденные случаи

сложенія и вычитанія, назначены для самостоятельныхъ работъ.

Задачи №№ 71—108, кромѣ предметныхъ чиселъ, содержатъ и простыя именованныя. Какъ и раньше, въ этихъ задачахъ нѣтъ тѣхъ случаевъ примѣненія дѣйствій, когда сложеніемъ надо увеличить, вычитаніемъ — уменьшить одно число на другое и узнать, на сколько одно число больше или меньше другого. Такіе случаи примѣненія сложенія и вычитанія могутъ имѣть мѣсто только послѣ ознакомленія учениковъ съ разностнымъ сравненіемъ чиселъ.

Приведемъ примѣры относящихся сюда работъ.

— На берегу пруда сидятъ 2 утки, да 6 утокъ плаваютъ въ пруду. Сколько здѣсь всѣхъ утокъ? Какъ это узнать?

Дѣлается запись 2+6 или всѣми учениками на грифельныхъ доскахъ (въ тетрадяхъ), или однимъ на классной доскѣ. Такія записи 1) избавляютъ дѣтей отъ излишняго труда держать въ памяти данныя числа, когда послѣднія не обозначены на наглядныхъ пособіяхъ, а въ нихъ здѣсь особенной нужды нѣтъ; 2) помогаютъ запечатлѣнію того дѣйствія, которымъ задача рѣшается, связываютъ задачу съ ариѳметическимъ дѣйствіемъ.

— Къ 2-мъ прибавить 6 — сколько будетъ? Если мы этого не знаемъ, то какъ станемъ прибавлять? По одному долго, какъ скорѣе?

— По два.

— Къ 2-мъ прибавить 2 — сколько будетъ? Сколько еще осталось прибавить? Къ чему надо прибавить 4? Надо ли и 4 прибавлять по два? Не прибавите ли вы 4 къ 4-мъ сразу? Сколько будетъ? Къ 2-мъ прибавить 6 — сколько будетъ? Запишите. (2 + 6 = 8). Сколько всѣхъ утокъ на берегу и на водѣ? Какъ прибавили мы 6 къ 2-мъ? Какъ разложили мы 6?

Подобнымъ же образомъ рѣшаются задачи на вычитаніе.

На планку доски ставится налѣво, напр., 6 кубиковъ, направо 3.

— Сколько кубиковъ налѣво? Сколько направо? Если 3 кубика, что̀ направо, прибавить къ 6-ти кубикамъ, что̀ налѣво, то сколько будетъ кубиковъ? (3 кубика подвигаются къ 6-ти кубикамъ). Поди, запиши это.

Ученикъ пишетъ 6 + 3 = 9. Затѣмъ кубики разставляются попрежнему.

— А если 6 кубиковъ, что̀ налѣво, прибавить къ 3-мъ кубикамъ, что̀ направо, тогда сколько получится? (6 кубиковъ придвигаются къ 3-мъ кубикамъ).

— Тоже 9 кубиковъ.

— Поди, запиши это.

— Ученикъ пишетъ 3 + 6 = 9.

Написавши 8 + 2, учитель говоритъ:

— Читайте. Сколько будетъ? (Записываетъ; потомъ пишетъ 2 + 8.) Читайте. Сколько будетъ? (Записываетъ). Какъ вы это сообразили?

— Къ 8-ми прибавить 2 — будетъ 10, и къ 2-мъ прибавить 8 — будетъ тоже 10.

— Хозяинъ купилъ себѣ шапку и сапоги; за шапку заплатилъ онъ 2 рубля, а за сапоги 5 рублей. Сколько денегъ пошло на всю покупку? Какъ это узнать? Запишите. (2 + 5 = 7). Какъ прибавляли вы 5 къ 2-мъ?

— Мы прибавили 2 къ 5-ти: будетъ столько же.

— А какъ прибавили вы 2 къ 5-ти?

— Сразу, на память.

— У мальчика было 9 копеекъ; изъ нихъ 6 копеекъ онъ потерялъ. Какъ узнать, сколько денегъ у него осталось? Запишите это. (9—6) А если бы потерянныя деньги онъ нашелъ и *прибавилъ* бы къ нимъ тѣ, что̀ остались, сколько тогда у него стало бы денегъ? Подумайте: сколько надо прибавить къ 6-ти, чтобы получалось 9? Сколько же денегъ у него осталось? Отъ 9-ти отнять 6 — сколько останется? Какъ мы это сообразили?

— Къ 6-ти надо прибавить 3, чтобы получилось 9

Примѣчаніе. Если бы пріемъ этотъ оказался труденъ для учениковъ и повелъ бы къ тому, что дѣти перестали бы ясно различать, какимъ дѣйствіемъ рѣшается предложенная задача (вычитаніемъ или сложеніемъ), то его можно отложить до изученія таблицы вычитанія въ предѣлѣ 20-ти.

8. Бѣглый счетъ на сложеніе и вычитаніе. Всѣ результаты сложенія и вычитанія въ предѣлѣ перваго десятка ученики должны твердо знать на память. Это достигается отчасти посредствомъ упражненій на урокахъ съ учителемъ, отчасти во время самостоятельныхъ занятій.

Иногда думаютъ: не надо смущаться тѣмъ, что дѣти на первыхъ порахъ вычисляютъ не бойко, что это придетъ со временемъ, при изученіи дальнѣйшихъ отдѣловъ курса. Мы держимся другого взгляда: не слѣдуетъ итти дальше, пока дѣти не научились бойко вычислять въ томъ предѣлѣ, въ какомъ до сихъ поръ производились всѣ вычисленія; не слѣдуетъ итти дальше, пока дѣти не станутъ вполнѣ свободно и быстро складывать и вычитать въ предѣлѣ десяти.

Для повѣрки усвоенія памятью результатовъ дѣйствій и для развитія быстроты въ вычисленіяхъ служатъ упражненія, называемыя *бѣглымъ счетомъ*. Это — примѣры и задачи (№№ 109—131 нашего сборника), которые рѣшаются учениками по мѣрѣ чтенія ихъ учителемъ

Подготовительнымъ упражненіемъ можетъ служить рядъ отдѣльныхъ сложеній и вычитаній, связанныхъ между собою тѣмъ, что каждое новое дѣйствіе производится надъ результатомъ предыдущаго дѣйствія. Такъ, примѣръ № 109-й можетъ быть продѣланъ слѣдующимъ образомъ. Къ 2-мъ прибавить 6 — сколько будетъ? — Къ 2-мъ прибавить 6 — будетъ 8. — Къ 8-ми прибавить 1 — сколько получится? — Къ 8-ми прибавить 1 — получится 9. — Отъ 9-ти отнять 5 — сколько останется? и т. д.

При рѣшеніи дальнѣйшихъ примѣровъ дѣти не говорятъ результатъ каждаго отдѣльнаго дѣйствія, а держатъ его въ умѣ: спрашивается только окончательный отвѣтъ. — Отъ 5-ти отнимите 3. (Примѣръ № 110). То, что получили, держите про себя. Прибавьте сюда 8. Отъ того, что̀ получили, отнимите 4. Отсюда отнимите еще 4. Къ тому, что̀ осталось, прибавьте 7. Сколько теперь получилось? — 9.

Затѣмъ выраженія «къ тому, что̀ получили», «отъ того, что̀ получили» опускаются и замѣняются паузами, дающими дѣтямъ время сообразить результатъ. — Къ 3-мъ прибавьте 6. (Пауза). Отнимите 4. (Пауза). Прибавьте 5. (Пауза). Отнимите 8. (Пауза). Прибавьте 5. (Пауза). Сколько вышло? (Примѣръ № 112). Съ теченіемъ времени паузы могутъ становиться все короче и короче.

Бѣглый счетъ на задачахъ (№№ 121—131) представляетъ собою цѣпь простыхъ задачъ (т.-е. задачъ на одно дѣйствіе), связанныхъ между собою тѣмъ, что искомое (отвѣтъ) каждой задачи является однимъ изъ данныхъ слѣдующей задачи. Мы считаемъ нужнымъ на первыхъ порахъ ставить вопросъ каждой простой задачи; только отвѣтъ на этотъ вопросъ дѣти должны держать про себя. — Передъ домомъ стояла скамейка; на ней сидѣли три дѣвочки; потомъ къ нимъ сѣли еще 2 дѣвочки. Сколько дѣвочекъ сидитъ теперь на скамейкѣ? Вы мнѣ этого не говорите, а держите про себя. Скоро 4 дѣвочки ушли. Сколько дѣвочекъ осталось на скамейкѣ? (Про себя). А вмѣсто нихъ сѣло 6 мальчиковъ. Сколько ребятъ сидитъ теперь на скамейкѣ? (Задача № 121). — Впослѣдствіи можно предоставить самимъ дѣтямъ догадываться объ этихъ промежуточныхъ вопросахъ.

Для упражненія въ бѣгломъ счетѣ могутъ служить и примѣры №№ 45—47: дѣти читаютъ ихъ про себя съ книжки

или съ классной доски, рѣшаютъ по мѣрѣ чтенія и заявляютъ (поднятіемъ руки) о полученіи окончательнаго результата. Выждавъ, когда значительное большинство учениковъ заявило о рѣшеніи примѣра, учитель отбираетъ отвѣты.

Такъ какъ бѣглому счету предшествовало достаточное количество примѣровъ и задачъ, на которыхъ дѣти могли запомнить всѣ результаты сложенія и вычитанія въ предѣлѣ десяти, то есть основаніе ожидать, что во время упражненій въ бѣгломъ счетѣ большинство дѣтей будетъ давать вѣрные отвѣты, и потому относящихся сюда примѣровъ и задачъ не придется вновь передѣлывать. Отдѣльные отсталые ученики не должны задерживать весь классъ: съ ними учитель можетъ заняться особо. Если же будутъ получаться невѣрные отвѣты отъ многихъ учениковъ, то это укажетъ или 1) на то, что примѣръ или задача прочитаны учителемъ слишкомъ быстро; а въ этомъ отношеніи надо соблюдать постепенность; или 2) на то, что дѣти утомились, напрягая свое вниманіе въ одномъ и томъ же направленіи; а въ этомъ случаѣ слѣдуетъ перемѣнить упражненія: вмѣсто примѣра, во время рѣшенія котораго всѣ числа дѣти должны держать въ умѣ, дать примѣръ съ записью данныхъ чиселъ, или же чередовать примѣры съ задачами.

9. Задачи на сложеніе и вычитаніе. До сихъ поръ дѣти рѣшали *простыя* задачи на сложеніе и вычитаніе; на нихъ учились они выполнять эти дѣйствія, запоминали получаемые результаты и освоивались съ примѣненіемъ сложенія (узнать, сколько всего, вмѣстѣ) и вычитанія (опредѣлить, сколько останется). Послѣ изученія таблицъ сложенія и вычитанія въ предѣлѣ десятка не лишнее поупражнять дѣтей въ рѣшеніи задачъ на эти два дѣйствія вмѣстѣ и тѣмъ положить начало рѣшенію *сложныхъ* задачъ, ограничиваясь, конечно, тѣми случаями примѣненія дѣйствій, которые уже знакомы ученикамъ. Таковы задачи №№ 132—151 нашего сборника[1]).

— Двѣ дѣвочки пошли въ лѣсъ за грибами; одна нашла 10 грибовъ; изъ нихъ 6 были черные, а прочіе бѣлые; другая же дѣвочка нашла 5 бѣлыхъ грибовъ. Сколько бѣлыхъ грибовъ нашли обѣ дѣвочки вмѣстѣ?

Во время чтенія задачи числовыя данныя записываются на классной доскѣ, напр. такъ: 10, 6, 5.

---

[1]) О значеніи сложныхъ задачъ см. § 7 введенія.

Для того, чтобы убѣдиться, понята ли и усвоена ли учениками задача, учитель заставляетъ дѣтей повторить ее. На первыхъ порахъ это повтореніе можетъ быть сдѣлано дробно, по вопросамъ учителя (учитель выспрашиваетъ содержаніе задачи).

— Сколько дѣвочекъ пошло за грибами? Сколько грибовъ нашла одна дѣвочка? Сколько изъ этихъ грибовъ было черныхъ? А прочіе какіе? Сколько грибовъ нашла другая дѣвочка? Какіе были это грибы? Что спрашивается въ задачѣ?

Весьма желательно, чтобы дѣти потомъ сами повторили всю задачу цѣликомъ (одинъ-два ученика). Однако, вслѣдствіе недостаточнаго развитія рѣчи, такой пересказъ можетъ оказаться для дѣтей затруднительнымъ, и на первое время возможно ограничиться приведеннымъ выспрашиваніемъ задачи.

Приступая затѣмъ къ рѣшенію задачи, учитель самъ выбираетъ данныя, предоставляя ученикамъ поставить вопросъ.

— Сколько всѣхъ грибовъ нашла первая дѣвочка? Сколько было тутъ черныхъ? Что можно изъ этого узнать? Какъ это узнать? Запишите это.

Ученики пишутъ на своихъ доскахъ (въ тетрадяхъ) $10 - 6 = 4$, а потомъ одинъ изъ нихъ (для повѣрки) дѣлаетъ эту запись на классной доскѣ. Въ иныхъ случаяхъ — что̀ ускоряетъ дѣло — достаточно ограничиться только записями на классной доскѣ. Такъ или иначе, но сдѣланное вычисленіе полезно записать: это ведетъ къ тому, что въ сознаніи дѣтей ярче запечатлѣваются тѣ дѣйствія, которыми рѣшается задача.

— Сколько же бѣлыхъ грибовъ нашла первая дѣвочка? А сколько бѣлыхъ грибовъ нашла другая дѣвочка? Что можно изъ этого узнать? Какъ это узнать? Запишите это.

Подъ первой строкой является вторая: $4 + 5 = 9$.

— Что же мы сейчасъ узнали? А что спрашивалось въ задачѣ? Рѣшили мы задачу?

— Рѣшили.

— Сразу ли мы узнали, сколько бѣлыхъ грибовъ нашли обѣ дѣвочки вмѣстѣ? Что узнавали мы сначала? Что узнали потомъ?

Подобное повтореніе хода рѣшенія можетъ послужить подготовкою къ такому рѣшенію дальнѣйшихъ задачъ, при которомъ учитель уже не будетъ самъ выбирать данныхъ, а этотъ выборъ данныхъ и постановку вопросовъ предоставить ученикамъ, ограничивая свое участіе въ рѣшеніи задачи вопросами: что надо сначала узнать? какъ это узнать? что потомъ станете узнавать? какъ это узнать? и т. д.

Примѣчаніе. Если бы учитель не захотѣлъ долго держать дѣтей на вычисленіяхъ въ предѣлѣ перваго десятка, то сложныя задачи можно оставить до тѣхъ поръ, пока будутъ пройдены всѣ четыре дѣйствія въ этомъ предѣлѣ.

10. Увеличеніе и уменьшеніе на нѣсколько единицъ. Разностное сравненіе. До сихъ поръ мы имѣли дѣло

съ такими случаями употребленія дѣйствій, когда сложеніемъ надо узнать, сколько будетъ всего, вмѣстѣ; а вычитаніемъ — сколько останется. Мы еще не примѣняли этихъ дѣйствій къ рѣшенію тѣхъ вопросовъ, въ которыхъ требуется: сложеніемъ увеличить, вычитаніемъ уменьшить одно число на другое и найти разность между двумя числами. Сдѣлано было это потому, что на этихъ послѣднихъ случаяхъ примѣненія дѣйствій слѣдуетъ остановиться особо и разъяснить дѣтямъ относящіяся сюда выраженія, что̀ должно имѣть мѣсто не прежде, чѣмъ дѣти освоятся со сложеніемъ и вычитаніемъ въ ихъ прямомъ значеніи (узнать, сколько всего и сколько останется) и будутъ знать на память таблицы этихъ дѣйствій въ предѣлѣ перваго десятка.

Обращаемъ вниманіе учителя на то, что выраженія «больше и меньше на сколько-нибудь» не совсѣмъ обычны въ дѣтской рѣчи: въ большинствѣ случаевъ было бы ошибочно предполагать, что дѣти знаютъ эти выраженія, что они имъ вполнѣ понятны, и что можно давать задачи, въ которыя входятъ эти выраженія, не объяснивъ предварительно этихъ выраженій такъ, какъ объясняются *термины*. Выраженія «больше, меньше на сколько-нибудь» можно разъяснить, сводя ихъ къ болѣе знакомымъ дѣтямъ выраженіямъ «столько-то лишку», «столько-то не хватаетъ». Такую замѣну однихъ выраженій другими слѣдуетъ дѣлать возможно чаще, пока дѣти не освоятся съ выраженіями «больше, меньше на сколько-нибудь».

Учитель кладетъ на двухъ проволокахъ классныхъ счетовъ, напримѣръ, по 4 шарика.

— Сколько шариковъ положилъ я на верхней проволокѣ? Сколько на второй? На какой проволокѣ положено шариковъ больше?

— На обѣихъ ровно, поровну.

На верхней проволокѣ кладется еще 3 шарика.

— Сколько шариковъ положилъ я еще на верхней проволокѣ? Поровну ли теперь положено шариковъ на обѣихъ проволокахъ? На какой проволокѣ больше? Сколько *лишку* положено на верхней проволокѣ?

— Лишку 3 шарика.

— Слушайте, дѣти: вмѣсто «лишку 3 шарика», будемъ говорить «больше на 3 шарика». На верхней проволокѣ лишку 3 шарика. Скажите по другому.

— На верхней проволокѣ больше на 3 шарика

— Сколько крестиковъ написалъ я въ рядъ? (5). А внизу (во второмъ ряду) я хочу написать крестиковъ на 2 больше. Что это значитъ, какъ сказать по другому?

— Лишку 2 крестика.

— Какъ же это сдѣлать?

— Написать 5 крестиковъ и еще 2 крестика.

— Сколько кубиковъ поставилъ я на планку? (6). А теперь кто-нибудь изъ васъ пусть поставитъ на другой планкѣ на 4 кубика больше. Что это значитъ: на 4 кубика больше? Какъ же это сдѣлать?

— Въ одной комнатѣ 6 стульевъ, а въ другой на 3 стула больше. Что это значитъ: на 3 стула больше?

— Лишку 3 стула; 6 стульевъ да еще 3 стула.

— Сколько же стульевъ въ другой комнатѣ? Какъ это узнать?

— Къ 6-ти прибавить 3 — будетъ 9.

— Карандашъ стоитъ 3 копейки, а тетрадь на 2 копейки дороже. Что это значитъ: дороже на 2 копейки?

— Тетрадь стóитъ лишнихъ 2 копейки, стóитъ 3 копейки да еще 2 копейки.

— Сколько же стóитъ тетрадь? Какъ это узнать?

— Слушайте, дѣти: мы сейчасъ говорили «больше на 3 стула», «дороже на 2 копейки»; говорятъ еще и такъ: «больше 3-мя стульями», «дороже 2-мя копейками».

— У одного крестьянина 4 сына, а у другого однимъ сыномъ больше. Сколько сыновей у другого крестьянина? Какъ это узнать?

— Отъ деревни до села 5 верстъ, а городъ отъ деревни 4-мя верстами дальше, чѣмъ село. Сколько верстъ отъ деревни до города?

— Къ 6-ти прибавьте 2. Сколько будетъ? Что больше: 8 или 6? Значитъ, когда мы вмѣсто 6-ти получили 8 (изъ 6-ти сдѣлали 8), то мы *увеличили* число 6. Что же мы сдѣлали съ числомъ 6?

— Мы увеличили его.

— Сколько прибавили мы къ 6-ти? Сколько стало лишку? Какъ сказать иначе?

— Стало больше на 2.

— На сколько увеличили мы число 6?

— Мы увеличили 6 на 2.

— Какъ же увеличить 6 на 2?

— Надо къ 6-ти прибавить 2.

— Увеличьте 7 на 3. Сколько будетъ? Какъ вы это сдѣлали? Увеличьте 4 на 6; 3 на 5 и т. д.

На двухъ проволокахъ классныхъ счетовъ учитель кладетъ, напримѣръ, по 8 шариковъ.

— Сколько шариковъ положено на верхней проволокѣ? Сколько на нижней? На которой проволокѣ положено шариковъ больше?

— Сколько шариковъ скинулъ я съ нижней проволоки? Поровну ли теперь положено шариковъ на обѣихъ проволокахъ? На которой меньше? Сколькихъ шариковъ не хватаетъ теперь на нижней проволокѣ?

Не хватаетъ 3-хъ шариковъ.

— Не скажетъ ли кто это по-другому?

Если не послѣдуетъ желаемаго отвѣта, учитель самъ объясняетъ: вмѣсто «не хватаетъ 3-хъ шариковъ» будемъ говорить «меньше на 3 шарика».

— Сколько крестиковъ написалъ я? (10). Теперь я хочу, чтобы здѣсь было на 2 крестика меньше. Какъ же это сдѣлать?

— 2 крестика стереть.

— Сколько кубиковъ стоитъ на планкѣ? (7). Я хочу, чтобы тутъ было 4-мя кубиками меньше. Какъ же это сдѣлать?

— 4 кубика снять, отнять.

— Братъ умѣетъ писать 9 буквъ, а сестра на одну букву меньше. Сколько буквъ умѣетъ писать сестра? Какъ это узнать?

— У хозяйки два самовара: одинъ вѣситъ 10 фунтовъ, другой 3-мя фунтами легче. Сколько вѣситъ другой самоваръ? Какъ это узнать?

— Отъ 7-ми отнимите 2 — сколько будетъ? Что меньше: 5 или 7? Значитъ, когда мы вмѣсто 7-ми получили 5 (изъ 7-ми сдѣлали 5), то мы *уменьшили* число 7. Что же мы сдѣлали съ числомъ 7? Сколько отняли мы отъ 7-ми? На сколько уменьшили мы число 7? Какъ же уменьшить 7 на 2?

— Отъ 7-ми надо отнять 2.

— Уменьшите 5 на 3. Сколько будетъ? Какъ вы это сдѣлали? Уменьшите 8 на 4; 10 на 6 и т. д.

— На одной проволокѣ классныхъ счетовъ учитель кладетъ, напримѣръ, 7, на другой 4 шарика.

— Сколько шариковъ положено на верхней проволокѣ? Сколько на нижней? На которой проволокѣ положено шариковъ больше? Сколько лишку положено на верхней проволокѣ?

— Лишку 3 шарика.

— А какъ сказать это по-другому?

— Больше на 3 шарика.

— На сколько же 7 шариковъ больше 4-хъ шариковъ?

— 7 шариковъ больше 4-хъ шариковъ на 3 шарика.

— Сколько крестиковъ написано въ верхнемъ ряду? (8). Сколько въ нижнемъ? (6). Гдѣ меньше крестиковъ? Сколькихъ крестиковъ внизу не хватаетъ?

— Не хватаетъ 2-хъ крестиковъ.

— Какъ сказать это по-другому?

— Меньше на 2 крестика.

— На сколько же 6 крестиковъ меньше 8-ми крестиковъ?

— 6 крестиковъ меньше 8-ми крестиковъ на 2 крестика.

Приведенныя два упражненія имѣютъ цѣлью навести учениковъ на разностное сравненіе чиселъ. Послѣ этого показывается дѣтямъ пріемъ разностнаго сравненія: чтобы узнать, на сколько одно число больше или меньше другого, надо отъ бо́льшаго изъ нихъ отнять меньшее.

Учитель вызываетъ къ своему столу двухъ учениковъ и на виду у всего отдѣленія даетъ одному изъ нихъ, напр., 5 кубиковъ, другому — 9 кубиковъ

— Сосчитай вслухъ, сколько кубиковъ далъ я тебѣ. Сосчитай теперь ты. (Обращаясь ко всѣмъ). Кому изъ нихъ далъ я кубиковъ больше? Узнаемъ, сколько далъ я ему лишку. Дай мнѣ назадъ всѣ кубики. (Ученикъ отдаетъ 5 кубиковъ). И ты дай мнѣ назадъ кубики, только лишніе оставь у себя. (Ко всѣмъ). Сколько же онъ долженъ отдать мнѣ кубиковъ?

— Тоже 5 кубиковъ.

— Сколько у тебя осталось кубиковъ? (Ко всѣмъ). Сколько же далъ я ему лишку?

— Лишку 4 кубика.

— Какъ сказать по-другому?

— Больше на 4 кубика.

— Сколько кубиковъ далъ я одному? другому? На сколько же 9 кубиковъ больше 5-ти кубиковъ?

— 9 кубиковъ больше 5-ти кубиковъ на 4 кубика.

— Когда у него остались лишніе кубики?

— Когда онъ отдалъ назадъ 5 кубиковъ.

— Какъ же получить лишекъ?

— Надо отъ 9-ти кубиковъ отнять 5 кубиковъ.

— Какъ узнать, на сколько 9 кубиковъ больше 5-ти кубиковъ?

— Надо отъ 9-ти кубиковъ отнять 5 кубиковъ.

Можно еще разъ повторить это объясненіе, нѣсколько видоизмѣнивши его. Учитель чертитъ на классной доскѣ двѣ группы крестиковъ.

× × × × × × × × × × × × × × × × ×

— Гдѣ больше крестиковъ: въ первомъ или во второмъ ряду (налѣво или направо)? Кто можетъ указать, гдѣ здѣсь (во второмъ ряду) лишніе крестики? Какъ бы это сдѣлать (какъ отыскать лишніе крестики)?

— Надо отсчитать столько крестиковъ, сколько ихъ въ первомъ ряду.

— Сколько крестиковъ въ первомъ ряду? Поди, отсчитай во второмъ ряду столько же крестиковъ.

Ученикъ отсчитываетъ 7 крестиковъ, идя напр. отъ правой руки къ лѣвой; остальные крестики учитель отмѣчаетъ, напр. подчеркивая ихъ.

— Укажи лишніе крестики. Сколько ихъ? На сколько крестиковъ во второмъ ряду больше, чѣмъ въ первомъ? Сколько всѣхъ крестиковъ во второмъ ряду? А въ первомъ? На сколько же 10 крестиковъ больше 7-ми крестиковъ? Какъ мы это узнали?

— Отъ 10-ти крестиковъ отсчитали, отняли, 7 крестиковъ — осталось 3 крестика.

— Сколькихъ крестиковъ недостаетъ въ первомъ ряду до второго? На сколько 7 крестиковъ меньше 10-ти крестиковъ? А какъ мы это узнали?

— Отъ 10-ти крестиковъ отняли 7 крестиковъ.

— На сколько 8 больше 3-хъ? Какъ это узнать? На сколько 6 меньше 9-ти? Какъ это узнать?

— Въ младшемъ отдѣленіи училища 10 дѣвочекъ, а въ среднемъ 6 дѣвочекъ. Въ какомъ отдѣленіи больше дѣвочекъ? На сколько больше? Какъ это узнать?

— Отъ 10-ти отнять 6 — останется 4.

— Въ саду 7 яблонь, а грушевыхъ деревьевъ 4. Чего меньше въ саду: яблонь или грушевыхъ деревьевъ? На сколько штукъ меньше? Какъ это узнать?

— Отъ 7-ми отнять 4 — получится 3.

— Брату 8 лѣтъ, сестрѣ 6 лѣтъ. Кто изъ нихъ старше? Сколькими годами братъ старше? Какъ это узнать?

Послѣ приведенныхъ разъясненій, для упражненія въ разностномъ сравненіи чиселъ и въ увеличеніи и уменьшеніи одного числа на другое могутъ служить задачи №№ 152—173 нашего сборника.

Задачи на два дѣйствія №№ 174—183, названныя нами второю группою задачъ на сложеніе и вычитаніе, содержатъ уже болѣе широкій кругъ примѣненія этихъ дѣйствій, сравнительно съ первою группою задачъ на сложеніе и вычитаніе: тутъ сложеніе употребляется для того, чтобы узнать, сколько всего, и для того, чтобы увеличить одно число на другое; вычитаніе—для того, чтобы узнать, сколько останется, и для того, чтобы уменьшить, а также опредѣлить, на сколько одно число больше или меньше другого.

Относительно этихъ задачъ см. примѣчаніе въ концѣ § 9.

11. Умноженіе. Послѣ того какъ дѣти усвоили таблицы сложенія и вычитанія въ предѣлѣ десяти и познакомились съ различными случаями примѣненія этихъ дѣйствій, можно дать ученикамъ понятіе о новомъ дѣйствіи—умноженіи, не сообщая пока относящихся сюда терминовъ, а выражая это дѣйствіе словами «взять», «повторить».

Въ предѣлѣ перваго десятка (и вообще въ предѣлѣ таблицы) умноженіе выполняется посредствомъ сложенія, а потому не является новымъ дѣйствіемъ въ смыслѣ новаго способа вычисленія. Не будетъ новымъ и вопросъ, къ рѣшенію котораго оно прежде всего прилагается: узнать, сколько всего? (ученикъ сшилъ 3 тетради въ 3 листа каждую; сколько листовъ бумаги пошло на всѣ тетради?).

Съ вопросомъ, въ который входитъ условное выраженіе «больше въ нѣсколько разъ», дѣти знакомятся позже. Особенности новаго дѣйствія, отличающія его отъ сложенія, будутъ здѣсь такія. 1) Замѣна слова «прибавить» словомъ «взять», или «повторить», замѣна, возможная вслѣдствіе равенства слагаемыхъ и ведущая къ сокращенію рѣчи: къ двумъ прибавить два, еще прибавить два и еще прибавить два; короче: два повторить четыре раза. Этой замѣнѣ словъ соотвѣтствуетъ и замѣна знака + знакомъ ×, приводящая къ сокращенію записи: 2+2+2+2, короче 2×4. 2) Требованіе запомнить результаты сложенія *нѣсколькихъ* равныхъ между собою чиселъ.

Учитель ставитъ на планку доски различныя группы кубиковъ, оставляя промежутки между группами, и спрашиваетъ всякій разъ, сколько кубиковъ онъ поставилъ.

— Сколько кубиковъ поставилъ я на планку? (2 кубика). Еще сколько? (4 кубика). Еще сколько? (1 кубикъ). Еще сколько? (3 кубика). Какъ узнать, сколько здѣсь всѣхъ кубиковъ?

— Къ 2-мъ прибавить 4, еще прибавить 1, еще прибавить 3.

— Прибавляйте.

— Къ 2-мъ прибавить 4 — будетъ 6, къ 6-ти прибавить 1 — будетъ 7, къ 7-ми прибавить 3 — будетъ 10.

Не снимая этихъ кубиковъ, учитель попрежнему ставитъ на другую планку четыре раза по два кубика.

— Какъ узнать, сколько всѣхъ кубиковъ поставилъ я на другую планку?

— Къ 2-мъ прибавить 2, еще прибавить 2 и еще прибавить 2.

— Прибавляйте.

— Къ 2-мъ прибавить 2 — будетъ 4, къ 4-мъ прибавить 2 — будетъ 6, къ 6-ти прибавить 2 — будетъ 8.

— Сколько разъ ставилъ я кубики на первую планку? На вторую? Поровну ли кубиковъ ставилъ я всякій разъ на первую планку? А на вторую?

— Поровну, по два.

— Слушайте, дѣти: когда приходится прибавлять все поровну, то не говорятъ «прибавить», а говорятъ «взять столько-то разъ». Такъ короче. (Указываетъ на вторую планку). Къ 2-мъ прибавить 2, еще прибавить 2 и еще прибавить 2. Вмѣсто этого скажемъ «2 взять 4 раза». 2 взять 4 раза — сколько будетъ?

— 2 взять 4 раза — будетъ 8.

— Вмѣсто «взять» говорятъ также «повторить». 2 повторить 4 раза — сколько будетъ?

— 2 повторить 4 раза — будетъ 8.

Учитель пишетъ 2+2+2+2=8.

— Читайте.

— Къ 2-мъ прибавить 2, еще прибавить 2 и еще прибавить 2 — будетъ 8.

— А какъ сказать по-другому, покороче?

— 2 взять 4 раза — будетъ 8; 2 повторить 4 раза — будетъ 8.

— Когда приходится прибавлять поровну, то и говорятъ короче, и пишутъ короче. Смотрите, какъ пишутъ: $2\times4=8$. Читать надо это такъ: два (указываетъ на цифру 2) взять, или повторить, (указываетъ знакъ $\times$) четыре раза (указываетъ на цифру 4) — будетъ 8. Скажите мнѣ, какимъ знакомъ написано слово «взять», или «повторить?»

— Крестикомъ.

— Такой ли это крестикъ, который означаетъ «прибавить»?

— Не такой.

— Тотъ крестикъ прямой (пишетъ $+$), а это — косой (пишетъ $\times$). Какъ же пишется слово «взять», или «повторить ?»

— Косымъ крестикомъ.

Слѣдуютъ упражненія. Учитель ставитъ на планку доски 5 разъ по 2 кубика.

— Сколько разъ ставилъ я кубики на планку? По скольку кубиковъ ставилъ я каждый разъ? Какъ узнать, сколько тутъ всѣхъ кубиковъ? Поди, прибавляй вслухъ.

Ученикъ, переходя отъ пары къ парѣ кубиковъ, но не сдвигая ихъ, говоритъ: къ 2-мъ прибавить 2 — будетъ 4, къ 4-мъ прибавить 2 — будетъ 6 и т. д.; а учитель въ это время пишетъ $2+2+2+2+2=10$.

— Скажемъ еще разъ (указываетъ на кубики или на запись): къ 2-мъ прибавить 2, еще прибавить 2, еще прибавить 2 и еще прибавить 2 — будетъ 10. А какъ сказать это короче?

— 2 взять 5 разъ — будетъ 10; 2 повторить 5 разъ — будетъ 10.

— Нельзя ли записать это короче? Поди, запиши.

Ученикъ пишетъ $2\times5=10$.

— Прочитайте, что написалъ я? (2×3).

— 2 повторить 3 раза.

— Кто можетъ обозначить это на кубикахъ?

Если ученики затруднятся это сдѣлать, учитель спроситъ.

— Сколько разъ надо повторить число 2? Сколько же разъ надо ставить кубики на планку? Какое число надо повторить 3 раза? По скольку же кубиковъ надо ставить каждый разъ? Поставь. 2 повторить 3 раза — сколько будетъ? Запиши. ($2\times3=6$). А какъ вы узнали, что 2 повторить 3 раза — будетъ 6?

— Къ 2-мъ прибавили 2 — стало 4; къ 4-мъ прибавили 2 — вышло 6.

Для ознакомленія учениковъ съ выраженіемъ «взять», или «повторить», и со знакомъ $\times$ мы выбрали такіе примѣры, когда число слагаемыхъ больше двухъ, такъ какъ въ этихъ только случаяхъ новыя выраженія и новый знакъ дѣйствительно ведутъ къ сокращенію рѣчи и письма.

Послѣ этого можно провести въ порядкѣ счетъ равными группами: 2×2, 2×3, 2×4, 2×5, 3×2, 3×3, 4×2 и 5×2.

— Сколько кубиковъ поставилъ я?

— 2 кубика.

— Два кубика: какъ сказать это по-другому? (Запрягли двухъ лошадей: какъ сказать по-другому?)

— Пара кубиковъ.

— А какъ еще можно назвать пару?

— Двойка.

Ставится еще два кубика.

— Сколько паръ кубиковъ поставлено теперь? 2 пары кубиковъ — это сколько кубиковъ? 2 двойки — это сколько? Какъ это узнать?

— Къ 2-мъ прибавить 2 — будетъ 4.

— А какъ сказать это по-другому? (Я бралъ 2 раза по 2 кубика).

— 2 взять 2 раза — будетъ 4; 2 повторить 2 раза — будетъ 4.

— Какъ это записать? Запишите.

Дѣти пишутъ на своихъ доскахъ (въ тетрадяхъ) $2 \times 2 = 4$.

Учитель кладетъ на классныхъ счетахъ 3 раза по 2 шарика, оставляя промежутки между парами; каждый разъ онъ спрашиваетъ, по скольку шариковъ кладется.

— Сколько паръ шариковъ положилъ я? 3 пары шариковъ — это сколько шариковъ? 3 двойки — это сколько? А какъ это узнать?

— Къ 2-мъ прибавить 2 — будетъ 4; къ 4-мъ прибавить 2 — будетъ 6.

— Двойка, еще двойка и еще двойка — будетъ 6. Скажите короче.

— 3 двойки будетъ 6.

— Къ 2-мъ прибавить 2 и еще прибавить 2 — будетъ 6. Скажите короче.

— 2 повторить 3 раза — будетъ 6.

— Запишите.

Подобнымъ же образомъ проходятся и остальные случаи умноженія въ предѣлѣ перваго десятка.

Не лишне продѣлать съ учениками одинъ-два примѣра на умноженіе единицы.

— Читайте, что написалъ я $(1+1+1+1+1+1)$.

— Къ одному прибавить одинъ, еще прибавить одинъ...

— Сколько разъ написано здѣсь по одному? Какъ прочитать это короче?

— Одинъ повторить 6 разъ.

— Одинъ повторить 6 разъ — сколько будетъ? $(1+1+1+1+1+1=6)$.

Какъ записать это короче? Запишите. $(1 \times 6 = 6)$.

Мы не вводимъ здѣсь весьма употребительныхъ въ табличномъ умноженіи выраженій «дважды три», «пятью два» и т. д.: выраженія эти, представляющія вслѣдствіе своей краткости нѣкоторое удобство при изученіи таблицы умноженія во всемъ ея объемѣ и при умноженіи многозначныхъ чиселъ, въ данномъ случаѣ не имѣютъ почти никакого значенія, и усвоеніе ихъ является здѣсь излишнимъ трудомъ для учениковъ. Но на ряду съ такими выраженіями, какъ «два повторить пять разъ — будетъ десять», мы считаемъ весьма умѣстными и выраженія «пять двоекъ будетъ (составляютъ) десять»: послѣднія служатъ къ уясненію первыхъ, нагляднѣе показывая счетъ равными группами.

Соотвѣтствующія задачи учитель найдетъ въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 184—191. Эти задачи могутъ быть рѣшены или послѣ того, какъ

указаннымъ выше образомъ пройдены всѣ случаи умноженія въ предѣлѣ десятка, или же во время ихъ прохожденія, завершая соотвѣтствующія упражненія на наглядныхъ пособіяхъ.

Обращаемъ вниманіе учителя на задачи №№ 192—197, которыя попарно содержатъ случаи умноженія, отличающіеся перестановкой производителей. Эти задачи могутъ служить къ тому, чтобы, во-первыхъ, заронить мысль о неизмѣняемости произведенія отъ перестановки производителей; во-вторыхъ — что здѣсь важнѣе — возможно лучше уяснить, какое изъ данныхъ чиселъ является множимымъ (какое число надо повторить) и какое множителемъ (какое число показываетъ, сколько разъ надо повторить). Съ этою послѣднею цѣлію весьма полезно сначала записать рѣшеніе этихъ задачъ при помощи знака «прибавить», а потомъ уже перейти къ знаку «повторить».

— Ученикъ сшилъ 4 тетради, въ 2 листа каждую. Сколько вышло у него листовъ бумаги? Какъ это узнать?

Если дѣти дадутъ и вѣрный отвѣтъ: 2 повторить 4 раза — будетъ 8, учитель можетъ повести съ ними такую бесѣду.

— Сколько листовъ пошло на одну тетрадь? (пишетъ 2). На другую? (пишетъ рядомъ еще 2). На третью? (пишетъ еще 2). На четвертую? (пишетъ 2). Что же надо теперь сдѣлать, чтобы узнать, сколько будетъ всего?

– Къ 2-мъ прибавить 2, еще прибавить 2 и еще прибавить 2.

— Сколько будетъ?

Получивъ отвѣтъ, учитель ставитъ между написанными цифрами знаки + и пишетъ итогъ: $2+2+2+2=8$.

— Какъ записать это короче? ($2\times4=8$). Какъ это прочитать? Какъ же же узнать, сколько листовъ бумаги пошло на всѣ тетради? По скольку листовъ шло на каждую тетрадь? Сколько тетрадей сшилъ ученикъ? А другой ученикъ сшилъ 2 тетради въ 4 листа каждую. Сколько бумаги вышло у этого ученика? Сколько листовъ пошло на одну тетрадь? (пишетъ 4). На другую? (пишетъ рядомъ еще 4). Что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько будетъ всего?

— Къ 4-мъ прибавить 4.

— Сколько будетъ? (ставитъ знакъ + и пишетъ итогъ: $4+4=8$). Какъ записать это по другому? ($4\times2=8$). Какъ это прочитать? Какъ же узнать, сколько бумаги вышло у другого ученика? По скольку листовъ шло на каждую тетрадь? Сколько сшилъ онъ тетрадей?

Въ задачахъ №№ 198 и 199 еще разъ повторяются случаи умноженія, въ которыхъ множимое и множитель одинаковы, а въ задачахъ №№ 200—202 множимымъ является единица.

Примѣчаніе 1. Во всѣхъ задачахъ настоящаго § (№№ 184—202) умноженіе употребляется для рѣшенія такихъ вопросовъ, въ которыхъ требуется найти сумму равныхъ чиселъ, или повторить число нѣсколько разъ; тутъ нѣтъ примѣненія умноженія къ увеличенію числа въ нѣсколько разъ: это будетъ показано дѣтямъ позже. Поэтому, если при рѣшеніи настоящихъ задачъ учитель будетъ ставить вопросъ «почему надо повторить?», то не долженъ требовать на него такого отвѣта, который заключалъ бы въ себѣ выра-

женіе «во столько-то разъ больше». — Кузнецъ подковалъ 4 лошадей, новыя подковы онъ поставилъ каждой лошади только на переднія ноги. Сколько потребовалось новыхъ подковъ? Какъ это узнать? Почему надо 2 повторить 4 раза? — На одну лошадь шло 2 подковы, а на 4 лошади — 4 раза по 2. Но нельзя требовать такого отвѣта: на одну лошадь шло 2 подковы, а на 4 лошади — въ 4 раза больше.

Примѣры №№ 59—62 назначены для рѣшенія во время самостоятельныхъ занятій, послѣ того какъ дѣти вмѣстѣ съ учителемъ переберутъ всѣ случаи умноженія въ предѣлѣ перваго десятка.

Весьма полезными считаемъ мы упражненія, состоящія въ переходѣ отъ знака + къ знаку × (№№ 63 и 64) и обратно (№№ 65 и 66): они въ значительной мѣрѣ содѣйствуютъ уясненію новаго выраженія «повторить» и новаго знака ×, связывая ихъ со знакомыми уже дѣтямъ выраженіемъ «прибавить» и знакомъ +. Вмѣстѣ съ тѣмъ они напоминаютъ, какъ найти результатъ умноженія, если онъ будетъ позабытъ.

Примѣчаніе 2. Въ предѣлѣ перваго десятка подлежатъ запоминанію собственно четыре случая умноженія: $2 \times 3 = 6$, $2 \times 4 = 8$, $2 \times 5 = 10$, $3 \times 3 = 9$, такъ какъ умноженіе на 2 (напр. 3×2, 5×2) есть сложеніе только двухъ чиселъ, результаты котораго ученикамъ извѣстны; а умноженіе единицы (1×4, 1×9) не требуетъ никакого вычисленія.

Въ численныхъ примѣрахъ №№ 67—69 къ сложенію и вычитанію присоединяется и умноженіе. Считая преждевременнымъ вводить здѣсь скобки, мы поставили въ каждомъ примѣрѣ умноженіе только одинъ разъ и притомъ въ началѣ примѣра, такъ что для рѣшенія примѣра надо выполнить указанныя дѣйствія въ томъ порядкѣ, въ какомъ они идутъ одно за другимъ. Такъ, первый примѣръ № 67 рѣшается слѣдующимъ образомъ: 2 повторить 5 разъ — будетъ 10, отъ 10-ти отнять 3 — останется 7 и т. д.

12. Дѣленіе.

а) Дѣленіе на равныя части. Для выполненія дѣленія на наглядныхъ пособіяхъ служитъ слѣдующій пріемъ. Изъ группы предметовъ, которую надо раздѣлить, напр. изъ группы кубиковъ, беремъ число предметовъ, равное числу частей, напр. беремъ 3 кубика, если надо раздѣлить на 3 равныя части; разставляя ихъ отдѣльно (дѣля на 3 равныя части), имѣемъ въ каждой части по одному предмету; снова беремъ 3 кубика и, поступая по предыдущему, получимъ въ каждой части еще по одному, а всего по два кубика; такъ поступаемъ до тѣхъ поръ, пока не исчерпаемъ всѣхъ предметовъ данной группы.

Связывая этотъ пріемъ съ предшествующими ариѳм. дѣйствіями, мы приходимъ къ вычитанію или къ сложенію равныхъ чиселъ. Такъ, чтобы раздѣлить 8 на 2 равныя части, беремъ (вычитаемъ) изъ 8-ми 2 и, дѣля пополамъ, имѣемъ въ каждой части по одному; беремъ (вычитаемъ)

изъ 6-ти 2 и, дѣля пополамъ, получимъ въ каждой части еще по одному, а всего по два и т. д. Вмѣсто того, чтобы отнимать по 2, мы можемъ набирать по 2, пока не получимъ 8-ми, дѣля пополамъ каждую двойку; 2 раздѣлить пополамъ—будетъ 1, еще 2 раздѣлить пополамъ—будетъ 1; значитъ, 4 раздѣлить пополамъ—будетъ 2 и т. д.

Если мы уже знаемъ на память нѣкоторые результаты дѣленія, то можемъ этимъ воспользоваться для ускоренія дѣла; напр., если мы знаемъ половину 6-ти и половину 4-хъ, но не знаемъ половины 10-ти, то для отысканія послѣдней разобьемъ 10 на 6 и 4.

Для добыванія результатовъ дѣленія весьма удобно пользоваться таблицей умноженія; для того, чтобы найти половину 8-ми, припомнимъ: какое число надо повторить 2 раза, чтобы получить 8?

Обращаемъ вниманіе учителя на то, что такія выраженія, какъ «восемь раздѣлить *на два*», являются слѣдствіемъ обобщенія обоихъ видовъ дѣленія (на части и по содержанію): 8 раздѣлить на 2 равныя части—будетъ 4 (единицы въ каждой части), и 8 раздѣлить на двойки—будетъ 4 (двойки); то и другое можно сказать вмѣстѣ, вообще: (число) 8 раздѣлить на (число) 2—будетъ 4. Такія выраженія здѣсь неумѣстны: вмѣсто нихъ слѣдуетъ употреблять выраженія болѣе полныя: «раздѣлить на 2 равныя части, или пополамъ», «раздѣлить на 3 равныя части» и т. д.

Уясняя дѣтямъ дѣленіе на наглядныхъ пособіяхъ, начинаемъ съ дѣленія столькихъ предметовъ, на сколько частей надо раздѣлить; потомъ показываемъ общій пріемъ дѣленія на даннаго дѣлителя и примѣняемъ этотъ пріемъ ко всѣмъ случаямъ дѣленія на этого дѣлителя чиселъ перваго десятка. Относящіяся сюда задачи учитель найдетъ въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 203—214.

На планку доски ставятся рядомъ два кубика.

— Сколько кубиковъ стоитъ на планкѣ? Если два кубика раздѣлить на двѣ равныя части, то по скольку кубиковъ будетъ въ каждой части? (Кубики раздвигаются).

— Два кубика раздѣлить на двѣ равныя части — въ каждой части будетъ по одному кубику.

— Два пряника раздѣлить поровну между двумя братьями—сколько пряниковъ придется каждому? Два раздѣлить пополамъ — сколько будетъ? Половина двухъ — это сколько? Веревку длиною въ 2 аршина разрѣзали пополамъ; какой длины вышла каждая часть? Какъ это узнать?

— 2 раздѣлить пополамъ — будетъ одинъ.

На столъ кладется четное число кубиковъ. (Считать ихъ ученикамъ не надо.)

— Вотъ у меня на столѣ кубики, и я хочу раздѣлить ихъ поровну между двумя учениками (вызываетъ къ столу двухъ учениковъ). Кто сумѣетъ это сдѣлать?

Къ столу выходитъ третій ученикъ и начинаетъ дѣлить кубики: даетъ кубикъ одному и кубикъ другому, кубикъ одному и кубикъ другому... Учитель останавливаетъ его.

— По скольку кубиковъ надо брать для каждой раздачи?

— По два кубика.

— Такъ ты и дѣлай. Начнемъ снова. Говори: беру 2 кубика и дѣлю ихъ на 2 равныя части. Продолжай.

— Беру еще 2 кубика и дѣлю ихъ на 2 равныя части... Беру послѣдніе 2 кубика и дѣлю ихъ на 2 равныя части.

Это упражненіе имѣетъ цѣлью уяснить дѣтямъ пріемъ дѣленія на двѣ равныя части, который потомъ примѣняется къ дѣленію пополамъ четырехъ, шести, восьми и десяти.

На планку доски ставятся 4 кубика.

— Сколько кубиковъ стоитъ на планкѣ? Какъ раздѣлить ихъ на 2 равныя части?

— Взять два кубика и раздѣлить ихъ на 2 равныя части.

Ученикъ беретъ два кубика и ставитъ ихъ отдѣльно на другой планкѣ.

— Сколько будетъ въ каждой части? Потомъ что сдѣлать?

— Взять еще 2 кубика и раздѣлить ихъ на 2 равныя части.

Ученикъ беретъ остальные 2 кубика и ставитъ ихъ отдѣльно на другой планкѣ рядомъ съ прежде раздѣленными.

— По скольку кубиковъ придется еще въ каждую часть? Значитъ, если 4 кубика раздѣлить на 2 равныя части, то по скольку кубиковъ будетъ въ каждой части? 4 пера раздѣлить поровну между 2-мя учениками — по скольку перьевъ достанется каждому? 4 раздѣлить пополамъ — сколько будетъ? Половина 4-хъ — это сколько? Мать раздала 4 яблока 2-мъ дочерямъ поровну. Сколько яблоковъ досталось каждой? Какъ это узнать?

— 4 раздѣлить на 2 равныя части (пополамъ) — будетъ 2.

Далѣе идетъ дѣленіе пополамъ чиселъ 6, 8, 10.

Точно такъ же ведется дѣленіе на 3 равныя части чиселъ 3, 6 и 9; на 4 равныя части — чиселъ 4 и 8; на 5 равныхъ частей — чиселъ 5 и 10. Другимъ дѣлителямъ въ предѣлѣ перваго десятка соотвѣтствуютъ лишь такіе случаи дѣленія, когда въ результатѣ получается единица (задачи №№ 215—218).

Послѣ одного изъ перечисленныхъ случаевъ дѣленія, напр. послѣ дѣленія 6 на 2 равныя части, учитель показываетъ дѣтямъ знакъ дѣленія.

— 6 раздѣлить на 2 равныя части — сколько будетъ? Смотрите, какъ это надо записать 6 : 2=3. Шесть (указываетъ цифру 6) раздѣлить (указываетъ знакъ :) на 2 равныя части (указываетъ цифру 2) — будетъ три. Какимъ же знакомъ пишется слово «раздѣлить?»

— Двумя точками.

— 4 раздѣлить на 2 равныя части — сколько будетъ? Запишите это. 2 раздѣлить на 2 равныя части — сколько получится? Запишите.

Такія записи дѣлаются во всѣхъ дальнѣйшихъ упражненіяхъ, послѣ того какъ найденъ результатъ.

Задачи нашего сборника №№ 219—226 еще разъ содержатъ (вразбивку) дѣленіе чиселъ перваго десятка, когда дѣлимое не равно дѣлителю, и служатъ для повторенія пройденнаго. Вмѣстѣ съ тѣмъ при рѣшеніи этихъ задачъ можно указать дѣтямъ, какъ найти результатъ дѣленія безъ помощи наглядныхъ пособій.

— Учитель раздалъ 10 перьевъ поровну 5-ти ученикамъ. Сколько перьевъ получилъ каждый ученикъ? Какъ это узнать? Если бъ вы забыли, сколько получится, то какъ бы сообразили это?

— Раздать 5 перьевъ — каждому придется по одному перу; да еще раздать 5 перьевъ — придется еще по одному перу; всего по 2 пера.

Если бъ дѣти сами не дали такого отвѣта, то можно заставить ихъ высказать это по вопросамъ.

— Какъ стали бы вы дѣлить 10 кубиковъ на 5 равныхъ частей? 5 раздѣлить на 5 равныхъ частей — сколько будетъ въ каждой части? Да еще 5 раздѣлить на 5 равныхъ частей — сколько еще придется на каждую часть? Значитъ, 10 раздѣлить на 5 равныхъ частей — сколько будетъ въ каждой части?

— Хозяйка испекла хлѣбъ вѣсомъ въ 8 фунтовъ; половину этого хлѣба съѣли за обѣдомъ. Сколько фунтовъ хлѣба съѣли за обѣдомъ? Какъ это узнать? Если бъ вы забыли, какова половина 8-ми, то какъ отыскали бы ее?

— Половина двухъ — одинъ, еще половина двухъ — одинъ; половина четырехъ — два; еще половина двухъ — одинъ; половина шести — три; еще половина двухъ — одинъ; половина восьми — четыре.

— Кто отыщетъ половину 8-ми скорѣе?

— Половина 4-хъ — два; еще половина 4-хъ — два; половина 8-ми — 4.

— Половина 6-ти — три, половина 2-хъ — одинъ; половина 8-ми—4.

— 10 стульевъ разставили поровну въ 2-хъ комнатахъ. По скольку стульевъ поставили въ каждую комнату? Что надо сдѣлать, чтобы узнать это?

— Надо 10 раздѣлить на 2 равныя части (пополамъ).

— Я вамъ скажу, что въ каждую комнату поставили по 3 стула. Вѣрно ли это? Почему нѣтъ?

— Потому что тогда всѣхъ стульевъ было бы 6, а не 10.

— А какъ узнать, что всѣхъ стульевъ было бы тогда 6?

— 3 повторить 2 раза — будетъ 6.

— Можетъ-быть, въ каждую комнату поставили по 4 стула? Почему нѣтъ?

— 4 повторить 2 раза — будетъ только 8.

— А если мы скажемъ, что въ каждую комнату поставили по 5 стульевъ, будетъ ли это такъ? Почему такъ? Вотъ видите, дѣти: чтобы раз-

дѣлить 10 на 2 равныя части, мы припомнимъ: какое число надо повторить 2 раза, чтобы получить 10.

Примѣчаніе. Задачи №№ 203—226 не содержатъ такихъ вопросовъ, въ которыхъ требуется уменьшить число въ нѣсколько разъ: здѣсь дѣленіе употребляется лишь въ прямомъ своемъ значеніи: разрѣзать, раздать, распилить, вообще найти нѣкоторую часть. Съ выраженіемъ «меньше въ нѣсколько разъ» мы знакомимъ дѣтей позже. Поэтому, если при рѣшеніи задачъ настоящаго § учитель будетъ ставить вопросъ «почему надо раздѣлить?», то не долженъ требовать на него такого отвѣта, который заключалъ бы выраженіе «во столько-то разъ меньше». — Ямщикъ расходуетъ на своихъ лошадей 9 мѣръ овса поровну въ 3 дня. Сколько мѣръ овса выходитъ у него въ день? Какъ это узнать? Почему надо 9 раздѣлить на 3 равныя части?

— Потому что въ одинъ день выходитъ третья часть 9-ти мѣръ.

Но нельзя требовать отвѣта: потому что въ одинъ день выходитъ въ 3 раза меньше.

б) Отысканіе содержанія одного числа въ другомъ (дѣленіе по содержанію). Дѣленіе на равныя части, уже разсмотрѣнное нами, и отысканіе содержанія, къ которому мы теперь переходимъ, являются двумя видами одного и того же ариѳметическаго дѣйствія, называемаго дѣленіемъ. Но на первыхъ порахъ тотъ и другой случай дѣленія представляются двумя отдѣльными дѣйствіями и должны быть разсмотрѣны особо: не все равно—восемь кубиковъ раздѣлить на двѣ равныя части и восемь кубиковъ разставить парами. Здѣсь было бы преждевременно обобщать, или объединять, оба вида дѣленія, т.-е. разъяснять ученикамъ, что, несмотря на различіе рѣшаемыхъ ими вопросовъ, оба эти дѣйствія могутъ быть выполнены одинаково, одно можетъ быть сведено къ другому: если мы узнали, сколькимъ единицамъ равна напр. третья часть какого-нибудь числа, то вмѣстѣ съ тѣмъ узнали, сколько разъ три содержится въ этомъ числѣ, и наоборотъ. Однако, не вдаваясь въ эти разъясненія, которыя на данной ступени обученія не могутъ быть вполнѣ понятны ученикамъ, мы можемъ отысканіе содержанія назвать словомъ «раздѣлить» и обозначить знакомъ (:), такъ какъ и здѣсь число (группа предметовъ) *дѣлится* на равныя части[1]); это слово «раздѣлить» мы совѣтовали бы сопровождать выраженіями «на двойки, на тройки, на че-

[1]) Въ одномъ случаѣ (дѣленіе на части) назначается число частей, отыскивается величина каждой части; въ другомъ случаѣ (дѣленіе по содержанію) назначается величина каждой части, отыскивается число частей.

тверки, на пятки», не употребляя, какъ и въ случаѣ дѣленія на части, словъ «на два, на три» и т. д.; послѣднія выраженія мы считаемъ умѣстными лишь тогда, когда оба вида дѣленія будутъ объединены.

Примѣчаніе. Нѣкоторыя руководства по методикѣ ариѳметики вводятъ для двухъ случаевъ дѣленія два различныхъ знака (напр. знакъ ∟ для дѣленія на равныя части и знакъ : для отысканія содержанія). Намъ кажется это излишнимъ, такъ какъ рано или поздно оба вида дѣленія должны быть объединены въ одно дѣйствіе, откуда и вытекаетъ возможность обозначенія ихъ однимъ и тѣмъ же знакомъ. Здѣсь же, какъ мы уже говорили, употребленіе общаго знака для того и другого дѣйствія оправдывается возможностью назвать ихъ общимъ словомъ «раздѣлить».

Отысканіе содержанія можетъ быть выполнено: 1) посредствомъ вычитанія: чтобы узнать, сколько двоекъ въ 10-ти, будемъ отнимать по двойкѣ, пока ничего не останется, и считать эти двойки; 2) путемъ обратнымъ, т.-е. сложеніемъ дѣлителей: набираемъ по двойкѣ, пока получимъ 10. Въ томъ и другомъ случаѣ удобно брать сразу по нѣскольку дѣлителей: 3 двойки—будетъ 6; осталось 4, а это 2 двойки; всего 3 да 2, т.-е. 5 двоекъ. Это сводится къ разложенію дѣлимаго на такія группы (6 и 4), которыя мы можемъ раздѣлить на память, предполагая, что мы затрудняемся сказать прямо, сколько двоекъ въ 10-ти. Всего скорѣе найдемъ результатъ, если сразу вспомнимъ, сколько разъ надо повторить двойку, чтобы получить 10.

Для уясненія дѣтямъ понятія о новомъ дѣйствіи (второй видъ дѣленія) весьма удобно одно и то же число предметовъ (кубиковъ) разложить на группы различной величины: на двойки, тройки и т. д.

Учитель ставитъ на планку доски двѣнадцать кубиковъ сплошнымъ рядомъ [1]).

— Сколько кубиковъ поставлено на планкѣ? Поди, считай вслухъ. Наши кубики стоятъ рядомъ, вплотную. А теперь какъ я разставилъ ихъ?

— Врозь (отдѣльно), по одному.

---

[1]) Мы взяли число двѣнадцать, какъ имѣющее много дѣлителей; нужды нѣтъ, что оно больше 10-ти: мы беремъ его только для уясненія понятія о дѣленіи на группы опредѣленной величины; кромѣ того, счетъ до двѣнадцати едва ли затруднитъ дѣтей; а если бы и такъ, то всѣхъ кубиковъ можно и не пересчитывать.

Кубики снова сближаются вмѣстѣ, потомъ разставляются парами.

— Какъ теперь разставлены наши кубики? По скольку?

— Парами, попарно, по два.

— Мы разставили кубики парами. Скажемъ такъ: мы *раздѣлили* кубики на пары. Что же сдѣлали мы съ кубиками? Сколько вышло у насъ паръ? Двѣнадцать кубиковъ раздѣлить на пары — сколько будетъ паръ?

— Двѣнадцать кубиковъ раздѣлить на пары — будетъ 6 паръ.

Кубики сближаются вмѣстѣ.

— Раздѣлимъ теперь наши кубики на тройки. Кто хочетъ сдѣлать это?

Ученикъ разставляетъ кубики по три.

— Двѣнадцать кубиковъ раздѣлимъ на тройки — сколько будетъ троекъ?

Точно такъ же дѣлятся кубики на четверки и на шестерки.

Знакомя дѣтей съ дѣленіемъ по содержанію, считаемъ нужнымъ перебрать всѣ случаи этого дѣйствія въ предѣлѣ перваго десятка. Относящіяся сюда задачи учитель найдетъ въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 227 — 234.

На планку доски ставится рядомъ 4 кубика.

— Сколько кубиковъ поставлено на планкѣ? Какъ разставилъ я теперь эти кубики? По скольку?

— По два, по парѣ.

— 4 кубика раздѣлить на пары — сколько выйдетъ паръ? 4 раздѣлить на двойки — сколько будетъ двоекъ?

— Грифель стóитъ 2 копейки; мальчикъ купилъ грифелей на 4 копейки. Сколько грифелей купилъ мальчикъ?

— Мать испекла 6 лепешекъ и всѣ эти лепешки раздала своимъ сыновьямъ по 2 лепешки каждому. Сколько у нея сыновей? Какъ это узнать?

Если дѣти не дадутъ желаемаго отвѣта, ихъ можно навести на него такъ.

— Сколько лепешекъ испекла мать? А мы поставимъ 6 кубиковъ. Сколько лепешекъ дала она одному сыну? А мы отдѣлимъ 2 кубика. Сколько другому? Отдѣлимъ еще 2 кубика. Сколько еще осталось кубиковъ? Сколькимъ сыновьямъ еще остались лепешки? Что сдѣлали мы сейчасъ съ 6-ю кубиками?

— Разставили, раздѣлили 6 кубиковъ на пары.

— Какъ же узнать, сколько сыновей у матери?

— 6 раздѣлить на пары (на двойки) — будетъ 3 пары (двойки).

Разсматривая слѣдующій случай дѣленія (8-ми на двойки), можно познакомить дѣтей съ выраженіемъ «содержится, заключается, столько-то разъ».

— 8 раздѣлить на двойки — сколько будетъ двоекъ? Сколько же двоекъ въ 8-ми? Слушайте, дѣти: въ 8-ми 4 двойки; поэтому говорятъ: двойка содержится въ 8-ми 4 раза, двойка заключается въ 8-ми 4 раза. Сколько разъ двойка содержится въ 8-ми? Сколько разъ двойка заключается въ 8-ми? Что сдѣлали мы съ 8-ю кубиками, для того чтобы узнать, сколько выйдетъ паръ?

— 8 кубиковъ раздѣлили на пары.

— Что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько разъ двойка содержится въ 8-ми?

— Надо 8 раздѣлить на двойки.

При слѣдующемъ затѣмъ дѣленіи 10-ти на двойки можно сообщить дѣтямъ пріемы отысканія результата безъ помощи наглядныхъ пособій.

— Хлѣбъ, вѣсомъ въ 10 фунтовъ, раздѣлили между работниками: каждому дали по 2 фунта. Сколько было работниковъ? Какъ это узнать?

— 10 раздѣлить на двойки.

— Если бъ мы не знали, сколько двоекъ выйдетъ изъ 10-ти, то какъ стали бы рѣшать задачу? Давайте рѣшать такъ. Двумъ работникамъ приходится сколько фунтовъ хлѣба? Два ли работника было? Можетъ-быть, ихъ было 3? Почему нѣтъ?

— Потому что 3-мъ работникамъ приходится только 6 фунтовъ.

— А какъ это узнать?

— 2 повторить 3 раза — будетъ 6.

— Можетъ-быть, было 4 работника? Почему нѣтъ? Не 5 ли работниковъ было? Почему такъ?

— Потому что 5-ти работникамъ придется 10 фунтовъ.

— А какъ это узнать?

— 2 повторить 5 разъ — будетъ 10.

— Вотъ видите, дѣти: чтобы узнать, сколько двоекъ въ 10-ти, мы повторяли двойку 2 раза, 3 раза, 4 раза, 5 разъ, пока не получилось 10. Но такъ узнавать долго. Слѣдуетъ припомнить: сколько разъ надо повторить двойку, чтобы получить 10. Сколько же разъ? Значитъ, въ 10-ти содержится сколько двоекъ? 10 раздѣлить на двойки — сколько будетъ двоекъ?

— Мальчикъ разложилъ 6 орѣховъ на пары. Сколько вышло паръ? Потомъ взялъ онъ еще 4 орѣха и ихъ разложилъ на пары. Сколько вышло еще паръ? Сколько стало всѣхъ паръ? Какъ это узнать?

— Къ 3-мъ прибавить 2 — будетъ 5.

— А сколько всѣхъ орѣховъ разложено? Какъ узнали мы, что изъ 10-ти вышло 5 паръ?

— Изъ 6-ти выходитъ 3 пары, изъ 4-хъ — 2 пары, а всего 5 паръ.

— Если мы не можемъ 10 раздѣлить на пары *сразу*, то какъ можно сдѣлать это *не сразу?*

— Сначала раздѣлить на пары 6, потомъ 4.

Далѣе идетъ дѣленіе 6-ти и 9-ти на тройки, 8-ми на четверки и 10-ти на пятки. Для того, чтобы результаты разложеній сильнѣе запечатлѣлись въ памяти дѣтей, каждое изъ этихъ дѣленій слѣдуетъ сначала выполнить на наглядныхъ пособіяхъ, а потомъ уже примѣнить къ рѣшенію задачъ. Кромѣ дѣленія на наглядныхъ пособіяхъ, надо спрашивать дѣтей: а какъ мы узнали бы это въ умѣ (если бъ не было у насъ кубиковъ)? Какъ раздѣлили бы 9 на тройки? Вспомнили бы: 3 повторить 3 раза — будетъ 9.

Въ задачахъ №№ 236—251 еще разъ повторяются всѣ случаи дѣленія въ предѣлѣ перваго десятка (вразбивку). Задачи эти попарно относятся къ обоимъ видамъ дѣленія при однихъ и тѣхъ же

числовыхъ данныхъ. При рѣшеніи этихъ задачъ удобно примѣнить уже знакомый дѣтямъ знакъ дѣленія и къ тому дѣленію, которымъ отыскивается содержаніе одного числа въ другомъ.

— Изъ 6-ти листовъ бумаги ученикъ сшилъ 2 одинаковыхъ тетради. Сколько листовъ пошло на каждую тетрадь? Какъ это узнать?

— 6 раздѣлить на 2 равныя части — будетъ 3.

— Запишите это.

Является запись 6 : 2=3.

— Изъ 6-ти листовъ бумаги ученикъ сшилъ тетради, въ 2 листа каждую. Сколько тетрадей сшилъ ученикъ? Какъ это узнать?

— 6 раздѣлить на двойки — будетъ 3 (двойки).

— Видите, дѣти: здѣсь, какъ и раньше, надобно 6 *раздѣлить*, только не на 2 равныя части, а на двойки. Какимъ знакомъ писали мы слово «раздѣлить»? Запишемъ его и здѣсь тѣмъ же самымъ знакомъ. (Пишетъ 6 : 2 = 3). Шесть (указываетъ цифру 6) раздѣлить (указываетъ знакъ :) на двойки (указываетъ цифру 2) — будетъ 3. Прочитайте первую строчку (показываетъ на запись рѣшенія первой задачи).

— 6 раздѣлить на 2 равныя части — будетъ 3.

— Прочитайте вторую строчку (указываетъ на запись рѣшенія второй задачи).

— 6 раздѣлить на двойки — будетъ 3.

— Совсѣмъ ли одинаково прочитали мы обѣ строчки?

— Не совсѣмъ

— Въ чемъ же разница?

— Тамъ говорили «на двѣ равныя части», а здѣсь — «на двойки».

Примѣчаніе. Всѣ задачи настоящаго §, относящіяся ко второму виду дѣленія, приводятъ къ отысканію, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, но не ставятъ вопроса: во сколько разъ одно число больше или меньше другого; съ нимъ дѣти знакомятся позже. Поэтому, если при рѣшеніи этихъ задачъ учитель будетъ спрашивать «почему надо раздѣлить?», то онъ не долженъ требовать такого отвѣта, въ которомъ заключалось бы выраженіе «во сколько разъ больше». — У хозяйки было 9 фунтовъ масла; въ недѣлю изводила она по 3 фунта. Во сколько времени извела она все масло? Какъ это узнать? Почему надо 9 раздѣлить на тройки? — Потому что все масло вышло во столько недѣль, сколько троекъ въ 9-ти (сколько разъ 3 фунта содержатся въ 9-ти фунтахъ). Но не должно требовать отвѣта: во столько недѣль, во сколько разъ 9 больше 3-хъ.

Задачи на два дѣйствія: умноженіе и дѣленіе (№№ 252—262) содержатъ знакомые дѣтямъ случаи примѣненія этихъ дѣйствій. Относительно этихъ задачъ см. примѣчаніе въ концѣ § 9.

13. Увеличеніе и уменьшеніе въ нѣсколько разъ. Кратное сравненіе. До сихъ поръ мы примѣняли умноженіе къ такимъ вопросамъ, въ которыхъ требовалось найти сумму равныхъ слагаемыхъ, или повторить число нѣсколько разъ; а дѣленіе — къ такимъ, въ которыхъ надо было оты-

скать часть числа (раздѣлить на равныя части) и разложить число на части опредѣленной величины (узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ). Теперь мы переходимъ къ ознакомленію дѣтей съ употребленіемъ умноженія и дѣленія для того, чтобы увеличить, уменьшить число въ нѣсколько разъ и опредѣлить, во сколько разъ одно число больше или меньше другого (кратное сравненіе чиселъ). На этихъ послѣднихъ случаяхъ примѣненія умноженія и дѣленія (равно какъ и на соотвѣтственныхъ случаяхъ употребленія сложенія и вычитанія) слѣдуетъ остановиться особо и разъяснить дѣтямъ относящіяся сюда выраженія, что̀ должно имѣть мѣсто не прежде, чѣмъ дѣти освоятся съ умноженіемъ и дѣленіемъ въ ихъ прямомъ значеніи и запомнятъ результаты этихъ дѣйствій въ предѣлѣ перваго десятка.

На двѣ планки доски ставится по два кубика на каждую (или кладется по два шарика на двухъ проволокахъ классныхъ счетовъ).

— Сколько кубиковъ поставилъ я на верхнюю планку? на нижнюю? На которую поставлено кубиковъ больше?

Учитель снимаетъ кубики съ планокъ, потомъ ставитъ на одну изъ нихъ два кубика, а на другую три пары кубиковъ, оставляя промежутки между парами.

— Сколько кубиковъ стоитъ на верхней планкѣ? (2). На нижней? (6). Столько ли кубиковъ на нижней планкѣ, сколько и на верхней?

— Нѣтъ, внизу кубиковъ больше.

— Видите, дѣти: внизу кубиковъ столько же, да еще столько, да еще столько — *3 раза* по стольку. Поэтому мы скажемъ: внизу кубиковъ *въ 3 раза больше*. На нижней планкѣ кубиковъ столько же, сколько на верхней, да еще столько, да еще столько; 3 раза по стольку. Скажите это по-другому.

— На нижней планкѣ кубиковъ въ 3 раза больше, чѣмъ на верхней.

— Сколько крестиковъ написалъ я? (2). А внизу (во второмъ ряду) я хочу написать крестиковъ въ 4 раза больше. Что это значитъ?

— Столько, еще столько, еще столько, да еще столько: 4 раза по стольку. Учитель ставитъ 4 пары крестиковъ.

— Сколько шариковъ положилъ я? (3). А теперь кто-нибудь изъ васъ положитъ на другой проволокѣ въ 2 раза больше шариковъ. Что это значитъ?

— Столько же, да еще столько: 2 раза по стольку.

— Слушайте, дѣти: вмѣсто того, чтобы сказать «въ два раза», говорятъ также «вдвое». На второй проволокѣ положено у насъ шариковъ въ два раза больше. Скажите по-другому.

— Вдвое больше.

— На верхней планкѣ у насъ стоитъ 2 кубика, а на нижней 3 раза по 2 кубика. Какъ сказать это по-другому?

— На нижней планкѣ кубиковъ въ 3 раза больше.

— А еще какъ можно сказать?

— Втрое больше.

— Въ одномъ ряду у насъ написано 2 крестика, а въ другомъ 4 раза по 2 крестика. Скажите это по-иному.

— Въ другомъ ряду крестиковъ въ 4 раза больше.

— А еще какъ можно сказать?

— Вчетверо больше.

— Въ 5 разъ больше — какъ сказать иначе?

— Впятеро больше.

— Учитель далъ ученику бѣлой бумаги 2 листа, а сѣрой въ 4 раза больше. Что это значитъ: въ 4 раза больше?

— Сѣрой бумаги онъ далъ ему столько же, да еще столько, да еще столько, да еще столько: 4 раза по стольку.

— Сколько же сѣрой бумаги далъ учитель ученику? Какъ это узнать?

— 2 повторить 4 раза — будетъ 8.

— Кастрюля вѣситъ 3 фунта, а самоваръ втрое тяжеле. Что это значитъ?

— Самоваръ вѣситъ столько, да еще столько, да еще столько: 3 раза по стольку.

— Сколько же вѣситъ самоваръ? Какъ это узнать?

— 2 повторите 5 разъ. Сколько будетъ? Что больше: 10 или 2? Значитъ, кагда мы вмѣсто 2-хъ получили 10 (изъ 2-хъ сдѣлали 10), то мы *увеличили* число 2. Что же сдѣлали мы съ числомъ 2?

— Мы увеличили число 2.

— Сколько разъ по 2 взяли мы? Во сколько же разъ увеличили мы число 2? Какъ же увеличить 2 въ 5 разъ, впятеро?

— Надо 2 повторить 5 разъ.

— Увеличьте 4 въ 2 раза. Сколько будетъ? Какъ вы это сдѣлали? Увеличьте 5 вдвое, 3 втрое, 2 въ 2 раза и т. д.

На одной проволокѣ классныхъ счетовъ кладется 3 шарика, на другой — 2 раза по 3 шарика.

— Сколько шариковъ положено на верхней проволокѣ? Сколько на нижней? На которой положено шариковъ больше? Во сколько разъ больше? А на какой проволокѣ положено шариковъ меньше? На нижней проволокѣ положено шариковъ въ 2 раза больше, чѣмъ на верхней; значитъ, на верхней въ 2 раза меньше, чѣмъ на нижней. Во сколько же разъ наверху шариковъ меньше?

— Въ два раза меньше, вдвое меньше.

— На сколько равныхъ частей раздѣлены тѣ шарики, что̀ положены на нижней проволокѣ?

— На двѣ равныя части, пополамъ.

— По скольку шариковъ въ каждой части? Вы видите, дѣти: на

верхней проволокѣ только половина тѣхъ шариковъ, что̀ положены на нижней проволокѣ, и тамъ шариковъ въ 2 раза меньше.

— Сколько кубиковъ поставилъ я на планку? (10). А на другую планку я хочу поставить кубиковъ въ 2 раза меньше. Что это значитъ: въ 2 раза меньше?

— Значитъ, половину 10-ти кубиковъ.

— 10 кубиковъ раздѣлить пополамъ — сколько будетъ въ каждой части? (Раздвигаетъ кубики). Сколько же кубиковъ надо поставить на другую планку?

— Сколько крестиковъ написалъ я? (6). А во второмъ ряду я хочу написать крестиковъ втрое меньше. Что это значитъ: втрое меньше? Какую часть 6-ти крестиковъ долженъ написать я во второмъ ряду?

— Третью часть.

— А что надо сдѣлать, чтобы найти третью часть 6-ти?

— Надо 6 раздѣлить на 3 равныя части; будетъ 2.

Учитель дѣлитъ 6 крестиковъ на 3 равныя части, напр. ставя черточки между этими частями.

— Сколько же крестиковъ надо написать во второмъ ряду?

— Мальчикъ подобралъ подъ одной яблоней 10 яблоковъ, а подъ другой въ 5 разъ меньше. Что это значитъ: въ 5 разъ меньше? (Пятую часть). Какъ узнать, сколько яблоковъ подобралъ онъ подъ другой яблоней?

— 10 раздѣлить на 5 равныхъ частей — будетъ 2; 2 яблока.

— Брату 9 лѣтъ, сестра втрое моложе брата. Сколько лѣтъ сестрѣ? Какъ это узнать?

— 9 раздѣлить на 3 равныя части — будетъ 3.

— 8 раздѣлите на 2 равныя части. Сколько будетъ? Что меньше: 4 или 8? Значитъ, когда мы вмѣсто 8-ми получили 4 (изъ 8-ми сдѣлали 4), то мы *уменьшили* число 8. Что же сдѣлали мы съ числомъ 8? Мы получили половину 8-ми; это во сколько разъ меньше 8-ми? Во сколько же разъ уменьшили мы число 8? Какъ же уменьшить 8 въ 2 раза?

— Надо 8 раздѣлить на 2 равныя части, пополамъ.

— Уменьшите 8 вчетверо. Сколько будетъ? Какъ вы это сдѣлали? Уменьшите 4 въ 2 раза, 7 въ 7 разъ и т. д.

На одну планку доски ставится 2 кубика, на другую 6 кубиковъ — парами.

— Сколько кубиковъ на верхней планкѣ? Сколько на нижней? Гдѣ кубиковъ больше? Во сколько разъ внизу кубиковъ больше? Да, вверху одна пара кубиковъ, а внизу 3 пары; значитъ, столько, да еще столько, да еще столько — 3 раза по стольку, больше въ 3 раза, втрое. Во сколько же разъ 6 кубиковъ больше 2-хъ кубиковъ?

— 6 кубиковъ больше 2-хъ кубиковъ въ три раза, втрое.

— 2 кубика во сколько разъ меньше 6-ти кубиковъ?

— 2 кубика меньше 6-ти кубиковъ въ три раза, втрое.

На одну планку доски ставятся 2 кубика, на другую 10 кубиковъ сплошнымъ рядомъ.

— Сколько кубиковъ на верхней планкѣ? Сколько на нижней? Гдѣ больше кубиковъ? Во сколько разъ внизу больше кубиковъ?

Если дѣти не отвѣтятъ на послѣдній вопросъ, ихъ можно навести на желаемый отвѣтъ слѣдующимъ образомъ.

— Вотъ вы сказали мнѣ, во сколько разъ 6 кубиковъ больше 2-хъ кубиковъ. Почему же теперь затрудняетесь сказать, во сколько разъ 10 кубиковъ больше 2-хъ кубиковъ?

— Тамъ 6 кубиковъ были разставлены парами.

— Значитъ, что же намъ надо сдѣлать, чтобы узнать, во сколько разъ 10 кубиковъ больше 2-хъ кубиковъ?

— Надо 10 кубиковъ разставить парами.

— Да, надо 10 кубиковъ раздѣлить на пары, на двойки, и сосчитать, сколько выйдетъ паръ. (Разставляетъ кубики парами). 10 кубиковъ раздѣлить на пары — сколько будетъ паръ? Сколько разъ 2 кубика содержатся въ 10-ти кубикахъ? Во сколько же разъ 10 кубиковъ больше 2-хъ кубиковъ? Во сколько разъ 2 кубика меньше 10-ти кубиковъ? Какъ мы узнали это?

— 10 кубиковъ раздѣлили на пары — вышло 5 паръ [1]).

— Что больше: 8 или 2? Что надо сдѣлать, чтобы узнать, во сколько разъ 8 больше 2-хъ?

— Надо 8 раздѣлить на пары, на двойки; будетъ 4 двойки.

— Во сколько же разъ 8 больше 2-хъ? Во сколько разъ 2 меньше 8-ми?

— Во сколько разъ 9 больше 3-хъ? Какъ это узнать? Во сколько разъ 5 меньше 10-ти? Какъ это узнать? и т. д.

— Въ среднемъ отдѣленіи школы 8 дѣвочекъ, а въ старшемъ 2 дѣвочки. Въ какомъ отдѣленіи больше дѣвочекъ? Во сколько разъ больше? Какъ это узнать?

— 8 раздѣлить на двойки — будетъ 4.

— Отецъ купилъ сапоги для себя и дѣтскіе — для сына; за свои сапоги заплатилъ онъ 6 рублей, за дѣтскіе 3 рубля. Во сколько разъ дѣтскіе сапоги дешевле большихъ? Какъ это узнать?

Для упражненія въ кратномъ сравненіи чиселъ и въ увеличеніи и уменьшеніи въ нѣсколько разъ служатъ задачи №№ 263—280.

Задачи на два дѣйствія №№ 281—290, названныя нами второю группою задачъ на умноженіе и дѣленіе, содержатъ всѣ уже разсмотрѣнные случаи примѣненія этихъ дѣйствій: умноженіе употребляется здѣсь и для того, чтобы повторить число нѣсколько разъ, и для того, чтобы увеличить въ нѣсколько разъ; дѣленіемъ отыскивается часть числа и узнается содержаніе одного числа въ другомъ, а также этимъ дѣй-

---

[1]) Если же ученики сразу отвѣтятъ на вопросъ: во сколько разъ 10 кубиковъ больше 2-хъ кубиковъ, то учитель спроситъ: почему вы говорите, что 10 кубиковъ въ 5 разъ больше 2-хъ кубиковъ? Какъ это узнать? что для этого надо сдѣлать?

ствіемъ число уменьшается въ нѣсколько разъ, и опредѣляется, во сколько разъ одно число больше или меньше другого. Относительно этихъ задачъ см. примѣчаніе въ концѣ § 9.

14. Сопоставленіе разностнаго и кратнаго сравненія. Теперь, когда ученики, уже знакомые съ увеличеніемъ и уменьшеніемъ на нѣсколько единицъ и разностнымъ сравненіемъ чиселъ, прошли увеличеніе и уменьшеніе въ нѣсколько разъ и кратное сравненіе, весьма полезно сопоставить выраженія «больше, меньше на сколько-нибудь» и «больше, меньше во сколько-нибудь разъ», съ тою цѣлью, чтобы дѣти отчетливо различали эти выраженія и черезъ то еще лучше уяснили себѣ смыслъ каждаго изъ этихъ выраженій въ отдѣльности.

На одну планку доски ставится 2 кубика, на другую — 6.

— Сколько кубиковъ на верхней планкѣ? Сколько на нижней? Гдѣ больше? Сколько лишку на нижней планкѣ?

— Лишку 4 кубика.

— Какъ сказать это по-другому?

— Больше на 4 кубика, больше 4-мя кубиками.

— А какъ это узнать? (Какъ найти этотъ лишекъ?)

— Отъ 6-ти отнять 2 — останется 4.

— На сколько же 6 кубиковъ больше 2-хъ кубиковъ? На сколько 2 кубика меньше 6-ти кубиковъ? Скажите еще разъ: какъ это узнать?

6 кубиковъ разставляются парами.

— Что сдѣлалъ я сейчасъ съ кубиками?

— Разставили попарно, раздѣлили на пары, на двойки.

— Сколько паръ кубиковъ вышло изъ 6-ти кубиковъ? Сколько паръ кубиковъ на верхней планкѣ? Сколько паръ на нижней? На нижней планкѣ кубиковъ столько же, сколько на верхней, да еще столько, да еще столько: 3 раза по стольку. Какъ сказать это иначе?

— Больше въ 3 раза, больше втрое.

— Во сколько же разъ 6 кубиковъ больше 2-хъ кубиковъ? Во сколько разъ 2 кубика меньше 6-ти кубиковъ? А какъ это узнать? (Что сдѣлали мы съ 6-ю кубиками?)

— Сколько шариковъ положилъ я на верхней проволокѣ? (2). Сколько на другой? (2). На которой больше? Сколько шариковъ положилъ я еще на второй проволокѣ? (4). Гдѣ теперь шариковъ больше? Сколько лишку на второй проволокѣ? Какъ сказать иначе?

— Больше на 4 шарика, больше 4-мя шариками.

— Что же надо сдѣлать, чтобы стало на 4 больше?

— Надо прибавить 4.

— 2 увеличить на 4 — сколько будетъ?

Всѣ шарики со второй проволоки скидываются; на ней кладется 4 пары шариковъ.

— На которой проволокѣ шариковъ положено больше? Сколько паръ шариковъ на первой проволокѣ? Сколько паръ на второй? На второй проволокѣ положено шариковъ столько же, сколько на первой, да еще столько, да еще столько, да еще столько: 4 раза по стольку. Какъ сказать это иначе?

— Больше въ 4 раза, больше вчетверо.

— Какъ же сдѣлать, чтобы стало въ 4 раза больше?

— Надо взять 4 раза по стольку же, надо повторить 4 раза.

— 2 увеличить въ 4 раза — сколько будетъ?

— Сколько кубиковъ поставлено на верхней планкѣ? (9). На нижней? (9). Гдѣ больше? Сколько кубиковъ снялъ я съ верхней планки? (3). Гдѣ теперь меньше кубиковъ? Сколькихъ кубиковъ не хватаетъ на верхней планкѣ? Какъ сказать иначе?

— Вверху меньше на 3 кубика, меньше 3-мя кубиками.

— Что же надо сдѣлать, чтобы стало на 3 меньше?

— Надо отнять 3.

— 9 уменьшить на 3 — сколько будетъ?

На верхней планкѣ снова ставится 9 кубиковъ, которые раздѣляются на 3 равныя части; то же дѣлается и съ 9-ю кубиками, стоящими на второй планкѣ.

— На сколько равныхъ частей раздѣлилъ я 9 кубиковъ? (Двѣ части— двѣ тройки — снимаются съ верхней планки). Раньше на обѣихъ планкахъ было кубиковъ поровну, а теперь на какой планкѣ кубиковъ меньше? Сколько троекъ наверху? Сколько троекъ внизу? Во сколько разъ наверху меньше кубиковъ? Что же надо сдѣлать, чтобы стало въ 3 раза меньше?

— Надо раздѣлить на 3 равныя части (и взять только одну часть).

— 9 уменьшить въ 3 раза — сколько будетъ?

Напомнивъ дѣтямъ значеніе выраженій «больше, меньше на сколько-нибудь» на ряду съ выраженіями «больше, меньше во сколько-нибудь разъ», учитель можетъ рѣшить съ учениками нѣсколько задачъ (№№ 292—300), въ которыхъ эти выраженія сопоставляются примѣнительно къ однимъ и тѣмъ же числовымъ даннымъ.

15. Задачи на всѣ дѣйствія и бѣглый счетъ. Говоря въ § 9 о рѣшеніи задачъ на сложеніе и вычитаніе, мы изложили тѣ пріемы, которые относятся и къ рѣшенію задачъ на всѣ дѣйствія въ предѣлѣ перваго десятка (№№ 301—340).

Бѣглый счетъ на всѣ дѣйствія (№№ 341—370), поставленный нами въ концѣ упражненій въ предѣлѣ десяти, покажетъ, между прочимъ, въ должной ли мѣрѣ дѣти усвоили памятью результаты всѣхъ дѣйствій въ этомъ предѣлѣ и достаточно ли уяснили себѣ различные случаи примѣненія каждаго дѣйствія.

ГЛАВА II.

Счетъ до ста. — Круглые десятки.

16. Устная нумерація круглыхъ десятковъ. До сихъ поръ дѣти смотрѣли на десятокъ какъ на собраніе десяти единицъ; теперь надо познакомить учениковъ съ десяткомъ какъ съ единицей.

Учитель кладетъ на столъ сотню палочекъ.

— У меня на столѣ лежитъ много палочекъ. Что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько ихъ? Поди, сосчитай.

Ученикъ считаетъ, откладывая по палочкѣ и говоря: одна, двѣ, три,.. девять, десять. Если ученикъ умѣетъ считать только до десяти, то онъ здѣсь остановится. Если же онъ умѣетъ считать дальше, то послѣ десяти онъ скажетъ: одиннадцать, двѣнадцать... Но тутъ учитель остановитъ его.

— Нельзя ли пересчитать всѣ палочки, умѣя считать только до десяти?

— Можно: насчитать десять палочекъ, потомъ опять десять, еще десять...

— Такъ и давайте считать. А какъ только насчитаемъ десять палочекъ, свяжемъ ихъ въ пучокъ.

Нѣсколько учениковъ перебираютъ всѣ палочки, считая до десяти и связывая въ пучокъ каждыя десять палочекъ.

— Сколько палочекъ въ каждомъ пучкѣ?

— Десять палочекъ.

— Десять какъ можно назвать по-другому? (Крестьянка продала десять яицъ; десять яицъ — какъ сказать иначе?)

— Десятокъ.

— Значитъ, каждый пучокъ есть десятокъ (палочекъ). Что же теперь надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько на столѣ палочекъ?

— Надо сосчитать пучки, десятки.

— Поди, сосчитай.

Ученикъ считаетъ: одинъ десятокъ, два десятка,... девять десятковъ, десять десятковъ.

— Такъ ли считали мы десятки, какъ прежде считали палочки, или какъ-нибудь по-другому?

— Такъ же.

— Слушайте, дѣти: то, что считаютъ (чему ведутъ счетъ), называется *единицей*. Мы считали сначала палочки. Что же было у насъ единицей?

— Палочка.

— Что считали мы потомъ?

— Пучки, десятки.

— Что тогда было у насъ единицей?

— Десятокъ.

— Слушайте, дѣти: когда считаютъ какія-нибудь вещи по одной (палочки, кубики, шарики), то одна такая вещь есть *простая* единица. А когда считаютъ десятками, то десятокъ будетъ *составная*, или *сложная*, единица. Почему десятокъ называютъ единицей? Почему его можно назвать составной единицей?

— Какое число показываю я вамъ на палочкахъ? (держитъ въ рукѣ шесть палочекъ).

— Шесть.

— Чего это шесть?

— Шесть простыхъ единицъ.

— Теперь какое число показываю я вамъ? (держитъ въ рукѣ пять пучковъ).

— Пять десятковъ.

— Вотъ этотъ предметъ вамъ хорошо знакомъ. Какъ называется онъ?

— Кубикъ.

— А вотъ эту вещь будемъ называть «брусокъ»[1]). (Укладываетъ брусокъ кубиками). Сколько кубиковъ можно уложить на брускѣ? На сколько кубиковъ можно распилить брусокъ? Если кубикъ будетъ у насъ простая единица, то какъ назовете вы брусокъ?

— Десяткомъ.

Учитель ставитъ на планку доски семь кубиковъ и спрашиваетъ.

— Какое число обозначилъ я?

— Число семь.

— Чего семь?

— Семь простыхъ единицъ.

На планку ставится четыре бруска.

— Какое число обозначилъ я?

— Четыре десятка.

— Ступай, обозначь три десятка. Обозначь пять простыхъ единицы.

— Если я скажу вамъ: обозначьте восемь единицъ, то что поставите вы на планку?

— Восемь кубиковъ.

— Вѣрно. А вѣдь я не сказалъ вамъ, что это простыя единицы. Слушайте, дѣти: если вамъ скажутъ «восемь единицъ, пять единицъ»,

---

[1]) Кубики, которыми мы уже много разъ пользовались, бруски и доски составляютъ содержимое т. н. *ариѳметическаго ящика*, который заключаетъ въ себѣ: 1) 100 отдѣльныхъ кубиковъ; 2) 30 или 40 брусковъ, изъ которыхъ каждый представляетъ собою какъ бы 10 кубиковъ, сложенныхъ въ рядъ; 3) 5 или 6 квадратныхъ досокъ, длина и ширина которыхъ равна длинѣ бруска, а толщина — ребру кубика; доска представляетъ собою 10 соединенныхъ вмѣстѣ брусковъ, или 100 кубиковъ.

но не скажутъ, какія это единицы, то ихъ надо считать за простыя. Поди, обозначь четыре единицы. А если я вамъ скажу: обозначьте число шесть, а больше ничего не прибавлю, что тогда поставите вы на планку?

— Шесть кубиковъ.

— Вѣрно; ступай, обозначь число два. Обозначь три десятка. Обозначь девять.

Послѣ выясненія понятія о десяткѣ, какъ о счетной единицѣ, группамъ десятковъ даются названія: двадцать, тридцать, сорокъ..., девяносто, сто. Надо замѣтить, что въ большинствѣ случаевъ названія эти ученикамъ знакомы, и учителю придется только выспросить ихъ: кто знаетъ, какъ по-другому называютъ два десятка? три десятка? и т. д. Если ученики достаточно подвинулись въ чтеніи и письмѣ, то учитель можетъ написать на классной доскѣ названія десятковъ, а дѣти — въ видѣ самостоятельной работы — спишутъ эти названія на свои доски (въ тетради).

17. Письменная нумерація круглыхъ десятковъ. Знакомясь съ письменнымъ обозначеніемъ десятковъ, ученики получаютъ понятіе о мѣстномъ значеніи цифръ (единицы пишутся на первомъ — отъ правой руки — мѣстѣ, десятки — на второмъ) и о значеніи нуля.

Учитель пишетъ на классной доскѣ цифру 4 и спрашиваетъ.

— Какое число обозначилъ я? Чего четыре: десятка или единицы? (Пишетъ 8 десятковъ). Теперь какое число обозначилъ я? Для того, чтобы обозначить восемь десятковъ, я написалъ слово «десятковъ» послѣ цифры 8. Но можно обойтись и безъ этого: не писать слова «десятковъ». Будемъ писать числа въ двухъ клѣточкахъ (чертитъ |__|__|) и сдѣлаемъ такой уговоръ: если цифра написана въ правой клѣточкѣ, то она будетъ означать единицы; а если въ лѣвой, то десятки. (Пишетъ 7 въ лѣвой клѣткѣ |7|__|). Какое число написалъ я?

— Семь десятковъ, семьдесятъ.

— Почему цифра 7 означаетъ 7 десятковъ?

— По уговору: она написана въ лѣвой клѣточкѣ.

Учитель стираетъ цифру 7 и ставитъ цифру 9 въ правой клѣткѣ: |__|9|.

— Теперь какое число написано? Почему цифра 9 означаетъ 9 единицъ?

— По уговору: она написана въ правой клѣточкѣ.

Слѣдуютъ упражненія.

— Поди, напиши число 5. Почему поставилъ онъ цифру 5 въ правой клѣточкѣ? Ступай, напиши 3 десятка. Почему поставилъ онъ цифру 3 въ лѣвой клѣточкѣ?

Затѣмъ учитель скажетъ.

— Мѣсто въ правой клѣточкѣ будемъ называть *первымъ мѣстомъ*, а мѣсто въ лѣвой клѣточкѣ назовемъ *вторымъ мѣстомъ*. На какомъ

мѣстѣ пишемъ мы единицы? На какомъ десятки? (Пишетъ | 5 | |). Какое число написалъ я? Почему цифра 5 означаетъ десятки?

— Потому что она стоитъ на второмъ мѣстѣ.

— Если я сотру обѣ клѣточки (стираетъ ихъ), тогда какое число будетъ написано?

— Число пять.

— Чего пять?

— Пять единицъ.

— Вѣрно: безъ клѣточекъ не видно, что цифра 5 стоитъ на второмъ мѣстѣ, и мы должны считать, что она означаетъ единицы. (Чертитъ снова клѣтки: | 5 | |). Теперь я сотру только лѣвую клѣточку, а правую оставлю. (5 □). Какъ прочитаете вы написанное число?

— Пять десятковъ, пятьдесятъ.

— Почему цифра 5 означаетъ десятки?

— Потому что она стоитъ на второмъ мѣстѣ.

— Откуда видно, что цифра 5 стоитъ на второмъ мѣстѣ?

— На первомъ мѣстѣ ничего не написано, оно пустое.

— Да, хотя на первомъ мѣстѣ и ничего не написано, но мѣсто все-таки оставлено; значитъ, цифра 5 будетъ уже на второмъ мѣстѣ. (Пишетъ 2 □). Какое число написалъ я? Поди, напиши тридцать. Напиши девяносто.

Ученики пишутъ 3 □, 9 □.

— Чертить клѣтку долго, неудобно; вмѣсто нея пишутъ кружокъ.

Учитель замѣняетъ въ написанныхъ примѣрахъ пустую клѣтку кружкомъ и заставляетъ учениковъ снова прочитать написанныя числа. Затѣмъ пишетъ 70, 40, 80 и т. д., а дѣти читаютъ. Послѣ этого учитель диктуетъ круглые десятки, ученики пишутъ ихъ.

— Слушайте, дѣти: кружокъ, которымъ мы замѣняли пустую клѣточку, есть также цифра; ее называютъ *нуль*. Если мы напишемъ какую-нибудь цифру, напр. 6, и справа поставимъ нуль (пишетъ 60), что тогда будетъ означать цифра 6? Почему она будетъ означать 6 десятковъ?

— Потому что будетъ стоять на второмъ мѣстѣ.

— Вѣрно: нуль, который мы написали справа, показываетъ, что первое мѣсто пустое, а потому цифра 6 будетъ на второмъ мѣстѣ.

— Ступай, напиши число десять. Вы уже раньше писали это число. Теперь вы понимаете, почему число десять пишется такъ. На какомъ мѣстѣ написана цифра 1? Что же означаетъ эта цифра?

Въ заключеніе надо показать дѣтямъ, какъ пишется число сто; но при этомъ можно не входить въ разъясненія по поводу третьей счетной единицы и третьяго мѣста.

Примѣчаніе. Послѣ нумераціи круглыхъ десятковъ можно было бы пройти нумерацію чиселъ, состоящихъ изъ десятковъ и единицъ. Однако лучше перейти къ послѣдней послѣ ряда упражненій съ круглыми десятками. Въ нашемъ сборникѣ, въ виду нѣкоторыхъ внѣшнихъ удобствъ, мы помѣстили въ одномъ и томъ же отдѣлѣ упражненія, относящіяся къ изученію нумераціи до ста вообще.

18. Дѣйствія надъ круглыми десятками. Упражняясь въ вычисленіяхъ съ круглыми десятками, дѣти должны привыкнуть смотрѣть на десятокъ какъ на единицу, что весьма важно въ смыслѣ подготовки къ усвоенію понятій о различныхъ счетныхъ единицахъ и о десятичномъ составѣ чиселъ, — понятій, необходимыхъ при дальнѣйшемъ изученіи нумераціи и дѣйствій. Вычисленія съ круглыми десятками требуютъ только тѣхъ знаній, какія пріобрѣтены изученіемъ дѣйствій въ предѣлѣ десяти, а слѣдовательно, между прочимъ, служатъ повтореніемъ пройденнаго. Такъ, напр., чтобы прибавить двадцать къ сорока, разсуждаемъ: сорокъ — это четыре десятка, двадцать — два десятка; къ четыремъ прибавить два — будетъ шесть; къ четыремъ десяткамъ прибавить два десятка — будетъ шесть десятковъ, или: къ сорока прибавить двадцать — будетъ шестьдесятъ; 40+20=60. Въ случаѣ какихъ-либо затрудненій со стороны учениковъ, можно пользоваться наглядными пособіями: брусками ариѳметическаго ящика или пучками по десяти палочекъ.

Для упражненій съ круглыми десятками могутъ служить задачи №№ 1—83 и примѣры №№ 1—30 нашего сборника. (Годъ первый, стран. 39—48.)

Десятки вмѣстѣ съ единицами.

19. Устная нумерація. Когда ученики въ достаточной мѣрѣ освоились съ десяткомъ, какъ счетной единицей, можно пройти нумерацію чиселъ, состоящихъ изъ десятковъ и единицъ вмѣстѣ, такъ какъ дѣти уже подготовлены къ пониманію десятичнаго состава чиселъ: они знаютъ, что есть числа, которыя состоятъ только изъ единицъ; есть числа, которыя состоятъ только изъ десятковъ; они легко поймутъ, что всякое другое число (въ предѣлѣ сотни) состоитъ изъ десятковъ и единицъ вмѣстѣ.

— У меня на столѣ много палочекъ. Что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько ихъ? Вспомните, какъ уже раньше считали мы палочки? (Какъ узнать, сколько тутъ палочекъ, умѣя считать только до десяти?)

Нѣсколько учениковъ, вызванныхъ къ столу, набираютъ десятки палочекъ и связываютъ ихъ въ пучки.

— Всѣ ли палочки связаны въ пучки? Сосчитайте, сколько палочекъ остались несвязанными? (6). Вы сосчитали сейчасъ тѣ палочки, которыя остались несвязанными. Что теперь надо пересчитать?

— Теперь надо пересчитать пучки.

— Сколько палочекъ въ пучкѣ? Какъ же можно назвать пучокъ?

— Десяткомъ.

— Сосчитайте, сколько вышло у насъ десятковъ? (8). Скажите же, сколько на столѣ палочекъ?

— Восемь десятковъ и шесть палочекъ, восемьдесятъ (и) шесть палочекъ.

— Когда считаютъ предметы, то какъ называется каждый отдѣльный предметъ? Вспомните.

— Единицей.

— Что считали мы сначала? Что было у насъ единицей?

— Палочка.

— Что считали мы потомъ? Что тогда было единицей?

— Пучокъ, десятокъ.

— Я уже говорилъ вамъ, что когда считаютъ предметы по одному, то каждый предметъ есть простая единица. А десятокъ будетъ единица составная, или сложная, потому что онъ состоитъ изъ простыхъ единицъ. Какія же счетныя единицы вы знаете?

— Простую единицу и десятокъ.

Слѣдуютъ упражненія, ведущія къ усвоенію учениками десятичнаго состава чиселъ. Упражненія эти двухъ родовъ: 1) составленіе числа по даннымъ его десяткамъ и единицамъ и 2) разложеніе даннаго числа на его десятки и единицы.

Напомнивъ дѣтямъ объ условіи считать кубикъ за простую единицу, а брусокъ за десятокъ, учитель обозначаетъ различныя числа помощью брусковъ и кубиковъ, а дѣти называютъ эти числа; и обратно, учитель называетъ числа, а ученики обозначаютъ ихъ брусками и кубиками.

— Сколько брусковъ и сколько кубиковъ поставилъ я на планку? Что означаютъ 6 брусковъ? Что означаютъ 5 кубиковъ? Какъ назовете вы число, которое состоитъ изъ 6-ти десятковъ и 5-ти единицъ? (Шестьдесятъ и пять, короче — шестьдесятъ пять). Какое же число обозначено брусками и кубиками?

— Сколько десятковъ и сколько единицъ въ числѣ сорокъ семь? Какъ обозначить его брусками и кубиками? Ступай, обозначь.

На нумераціи чиселъ второго десятка (отъ одиннадцати и кончая девятнадцатью) надо остановиться отдѣльно, такъ какъ нумерація этихъ чиселъ представляетъ особенность, заключающуюся въ томъ, что здѣсь названія единицъ предшествуютъ названію десятка и сливаются съ нимъ въ одно слово.

Учитель кладетъ брусокъ на планку доски и спрашиваетъ:

— Какое число обозначилъ я?

— Число десять.

На брусокъ ставится кубикъ.

— Кто скажетъ, какое число теперь обозначено?

Многіе ученики отвѣтятъ: одиннадцать. Учителю придется только объяснить это слово.

— Вѣрно. Я поставилъ одинъ кубикъ на десять кубиковъ; вышло: одинъ на десять, короче — одиннадцать.

Если ученики достаточно подвинулись въ чтеніи и письмѣ, то это числительное, а равно и слѣдующія за нимъ (кончая девятнадцатью), могутъ быть записаны учителемъ на классной доскѣ и — въ видѣ самостоятельной работы — списаны учениками на свои доски (въ тетради).

Учитель держитъ въ рукѣ пучокъ палочекъ.

— Какое число показываю я вамъ?

Кладетъ на пучокъ двѣ отдѣльныя палочки.

— Какое теперь будетъ число?

Многіе ученики отвѣтятъ: двѣнадцать.

— Вѣрно. Я положилъ двѣ палочки на десять палочекъ; набавилъ, накинулъ, двѣ палочки на десять палочекъ; вышло: двѣ на десять, короче — двѣнадцать.

— Если къ двѣнадцати палочкамъ прибавить еще одну палочку, то сколько будетъ палочекъ сверхъ десяти?

— Сверхъ десяти будетъ три палочки.

— Какъ же назвать это число?

— Тринадцать.

Такъ идетъ ознакомленіе дѣтей съ числительными до двадцати.

Считаемъ полезнымъ провести непрерывный счетъ до ста и отъ ста.

— Я поставилъ на планку доски два бруска. Какое число они обозначаютъ? Ставлю еще одинъ кубикъ. Какое число теперь обозначено?

— Двадцать одинъ.

— Давайте считать дальше по порядку. Считай ты.

— Двадцать два, двадцать три..., двадцать девять, тридцать, тридцать одинъ, тридцать два.

— А ты продолжай.

Такъ идетъ прямой счетъ до ста. Послѣ этого ученики ведутъ обратный счетъ отъ ста: сто, девяносто девять, девяносто восемь...

Единственное затрудненіе, которое приходится наблюдать при непрерывномъ счетѣ, — это переходъ черезъ круглые десятки, особенно когда ведется обратный счетъ. Иногда можно услышать отъ дѣтей: тридцать восемь, тридцать девять, тридцать десять. Считая назадъ: сорокъ три, сорокъ два, сорокъ одинъ, сорокъ, — ученикъ иногда остановится на круглыхъ десяткахъ и далѣе не идетъ. Въ такихъ случаяхъ весьма удобно прибѣгнуть къ нагляднымъ пособіямъ.

— Мы насчитали тридцать девять. Обозначимъ это число брусками и кубиками. Прибавимъ сюда еще одинъ кубикъ. Сколько стало у насъ отдѣльныхъ кубиковъ? Чѣмъ можно ихъ замѣнить? Замѣнимъ. Чѣмъ же обозначено теперь полученное число? Какое число обозначаютъ четыре бруска?

— Считая назадъ, мы дошли до сорока двухъ. Обозначимъ это число пучками и палочками. Отнимемъ отсюда одну палочку. Какое число останется? Отнимемъ еще палочку, какое число получится Теперь у насъ остались только четыре пучка. Какъ же отнять отсюда еще одну палочку? Да, надо одинъ пучокъ развязать и изъ него взять палочку. (Надо одинъ десятокъ раздробить въ единицы, размѣнять на единицы, и взять отсюда одну единицу.) Сколько пучковъ осталось

теперь, и сколько сверхъ того отдѣльныхъ палочекъ? Какое же это будетъ число?

Послѣ непрерывнаго счета не лишне продѣлать, уже безъ наглядныхъ пособій, еще нѣсколько упражненій въ составленіи числа по даннымъ его десяткамъ и единицамъ и въ разложеніи даннаго числа на его десятки и единицы (№№ 5 и 6 нашего сборника: счетъ до ста, стран. 38 и 39).

20. Письменная нумерація. Проходя письменную нумерацію круглыхъ десятковъ, ученики уже получили понятіе о мѣстномъ значеніи цифръ: единицы пишутся на первомъ мѣстѣ, десятки на второмъ. Напомнивъ дѣтямъ о мѣстахъ единицъ и десятковъ, легко познакомить учениковъ съ письменнымъ обозначеніемъ чиселъ, состоящихъ изъ десятковъ и единицъ вмѣстѣ.

— Давайте писать числа въ клѣточкахъ, какъ дѣлали это раньше. (Пишетъ |□|5|). Какое число написалъ я? Почему цифра 5 означаетъ простыя единицы?

— Потому что она написана въ правой клѣточкѣ.

— Какъ уговорились мы называть мѣсто въ правой клѣточкѣ?

— Первымъ мѣстомъ.

— На какомъ же мѣстѣ пишутся единицы?

Учитель пишетъ затѣмъ |5|□| и спрашиваетъ.

— Какое число написалъ я? Почему цифра 5 означаетъ десятки?

— Потому что она написана въ лѣвой клѣточкѣ.

— Какъ уговорились мы называть мѣсто въ лѣвой клѣточкѣ? На какомъ же мѣстѣ пишутся десятки?

— Теперь я поставлю цифру 5 и на первомъ мѣстѣ, и на второмъ (пишетъ |5|5|). Что означаетъ цифра 5, написанная на второмъ мѣстѣ? Что означаетъ цифра 5, поставленная на первомъ мѣстѣ? Изъ чего же состоитъ написанное число? Прочитайте его.

— Пятьдесятъ пять.

— Теперь я сотру клѣточки (стираетъ). На какомъ мѣстѣ стоитъ теперь вотъ эта цифра 5?

— На второмъ мѣстѣ.

— Откуда это видно?

— На первомъ мѣстѣ стоитъ другая цифра 5.

— Какъ же прочитать это число?

— Пятьдесятъ пять.

— Вы видите, что числа можно писать и безъ клѣточекъ. Прочитайте, какое число написалъ я? (пишетъ 49). Почему вы такъ прочитали его?

— Цифра 4 означаетъ 4 десятка (стоитъ на второмъ мѣстѣ), цифра 9 означаетъ 9 простыхъ единицъ (написана на первомъ мѣстѣ): 4 десятка и 9 единицъ — сорокъ девять.

Слѣдуютъ упражненія въ чтеніи чиселъ (№ 7 нашего сборника) и письмѣ ихъ подъ диктовку (№ 8). При этомъ особенное вниманіе надо обратить на числа отъ одиннадцати до двадцати, такъ какъ въ соотвѣтствующихъ имъ числительныхъ названія единицъ предшествуютъ названію десятка.

Въ видѣ самостоятельной работы можно заставить дѣтей писать числа въ порядкѣ прямого и обратнаго счета.

21. Обозначеніе чиселъ на счетахъ. По ознакомленіи съ устной и письменной нумераціей до ста считаемъ не лишнимъ показать дѣтямъ обозначеніе чиселъ на счетахъ и провести на нихъ прямой и обратный счетъ до ста и отъ ста. Эти упражненія будутъ содѣйствовать закрѣпленію понятія о различныхъ счетныхъ единицахъ и о десятичномъ составѣ чиселъ.

Указывая дѣтямъ на классные счеты, учитель спрашиваетъ, по скольку шариковъ надѣто на каждой проволокѣ.

— По десяти, а на двухъ проволокахъ — по четыре.

Мы имѣемъ здѣсь въ виду *русскіе торговые* счеты, какъ пособіе, наиболѣе часто встрѣчающееся въ школахъ по своей доступности [1]). Кромѣ того, мы останавливаемся на русскихъ счетахъ еще потому, что вслѣдъ за упражненіями въ обозначеніи чиселъ на классныхъ счетахъ мы предполагаемъ упражненія на ручныхъ счетахъ, которые раздаются ученикамъ.

— Эти двѣ проволоки, на которыхъ надѣто по 4 шарика, мы пока считать не будемъ, словно бы ихъ и не было. Гдѣ же тогда будетъ нижняя проволока? Эту проволоку будемъ называть первою. Укажите вторую проволоку. Гдѣ будетъ третья проволока? Слушайте, дѣти: каждый шарикъ первой проволоки означаетъ простую единицу, а шарикъ второй проволоки означаетъ десятокъ. Что же означаетъ шарикъ первой проволоки? второй проволоки? Какое число положилъ (обозначилъ) я?

— Четыре.

— Чего четыре? Почему вы говорите, что я положилъ четыре единицы?

Учитель скидываетъ шарики съ первой проволоки и кладетъ 3 шарика на второй.

— Какое число положилъ я? Почему говорите вы, что я положилъ тридцать?

---

[1]) Есть еще т. н. *шведскіе* счеты, проволоки которыхъ вынимаются, и на каждую изъ нихъ можетъ быть надѣто различное число шариковъ. Кромѣ того, въ верхней части рамы шведскихъ счетовъ укрѣплено нѣсколько вертикальныхъ проволокъ; на каждой изъ нихъ можетъ помѣститься по 10 шариковъ. Это приспособленіе назначено служить пособіемъ при выясненіи нумераціи.

— Поди, положи семь. Положи девяносто.

— Какое число положилъ я теперь? (кладетъ 4 шарика на второй проволокѣ и 6 шариковъ на первой).

— Сорокъ шесть.

— Какъ вы это сообразили?

— Четыре шарика на второй проволокѣ — четыре десятка, или сорокъ; шесть шариковъ на первой проволокѣ — шесть единицъ; всего сорокъ шесть.

— Ступай, положи число двадцать четыре. Положи пятьдесятъ семь.

Затѣмъ ученикамъ раздаются ручные счеты.

— Покажите среднiй палецъ на правой рукѣ. Этимъ пальцемъ всего удобнѣе класть шарики (косточки). Положите одну единицу. Скиньте. Положите десятокъ. Скиньте. Положите число два, двадцать; три, тридцать. Одинъ, два, три шарика можно положить сразу, не считая. Положите шесть единицъ. Вы видите, что шесть шариковъ вы клали не сразу: насчитывали ихъ. А это долго. Для того чтобы можно было скорѣе класть числа на счетахъ, два среднiе шарика сдѣланы черными. Поставьте палецъ между черными шариками. Сколько шариковъ налѣво отъ пальца? Положите пять единицъ. Положите пять десятковъ. Поставьте палецъ передъ первымъ чернымъ шарикомъ (налѣво отъ черныхъ шариковъ). Сколько шариковъ тогда положится? Положите четыре единицы. Положите четыре десятка. Поставьте палецъ послѣ второго чернаго шарика (вправо отъ черныхъ шариковъ). Сколько шариковъ мы тогда захватимъ? Положите шесть единицъ. Положите шесть десятковъ. Куда же надо поставить палецъ, когда хотимъ положить пять шариковъ? Когда требуется положить четыре шарика? Когда надо положить шесть шариковъ? (Кладетъ семь шариковъ, оставшiеся закрываетъ рукою). Сколько шариковъ положилъ я? Сколько шариковъ осталось направо? (Сколько шариковъ закрылъ я рукою?) Какъ это узнать? Слушайте, дѣти: когда требуется положить семь шариковъ, то мы сначала сообразимъ въ умѣ, что *направо* должно остаться три шарика, и поставимъ палецъ такъ, чтобы направо отъ него было три шарика. Положите семь. Положите семьдесятъ. Какъ надо поставить палецъ, когда требуется положить восемь шариковъ? положите восемь. Положите восемьдесятъ. Какъ надо поставить палецъ, когда требуется положить девять шариковъ? Положите девять. Положите девяносто.

Послѣ сдѣланныхъ разъясненiй ученики кладутъ на счетахъ различныя числа первой сотни, которыя называетъ имъ учитель.

Весьма полезнымъ упражненiемъ можетъ служить счетъ по одному до ста.

— Положите единицу. Положите еще единицу. Кладите по единицѣ.

Ученики, поочередно, считаютъ при этомъ вслухъ: одинъ, два, три..., девять, десять.

— Вы положили десять шариковъ на первой проволокѣ, десять единицъ. Какъ иначе назвать число десять?

— Десятокъ.

— Что означаетъ каждый шарикъ второй проволоки? Чѣмъ же можно замѣнить десять шариковъ, положенные на первой проволокѣ? Замѣните.

Десять шариковъ скидываются съ первой проволоки, и кладется одинъ шарикъ на второй.

— Положите еще единицу. Какое число теперь положено? Прибавляйте по единицѣ.

Дѣти, поочередно, считаютъ при этомъ вслухъ: одиннадцать, двѣнадцать, тринадцать...

— На первой проволокѣ у васъ стало опять десять шариковъ. Чѣмъ вы замѣните ихъ?

Такъ продолжается до тѣхъ поръ, пока дѣти дойдутъ до числа девяносто девять.

— Прибавьте еще единицу. Сколько шариковъ положено у васъ на первой проволокѣ? Чѣмъ можно замѣнить ихъ? Замѣните. Сколько теперь шариковъ положено на второй проволокѣ? Что означаетъ каждый изъ этихъ шариковъ? Какъ иначе называются десять десятковъ? Не догадается ли кто, чѣмъ можно замѣнить десять шариковъ второй проволоки?

— Ихъ можно замѣнить однимъ шарикомъ на третьей проволокѣ.

— Замѣните. Кокое число положено теперь на счетахъ? Какъ же положить на счетахъ число сто?

Потомъ идетъ обратный счетъ.

На счетахъ положено число сто (одинъ шарикъ на третьей проволокѣ).

— Скиньте одну единицу.

Ученики затрудняются.

— Чѣмъ можно замѣнить шарикъ третьей проволоки?

— Десятью шариками на второй проволокѣ.

— Замѣните. Какое число положено теперь на счетахъ?

— Десять десятковъ.

— Это все равно, что сто, или нѣтъ? Положены ли на счетахъ единицы? А намъ надо скинуть единицу. Какъ же сдѣлать это? Если бы у насъ было нѣсколько пучковъ палочекъ, и намъ надо было бы взять оттуда одну палочку, то мы развязали бы одинъ изъ пучковъ, мы раздробили бы одинъ десятокъ въ единицы. Что же сдѣлаемъ мы здѣсь?

— Раздробимъ одинъ десятокъ въ единицы: скинемъ одинъ шарикъ со второй проволоки и положимъ десять шариковъ на первой.

— Сдѣлайте это. Какое число положено теперь на счетахъ?

— Девять десятковъ и десять единицъ.

— Что больше: десять десятковъ или девять десятковъ въ десятью единицами? А десять десятковъ все равно, что какое число? Значитъ, и сейчасъ у насъ положено на счетахъ число сто. Теперь скиньте единицу. Какое число осталось? Скидывайте по единицѣ.

Дѣти, поочередно, считаютъ при этомъ вслухъ: девяносто девять, девяносто восемь, девяносто семь..., девяносто.

— Вы скинули всѣ шарики съ первой проволоки. Какъ теперь скинуть еще единицу?

— Сначала одинъ десятокъ замѣнить десятью единицами, а потомъ уже скинуть единицу.

Такъ ведется обратный счетъ до конца.

ГЛАВА III.

Первые два десятка.

22. Сложеніе.

Таблица сложенія. Въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ прежде всего надо закончить таблицу сложенія, часть которой (половина) уже знакома ученикамъ послѣ изученія дѣйствій въ предѣлѣ десяти.

Наиболѣе удобный пріемъ табличнаго сложенія за предѣломъ десяти состоитъ въ разложеніи придаваемаго числа на такія двѣ группы, изъ которыхъ одна дополняетъ первое слагаемое до 10. Такъ, чтобы къ 8-ми прибавить 7, разбиваемъ 7 на 2 и 5: $8+7=8+2+5=10+5=15$. Выяснивъ этотъ пріемъ, учитель, для упражненія въ примѣненіи его, рѣшаетъ съ учениками задачи, требующія табличнаго сложенія (вразбивку); потомъ даетъ дѣтямъ подобные же задачи и примѣры для самостоятельнаго рѣшенія. (Задачи №№ 1—20, примѣры №№ 1—35 нашего сборника: годъ первый, стран. 49—50). Послѣ достаточнаго количества такихъ упражненій, на которыхъ ученики перебираютъ, и не разъ, всѣ случаи табличнаго сложенія, можно дать дѣтямъ, въ видѣ самостоятельной работы, составленіе таблицы сложенія въ порядкѣ (стран. 51 нашего сборника), при чемъ слѣдуетъ обратить вниманіе учениковъ на то, что таблицу сложенія надо знать на память (наизусть). Мы полагаемъ, что приведенныхъ нами упражненій вполнѣ достаточно для этого. А если бъ было не такъ, то послѣ составленія таблицы можно заставить дѣтей выучить ее.

Замѣтимъ, что, усвоивая памятью табличные результаты сложенія, ученики будутъ, конечно, пользоваться свойствомъ перемѣстительности (неизмѣняемость суммы отъ перестановки слагаемыхъ); это свойство, подмѣчаемое, впрочемъ, самими учениками, было указано имъ еще въ предѣлѣ

перваго десятка (глава I, § 7); на него же наведетъ дѣтей рѣшеніе примѣровъ, въ которыхъ сопоставлены случаи сложенія, различающіеся перестановкой слагаемыхъ (№№ 7—12).

— Къ 6-ти прибавить 4 — сколько будетъ? Дѣлали вы сейчасъ какой-нибудь счетъ или сказали сразу, на память, что 6 да 4 будетъ 10? А если бы вы забыли это, то какъ стали бы прибавлять 4 къ 6-ти?

— По одному.

— Къ 6-ти прибавить первую единицу — будетъ 7. Продолжайте.

— Къ 7-ми прибавить вторую единицу — будетъ 8; къ 8-ми — третью, будетъ 9; къ 9-ти — четвертую, будетъ 10.

Или такъ:

— Къ 6-ти прибавить 1 — будетъ 7; осталось прибавить 3; къ 7-ми прибавить 1 — будетъ 8; осталось прибавить 2; къ 8-ми прибавить 1 — будетъ 9; осталось прибавить 1; къ 9-ти прибавить 1 — будетъ 10.

— Къ 10-ти прибавить 7 — сколько будетъ? Дѣлали вы сейчасъ какой-нибудь счетъ или сразу узнали, что будетъ 17?

— Узнали сразу.

— Да, вы знаете, что число, которое состоитъ изъ одного десятка и семи единицъ, называется семнадцать (семь сверхъ десяти — семнадцать).

— Къ 8-ми прибавить 6 — сколько будетъ?

Нѣкоторые ученики могутъ отвѣтить вѣрно, другіе нѣтъ.

— Если мы не знаемъ, сколько составятъ 8 и 6, то какъ станемъ прибавлять 6 къ 8-ми?

— По одному. Къ 8-ми прибавить 1 — будетъ 9; осталось прибавить 5; къ 9-ти прибавить 1 — будетъ 10; осталось прибавить 4.

— Къ чему же надо теперь прибавить 4? Какъ прибавите вы 4 къ 10-ти? (Сразу). Сколько будетъ? Сколько же получится, если къ 8-ми прибавить 6? Для того чтобы прибавить 6 къ 8-ми, мы стали сначала прибавлять по одному. До которыхъ поръ шли мы, прибавляя по одному? Надо ли непремѣнно прибавлять по одному, чтобы дойти до 10-ти?

— Можно прибавить сразу 2.

— Какъ же лучше прибавить 6 къ 8-ми?

— Сначала прибавить 2 къ 8-ми, потомъ 4 къ 10-ти.

— Какъ прибавите вы 5 къ 7-ми, если не можете прибавить сразу?

— Съ двухъ разъ: сначала прибавимъ 3 къ 7-ми, будетъ 10; потомъ 2 къ 10-ти, будетъ 12.

— На какія же части разбили вы число 5, для того чтобы прибавить его къ 7-ми?

— Мы разбили 5 на 3 и 2.

— Почему вы разбили 5 на 3 и 2?

— Потому что къ 7-ми надо прибавить 3, чтобы вышло 10.

— А почему мы хотимъ получить 10?

— Потому что тогда остальное прибавимъ къ 10-ти сразу.

Если учитель найдетъ нужнымъ, то спроситъ еще: а какъ узнать, сколько надо прибавить къ 7-ми, чтобы вышло 10? какъ узнать, сколько останется прибавить еще, послѣ того какъ мы приложили 3?

Затѣмъ слѣдуютъ указанныя выше упражненія на задачахъ и примѣрахъ, рѣшаемыхъ учениками съ учителемъ и самостоятельно.

Прежде чѣмъ задать дѣтямъ составленіе таблицы сложенія въ порядкѣ, считаемъ нелишнимъ познакомить учениковъ съ терминами «сложить»[1]), «сложеніе», «однозначное число»; этими терминами можно воспользоваться для того, чтобы сообщить дѣтямъ названіе «таблица сложенія» и указать ея составъ.

На планку доски ставится 5 кубиковъ налѣво и 3 кубика направо.

— Сколько кубиковъ поставилъ я налѣво? Сколько направо? (Придвигаетъ правые кубики къ лѣвымъ). Что я сдѣлалъ, какъ сказать?

— Вы приложили, прибавили, 3 кубика къ 5-ти кубикамъ.

— Къ 5-ти прибавить 3 — сколько будетъ? Поди, запиши это. (5 + 3 = 8).

Кубики ставятся, какъ раньше стояли. Затѣмъ учитель придвигаетъ лѣвые кубики къ правымъ.

Что теперь я сдѣлалъ, какъ сказать?

— Вы прибавили 5 кубиковъ къ 3-мъ кубикамъ.

— Къ 3-мъ прибавить 5 — сколько будетъ? Поди, запиши это. (3+5 = 8). Кубики разставляются попрежнему. Затѣмъ учитель сдвигаетъ тѣ и другіе кубики къ срединѣ планки.

— Что теперь я сдѣлалъ, какъ сказать? Какіе кубики я приложилъ: правые къ лѣвымъ или лѣвые къ правымъ?

— Вы сложили ихъ вмѣстѣ.

— Иногда и говорятъ: *сложить* 5 и 3, вмѣсто того, чтобы сказать: къ 5-ти прибавить 3 или къ 3-мъ прибавить 5. Какъ же можно прочитать то, что написано на доскѣ?

— Сложить 5 и 3 — будетъ 8. Сложить 3 и 5 — будетъ 8.

— Когда мы складываемъ числа, то дѣлаемъ *дѣйствіе*, которое называется *сложеніе*. Какъ же называется то дѣйствіе, которое мы дѣлаемъ, когда складываемъ числа? Сдѣлайте сложеніе чиселъ 9 и 4.

— 9 и 1 будетъ 10; 10 и 3 будетъ 13.

— Сколько надо цифръ, чтобы написать число восемь?

— Одну цифру.

— А сколькими цифрами пишется число сорокъ семь?

— Двумя цифрами.

— Такія числа, которыя пишутся одной цифрою, или однимъ знакомъ, называются *однозначными*. Какія же числа называются однозначными? Переберите всѣ однозначныя числа. Слушайте, дѣти: вы уже складывали всѣ однозначныя числа попарно (одно съ другимъ). Теперь вы еще разъ сложите ихъ въ томъ порядкѣ, какъ показано въ книжкѣ (стран. 51). У васъ получится тогда *таблица сложенія*. Въ этой

---

[1]) Терминъ «сложить», вслѣдствіе его простоты, ученики могли сами ввести раньше.

таблицѣ сложены всѣ однозначныя числа другъ съ другомъ. Таблицу эту вы должны знать наизусть, т.-е. если васъ спросятъ, сколько 8 да 7, сколько 6 да 6 и т. д., вы должны отвѣчать сразу, на память.

Внѣтабличное сложеніе. Въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ, кромѣ сложенія однозначныхъ чиселъ (табличнаго сложенія), можетъ имѣть мѣсто сложеніе двузначнаго числа съ однозначнымъ и наоборотъ. На простѣйшемъ изъ этихъ случаевъ, именно сложеніи десятка съ единицами (10+7, 6+10), особо останавливаться здѣсь не надо, такъ какъ случай этотъ много разъ встрѣчался при составленіи таблицы сложенія. Тутъ придется разсмотрѣть сложеніе двузначнаго числа съ однозначнымъ, когда сумма менѣе 20 (15+2, 4+14), и когда сумма эта равна 20 (16+4, 8+12). Сложеніе такихъ чиселъ уже даетъ начало общему правилу сложенія (складывать числа по разрядамъ), хотя здѣсь разбивается на десятичныя группы (разряды) только одно изъ слагаемыхъ.

Учитель пишетъ 14 + 3.

— Читайте. Сколько будетъ?

Большинство учениковъ даютъ правильный отвѣтъ, или доходя до него путемъ присчитыванія по единицѣ (15, 16, 17), или придавая сразу 3 къ единицамъ перваго слагаемаго. Дѣло учителя довести дѣтей до сознательнаго усвоенія этого послѣдняго пріема. Записавши названную сумму (14 + 3 = 17), учитель спроситъ:

— Сколько десятковъ въ 14-ти? А сколько десятковъ въ 17-ти? Сколько единицъ въ 14-ти? А сколько единицъ въ 17-ти? Вы видите, что десятокъ, какъ былъ одинъ, такъ и остался одинъ. Къ чему же прибавили вы 3 единицы?

— Къ 4-мъ единицамъ.

— Вотъ видите: для того чтобы прибавить 3 къ 14-ти, надо разложить 14 на десятокъ и 4 единицы и прибавить 3 единицы къ 4-мъ единицамъ. Къ 4-мъ прибавить 3 — сколько будетъ? Къ чему же теперь надо приложить 7 единицъ? Къ 10 прибавить 7 — сколько будетъ? А какъ прибавили вы 7 къ 10-ти: сразу или нѣтъ? Да, сразу: вы знаете, что число, которое состоитъ изъ десятка и 7-ми единицъ, называется семнадцать.

Слѣдуютъ примѣры.

Затѣмъ учитель пишетъ 5 + 13.

— Читайте. Сколько будетъ?

Многіе ученики дадутъ вѣрный отвѣтъ; на вопросъ: какъ вы это узнали? могутъ сказать: къ 13-ти прибавили 5, переставили числа. Одобривъ этотъ пріемъ, учитель спроситъ:

— А какъ можно иначе прибавить 13 къ 5-ти? Изъ чего состоитъ число 13? Прибавимъ сначала 10 къ 5-ти. Сколько будетъ? Что теперь

надо прибавить? Къ чему надо прибавить 3? Умѣемъ ли мы прибавить 3 къ 15-ти? Да, умѣемъ: мы уже раньше дѣлали это.

Этотъ пріемъ имѣетъ значеніе подготовки къ сложенію двузначныхъ чиселъ.

Слѣдуютъ примѣры.

Затѣмъ разсматривается сложеніе двузначнаго числа съ однозначнымъ, когда въ суммѣ получается 20.

Для упражненія въ сложеніи въ предѣлѣ двухъ десятковъ могутъ служить задачи №№ 21—30 и примѣры №№ 36—47 нашего сборника.

23. Вычитаніе.

Таблица вычитанія. Въ разсматриваемомъ предѣлѣ прежде всего надо закончить таблицу вычитанія (она содержитъ однозначныя разности при однозначномъ вычитаемомъ), часть которой (половина) уже знакома ученикамъ послѣ изученія дѣйствій въ предѣлѣ десяти.

Наиболѣе удобный пріемъ табличнаго вычитанія за предѣломъ десяти состоитъ въ разложеніи вычитаемаго числа на такія двѣ группы, изъ которыхъ одна (отнимаемыя сначала) равна единицамъ уменьшаемаго. Такъ, чтобы отъ 12-ти отнять 5, разбиваемъ 5 на 2 и 3; $12-5=12-2-3=10-3=7$. Выяснивъ этотъ пріемъ, учитель, для упражненія въ примѣненіи его, рѣшаетъ съ учениками задачи, требующія табличнаго вычитанія (вразбивку); затѣмъ даетъ дѣтямъ подобныя же задачи и примѣры для самостоятельнаго рѣшенія. (Задачи №№ 31—49, примѣры №№ 48—59 нашего сборника.)

Такъ какъ всѣ табличныя вычитанія могутъ быть выполнены при помощи таблицы сложенія, то иногда считаютъ излишнимъ составленіе и изученіе особой таблицы вычитанія. Однако мы считаемъ не лишнимъ поупражнять дѣтей въ примѣненіи вышеизложеннаго пріема вычитанія. Потомъ можно указать ученикамъ пользованіе для той же цѣли таблицей сложенія. Этотъ послѣдній пріемъ, уясняющій связь между сложеніемъ и вычитаніемъ, могъ быть показанъ дѣтямъ и раньше (глава I, § 7).

Послѣ достаточнаго количества упражненій, на которыхъ ученики перебираютъ, и не разъ, всѣ случаи табличнаго вычитанія, можно дать дѣтямъ, въ видѣ самостоятельной работы, составленіе таблицы вычитанія въ порядкѣ (стр. 56 нашего сборника).

— Отъ 10-ти отнять 3 — сколько останется? Дѣлали вы сейчасъ какой-нибудь счетъ или сказали сразу, на память, что 10 безъ 3-хъ будетъ 7? А если бы вы позабыли это, то какъ стали бы отнимать 3 отъ 10-ти?

— По одному.

— Отъ 10-ти отнять первую единицу — сколько останется? Продолжайте.

— Отъ 9-ти отнять вторую единицу — останется 8; отъ 8-ми отнять третью единицу — останется 7.

Или такъ:

— Отъ 10-ти отнять 1 — будетъ 9; осталось отнять 2; отъ 9-ти отнять 1 — будетъ 8; осталось отнять еще 1; отъ 8-ми отнять 1 — будетъ 7.

— Отъ 14-ти отнять 4 — сколько останется? Дѣлали вы сейчасъ какой-нибудь счетъ или сразу узнали, что останется 10? Да, сразу: вы знаете, что 14 состоитъ изъ 10-ти и 4-хъ; если отнять 4, то останется 10.

— Отъ 12-ти отнять 5 — сколько останется?

Нѣкоторые ученики могутъ отвѣтить вѣрно, другіе нѣтъ.

— Если мы не знаемъ, сколько будетъ 12 безъ 5-ти, то какъ станемъ отнимать 5 отъ 12-ти? Вы уже умѣете отнимать сразу отъ 10-ти. Что еще есть въ 12-ти сверхъ 10-ти? Сколько надо отнять отъ 12-ти, чтобы осталось 10? Если мы уже отняли 2, а всего намъ надо отнять 5, то сколько намъ придется еще отнимать? Откуда надо отнять 3? Какъ отнимете вы 3 отъ 10-ти? (Сразу). Повторите, какъ отняли мы 5 отъ 12-ти? На какія части разбили мы число 5, для того чтобы отнять его отъ 12-ти? Почему разбили мы 5 на 2 и 3?

— Потому что отъ 12-ти надо отнять 2, чтобы осталось 10.

— А почему мы хотимъ, чтобы осталось 10?

— Потому что тогда остальное отнимемъ отъ 10-ти сразу.

Пользованіе для вычитанія таблицей сложенія можно указать дѣтямъ подобно тому, какъ это изложено нами раньше: глава I, конецъ § 7.

Прежде чѣмъ задать дѣтямъ составленіе таблицы вычитанія въ порядкѣ, считаемъ нелишнимъ познакомить учениковъ съ терминами «вычесть», «вычитаніе» послѣ чего можно сообщить и названіе «таблица вычитанія»

Внѣтабличное вычитаніе. Кромѣ таблицы вычитанія, въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ могутъ имѣть мѣсто слѣдующіе случаи этого дѣйствія: 1) вычитаніе числа перваго десятка изъ числа второго десятка (однозначнаго изъ двузначнаго): 17—4, 20—6 (простѣйшій изъ этихъ случаевъ — вычитаніе изъ числа второго десятка его единицъ, напр. 16—6, уже встрѣчался при составленіи таблицы вычитанія); 2) вычитаніе числа второго десятка изъ числа второго десятка: 14—12, 20—18. Вычитаніе такихъ чиселъ уже даетъ начало общему правилу этого дѣйствія: вычитать по разрядамъ.

Учитель пишетъ 17—3.

— Читайте. Сколько будетъ?

Большинство учениковъ даютъ вѣрный отвѣтъ, или доходя до него путемъ отсчитыванія по единицѣ (16, 15, 14), или отнимая сразу 3 отъ единицъ уменьшаемаго. Дѣло учителя довести дѣтей до сознательнаго усвоенія этого послѣдняго пріема. Записавши названный остатокъ (17 — 3 = 14), учитель спроситъ:

— Сколько десятковъ въ 17-ти? А сколько десятковъ въ 14-ти? Сколько единицъ въ 17-ти? А сколько единицъ въ 14-ти? Вы видите, что десятокъ, какъ былъ одинъ, такъ и остался одинъ. Откуда же отняли мы 3 единицы?

— Отъ 7-ми единицъ.

— Вотъ видите: для того, чтобы отнять 3 отъ 17-ти, надо разложить 17 на десятокъ и 7 единицъ и отнять 3 единицы отъ 7-ми единицъ. Отъ 7-ми отнять 3 — сколько останется? Что еще останется сверхъ 4-хъ? Сколько же получится, когда отъ 17-ти отнимемъ 3?

Слѣдуютъ примѣры.

Далѣе учитель пишетъ 20 — 2.

— Читайте. Сколько будетъ? (Получивъ отвѣтъ, записываетъ 20 — 2 = 18.) Изъ чего состоитъ число 20? Сколько осталось цѣлыхъ десятковъ? Сколько осталось отъ другого десятка? Вотъ видите: чтобы отнять 2 отъ 20-ти, надо разложить 20 на 10 и 10; одинъ десятокъ такъ и оставить, а отъ другого отнять 2. Отъ 10-ти отнять 2 — сколько будетъ? Сколько останется еще сверхъ 8-ми? Сколько же получится, если отъ 20-ти отнять 2?

Изложенный процессъ вычитанія полезно показать дѣтямъ наглядно: обозначить число 20 пучками по десяти палочекъ, развязать одинъ изъ пучковъ (раздробить десятокъ въ единицы) и взять изъ него двѣ палочки.

Слѣдуютъ примѣры.

Вычитаніе двузначнаго числа изъ двузначнаго начнемъ вычитаніемъ одного десятка. Учитель пишетъ 16 — 10.

— Читайте. Сколько получится? Какъ отняли вы 10 отъ 16-ти: сразу или нѣтъ? Да, вы знаете, что 16 состоитъ изъ 10-ти и 6-ти; отнимемъ 10 — останется 6.

— Отъ 18 отнимите 15 (18 — 15). Сколько останется?

Ученики, назвавши вѣрно остатокъ, могутъ затрудниться въ отвѣтѣ на вопросъ: какъ отняли вы 15 отъ 18-ти?

— Изъ чего состоитъ число 15? Отнимемъ сначала 10; сколько останется? Что теперь надо отнять? Откуда надо отнять 5? Сколько получится? Сколько же останется, если отъ 18-ти отнять 15? Повторите, какъ отняли мы 15 отъ 18-ти?

Примѣры.

Подобнымъ же образомъ выполняется вычитаніе двузначнаго числа изъ 20-ти, напр. 20 — 14.

Для упражненія въ вычитаніи въ предѣлѣ двухъ десятковъ могутъ служить задачи №№ 50—61 и примѣры №№ 60—70 нашего сборника.

Когда дѣти усвоятъ на память таблицы сложенія и вычитанія и познакомятся съ выполненіемъ этихъ дѣйствій внѣ таблицъ (въ предѣлѣ 20-ти), можно поупражнять учениковъ въ рѣшеніи задачъ и примѣровъ на сложеніе и вычитаніе вмѣстѣ (задачи №№ 62—73, примѣры №№ 78—94).

24. Умноженіе. Сложеніе и вычитаніе въ предѣлѣ 20-ти позволяютъ подвинуть далѣе и таблицы остальныхъ двухъ дѣйствій, нѣкоторые результаты которыхъ уже знакомы дѣтямъ послѣ изученія перваго десятка.

Напомнивъ ученикамъ значеніе выраженія «взять, или повторить, нѣсколько разъ» и знака $\times$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и способъ выполненія этого дѣйствія путемъ сложенія, слѣдуетъ указать дѣтямъ на удобство пользоваться уже знакомыми результатами дѣйствія для полученія результатовъ новыхъ; такъ, умѣя брать сразу, на память, 2, 3, 4 и 5 двоекъ (предѣлъ перваго десятка), мы наберемъ 7 двоекъ, взявши сначала 5 двоекъ, потомъ 2 двойки (или 4 двойки и 3 двойки).

Учитель пишетъ $3 + 3 + 3 + 3 + 3$.

— Читайте.

— Къ 3-мъ прибавить 3, еще прибавить 3, еще прибавить 3 и еще прибавить 3.

— Прибавляйте.

— Къ 3-мъ прибавить 3, будетъ 6; къ 6-ти прибавить 3, будетъ 9; къ 9-ти прибавить 3, будетъ 12; къ 12-ти прибавить 3, будетъ 15.

Результатъ записывается: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$.

— Какъ короче можно прочитать то, что написано?

— 3 повторить 5 разъ — будетъ 15.

— Какъ короче можно записать это? Ступай, запиши.

Ученикъ пишетъ $3 \times 5 = 15$.

— Для того, чтобы 3 повторить 5 разъ, мы сейчасъ набирали по одной тройкѣ. Нельзя ли сдѣлать это скорѣе?

— Можно набирать по 2 тройки, по 3 тройки.

— Самое бо́льшее — сколько троекъ вы уже умѣете взять сразу, на память? (Самое бо́льшее — сколько троекъ вамъ уже раньше приходилось брать сразу?)

— 3 тройки.

Учитель соединяетъ 3 тройки, напр. обводя ихъ кривой линіей или подчеркивая: $\underline{3 + 3 + 3} + 3 + 3$.

— 3 тройки — это сколько (единицъ)? Сколько троекъ намъ осталось еще взять? 2 тройки — это сколько? Что теперь надо сдѣлать?

— Къ 9-ти прибавить 6; будетъ 15.

— Какъ же набрали мы 5 троекъ?

— Сначала взяли (сразу) 3 тройки, потомъ 2 тройки.

— Да, сначала мы повторили тройку 3 раза, потомъ 2 раза. Какъ удобно 2 повторить 7 разъ?

— Сначала 2 повторить 5 разъ, будетъ 10; потомъ 2 повторить 2 раза, будетъ 4; къ 10 прибавить 4, получится 14.

Для упражненія въ примѣненіи указаннаго пріема и вмѣстѣ съ тѣмъ для усвоенія на память табличныхъ результатовъ умноженія могутъ служить задачи №№ 74—95 и примѣры №№ 95—110 нашего сборника, содержащіе (вразбивку) всѣ случаи табличнаго умноженія въ предѣлѣ второго десятка.

Примѣчаніе 1. Въ разсматриваемомъ предѣлѣ, кромѣ табличнаго умноженія, можетъ имѣть мѣсто умноженіе единицы на число второго десятка, напр. 1×17, затѣмъ умноженіе 10-ти на 2 (одинъ десятокъ повторить 2 раза — будетъ 2 десятка, или 20; этотъ случай уже встрѣчался раньше, въ отдѣлѣ круглыхъ десятковъ) и умноженіе 2-хъ на 10; ученики могутъ набрать 10 двоекъ такъ же, какъ набирали они иное число ихъ: 2 повторить 5 разъ, будетъ 10; еще 2 повторить 5 разъ, будетъ 10; 10 да 10 будетъ 20; можно указать дѣтямъ и особый пріемъ умноженія на 10: одну единицу повторить 10 разъ, будетъ десять, или десятокъ; другую единицу повторить 10 разъ, будетъ еще десятокъ; всего 2 десятка, или 20; умноженіе 2-хъ на 10 является здѣсь единственнымъ случаемъ примѣненія этого пріема.

Примѣчаніе 2. При рѣшеніи примѣровъ №№ 101—106 ученики могутъ еще разъ (глава 1, § 11) обратить вниманіе на неизмѣняемость результата умноженія при перестановкѣ данныхъ, а также на составъ нѣкоторыхъ чиселъ изъ различныхъ множителей (12 состоитъ изъ 6-ти двоекъ или 2-хъ шестерокъ, изъ 4-хъ троекъ или 3-хъ четверокъ).

25. Дѣленіе. Здѣсь, какъ и раньше, мы считаемъ преждевременнымъ объединять оба вида дѣленія и предлагаемъ различать ихъ, употребляя такія выраженія, какъ «12 раздѣлить на 3 равныя части» и «12 раздѣлить на тройки». То и другое дѣленіе можетъ быть выполнено: 1) путемъ разложенія дѣлимаго на группы съ цѣлью воспользоваться уже знакомыми результатами дѣленія: чтобы раздѣлить 14 пополамъ, раздѣлимъ пополамъ сначала 10, потомъ 4; чтобы раздѣлить 18 на тройки, раздѣлимъ на тройки 9, потомъ

еще 9; 2) при помощи таблицы умноженія: для раздѣленія 14-ти пополамъ припоминаемъ, какое число надо повторить 2 раза, чтобы получить 14; для раздѣленія 18-ти на тройки припоминаемъ, сколько разъ надо повторить тройку, чтобы получить 18

— Ученикъ сшилъ 2 одинаковыхъ тетради изъ 14-ти листовъ бумаги. Какъ узнать, сколько листовъ пошло на каждую тетрадь?

— Надо 14 раздѣлить на 2 равныя части, пополамъ.

— Самое бóльшее — сколько вы умѣете раздѣлить пополамъ сразу, на память? (Самое бóльшее — сколько вамъ уже приходилось дѣлить пополамъ?).

— Самое бóльшее — 10.

— Какъ же раздѣлите вы 14 пополамъ?

— 10 раздѣлить пополамъ, будетъ 5; 4 раздѣлить пополамъ, будетъ 2; 5 да 2 — 7

— Сколько же будетъ, если 14 раздѣлить на 2 равныя части? Запишите это (14 : 2 = 7). Сколько листовъ бумаги пошло на каждую тетрадь?

— Мальчикъ разложилъ 15 орѣховъ на кучки, по 3 орѣха въ каждой. Какъ узнать, сколько вышло такихъ кучекъ?

— Надо 15 раздѣлить на тройки.

— Самое бóльшее — какое число вы умѣете раздѣлить на тройки сразу?

— Самое бóльшее — 9.

— Если вы сначала раздѣлите на тройки 9, то потомъ что еще надо будетъ раздѣлить?

— Потомъ надо будетъ раздѣлить 6.

— А какъ узнать, что потомъ надо будетъ раздѣлить 6?

— Отъ 15-ти отнять 9 — останется 6.

— Такъ какъ же раздѣлить 15 на тройки?

— 9 раздѣлить на тройки, будетъ 3 тройки; 6 раздѣлить на тройки, выйдетъ 2 тройки; 3 да 2 — всего 5 троекъ.

— 15 раздѣлить на тройки — сколько будетъ (троекъ)? Запишите это (15 : 3 = 5). На сколько же кучекъ разложилъ мальчикъ орѣхи?

Послѣ достаточнаго количества упражненій въ примѣненіи изложеннаго пріема дѣленія слѣдуетъ указать дѣтямъ на пользованіе для той же цѣли знакомыми случаями табличнаго умноженія.

— За 4 карандаша заплачено 20 копеекъ. Какъ узнать, сколько стоитъ одинъ карандашъ? Я скажу вамъ, что карандашъ стоитъ 3 копейки. Вѣрно ли это? Почему нѣтъ?

— Потому что тогда за карандаши было бы заплачено 12 копеекъ.

— А какъ узнать, что тогда за карандаши было бы заплачено 12 копеекъ?

— 3 повторить 4 раза, будетъ 12.

— Можетъ быть, карандашъ стоитъ 4 копейки? Почему нѣтъ?

— 4 повторить 4 раза, будетъ только 16.

— А если мы скажемъ, что карандашъ стоитъ 5 копеекъ, будетъ ли это такъ? Почему такъ? Вотъ видите: чтобы раздѣлить 20 на 4 равныя части, нужно припомнить: какое число надо повторить 4 раза, чтобы получилось 20.

— Крестьянинъ пошелъ изъ деревни въ село, до котораго 18 верстъ; каждый часъ проходилъ онъ по 3 версты. Какъ узнать, во сколько часовъ дошелъ онъ до села?

— Надо 18 раздѣлить на тройки.

— Я скажу вамъ, что крестьянинъ дошелъ въ 4 часа. Вѣрно ли это? Почему нѣтъ?

— Потому что въ 4 часа онъ пройдетъ только 12 верстъ.

— А какъ это узнать?

— 3 повторить 4 раза — будетъ 12.

— Можетъ-быть, онъ дошелъ въ 5 часовъ? Почему нѣтъ? Не въ 6 ли часовъ дошелъ онъ до села? Почему такъ? Вотъ видите: чтобы раздѣлить 18 на тройки, нужно припомнить: сколько разъ надо повторить тройку, чтобы получить 18.

Для упражненія въ примѣненіи изложенныхъ пріемовъ дѣленія и вмѣстѣ съ тѣмъ для усвоенія памятью табличныхъ результатовъ дѣленія могутъ служить задачи №№ 96—118 и примѣры №№ 111—112 нашего сборника, содержащіе (вразбивку) всѣ случаи табличнаго дѣленія въ предѣлѣ второго десятка.

Примѣчаніе. Кромѣ табличнаго дѣленія здѣсь можетъ имѣть мѣсто дѣленіе числа второго десятка на самого себя въ смыслѣ дѣленія на равныя части (задача № 102) и дѣленіе на единицу въ смыслѣ содержанія (задача № 108); затѣмъ дѣленіе 20-ти пополамъ (этотъ случай уже встрѣчался раньше, въ отдѣлѣ круглыхъ десятковъ) и дѣленіе 20-ти на двойки (10 раздѣлить на двойки—будетъ 5 двоекъ, еще 10 раздѣлить на двойки—будетъ еще 5 двоекъ; 5 да 5—всего 10 двоекъ); далѣе дѣленіе 20-ти на 10 въ смыслѣ отысканія содержанія (этотъ случай уже встрѣчался раньше, при вычисленіяхъ съ круглыми десятками) и дѣленіе 20-ти на 10 равныхъ частей (10 раздѣлить на 10 равныхъ частей, получится 1; еще 10 раздѣлить на 10 равныхъ частей, получится еще 1; всего 2).

Въ концѣ упражненій въ дѣленіи мы помѣстили задачи (№№ 119—126) и примѣры (№№ 123—128) на дѣленіе съ остаткомъ. Такое дѣленіе довольно часто встрѣчается въ практическихъ вопросахъ-задачахъ; кромѣ того, оно будетъ необходимо при дальнѣйшемъ изученіи этого дѣйствія.

Мы полагаемъ, что предшествующихъ упражненій въ дѣленіи вполнѣ достаточно для того, чтобы ученики сразу узнали наибольшее число, которое можно раздѣлить безъ остатка. Такъ, при рѣшеніи задачъ № 119 и № 120 дѣти сразу опредѣляютъ, что всѣхъ перьевъ роздано 15, что за яблоки надо отдать 18 копеекъ. Въ случаѣ же затрудненія можно заставить учениковъ выполнить дѣленіе однимъ изъ вышеизложенныхъ пріемовъ.

26. Задачи, примѣры и бѣглый счетъ на всѣ дѣйствія. Относительно рѣшенія задачъ на всѣ дѣйствія въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ (№№ 127—166) мы можемъ только повторить тѣ указанія, которыя сдѣланы нами въ § 9 главы I. Замѣтимъ лишь, что здѣсь уже слѣдуетъ требовать отъ учениковъ связнаго пересказа содержанія задачи и вполнѣ самостоятельной постановки вопросовъ при разложеніи сложной задачи на простыя.

Въ численныхъ примѣрахъ (№№ 129—144, 145—148) мы впервые вводимъ тутъ скобки, которыя позволяютъ сдѣлать эти примѣры возможно разнообразными въ смыслѣ сочетанія входящихъ въ нихъ дѣйствій. Мы думаемъ, что всѣ эти примѣры ученики могутъ рѣшить безъ промежуточныхъ записей. Такъ, въ примѣрѣ (19—5) + (18 : 9)—(20—9) дѣти будутъ производить вычисленія устно слѣдующимъ образомъ: отъ 19 отнять 5—останется 14; 18 раздѣлить на 9 равныхъ частей—будетъ 2; къ 14 прибавить 2—получится 16; отъ 20-ти отнять 9—останется 11; отъ 16-ти отнять 11—получится 5. Этотъ окончательный результатъ (отвѣтъ) записывается въ ту же строку послѣ знака равенства. Если же отсутствіе промежуточныхъ записей затруднило бы учениковъ, то можно предоставить дѣтямъ записывать результатъ каждаго отдѣльнаго дѣйствія, располагая все рѣшеніе въ нѣсколько строкъ (по числу дѣйствій), или же надписывая надъ каждой скобкой результатъ того дѣйствія, которое въ ней указано.

Въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ большинство вычисленій принадлежитъ къ табличнымъ, и результаты ихъ ученики должны знать на память. Другія вычисленія, выходящія изъ предѣловъ таблицъ, какъ напр. 15+3, 7+13, 19—4, 20—6, 18—12, 20—11, выполняются по правиламъ, въ основѣ которыхъ лежитъ разложеніе чиселъ на деся-

тичныя группы; прибавленіе 3-хъ къ 15-ти сводится къ прибавленію 3-хъ къ 5-ти; вычитаніе 4-хъ изъ 19-ти, 6-ти изъ 20-ти, 12-ти изъ 18-ти, 11-ти изъ 20-ти приводится къ вычитанію 4-хъ изъ 9-ти, 6-ти изъ 10-ти, 2-хъ изъ 8-ми, 1-цы изъ 10-ти. Такія вычисленія, выходящія изъ предѣловъ таблицъ, конечно необязательно производить на память; однако, вслѣдствіе простоты подобныхъ вычисленій, результаты ихъ запоминаются чрезвычайно легко, и послѣ достаточнаго количества упражненій мы можемъ ожидать, что всѣ вычисленія въ предѣлѣ 20-ти дѣти будутъ выполнять на память.

Бѣглый счетъ (№№ 167—181) послужитъ для повѣрки усвоенія памятью какъ табличныхъ, такъ и внѣтабличныхъ результатовъ дѣйствій въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ; вмѣстѣ съ тѣмъ онъ ведетъ къ развитію быстроты въ вычисленіяхъ, пріучая дѣтей возможно скоро переходить отъ одного дѣйствія къ другому.

ГЛАВА IV.

Первая сотня.

27. Сложеніе. Сложеніе въ предѣлѣ 20-ти уже положило начало общему пріему выполненія этого дѣйствія: ученики уже знаютъ, что для прибавленія 3-хъ къ 15-ти надо разбить 15 на десятокъ и 5 единицъ и придать 3 единицы къ 5-ти единицамъ; для того, чтобы придать 12 къ 7-ми, надо разбить 12 на десятокъ и 2 единицы и придать отдѣльно 10 и 2. Въ предѣлѣ сотни этотъ пріемъ получаетъ дальнѣйшее развитіе въ примѣненіи къ сложенію двузначнаго числа съ двузначнымъ и состоитъ въ томъ, что для сложенія такихъ чиселъ надо разбить ихъ на десятки и единицы, сложить между собою десятки, сложить между собою единицы и обѣ полученныя суммы соединить въ одну. Это соединеніе двухъ названныхъ суммъ въ одну можетъ представить одинъ изъ слѣдующихъ трехъ случаевъ сложенія: 1) сложеніе круглыхъ десятковъ съ однозначнымъ числомъ; это будетъ тогда, когда единицы слагаемыхъ даютъ въ суммѣ менѣе 10-ти; напр. сложеніе 34-хъ и 25-ти

приводитъ къ сложенію 50-ти и 9-ти: 34+25=50+9; 2) сложеніе круглыхъ десятковъ; это будетъ тогда, когда единицы слагаемыхъ даютъ въ суммѣ 10: 63+27=80+10; 3) сложеніе круглыхъ десятковъ съ двузначнымъ числомъ; это будетъ имѣть мѣсто тогда, когда единицы слагаемыхъ даютъ въ суммѣ болѣе 10-ти: 58+27=70+15. Само собой разумѣется, что такіе случаи сложенія должны предшествовать соотвѣтствующимъ случаямъ сложенія двузначныхъ чиселъ. Всѣ случаи сложенія въ предѣлѣ сотни могутъ быть расположены въ такомъ послѣдовательномъ порядкѣ:

1) Сложеніе круглыхъ десятковъ съ единицами: 40+8, 7+30; это сложеніе требуетъ только знанія нумераціи: число, которое состоитъ изъ 4 десятковъ и 8-ми единицъ, имѣетъ названіе сорокъ восемь и обозначеніе—48.

2) Сложеніе двузначнаго числа съ однозначнымъ, когда сумма единицъ меньше 10-ти: 65+3, 7+22; эти случаи сложенія могутъ быть объяснены дѣтямъ такъ, какъ это сдѣлано раньше (гл. III, § 22, внѣтабличное сложеніе).

3) Сложеніе двузначнаго числа съ круглыми десятками: 44+30, 30+15. Это сложеніе сходно съ предыдущимъ: когда надо придать къ двузначному числу единицы, мы придаемъ ихъ къ единицамъ; когда требуется къ двузначному числу прибавить десятки, мы прибавляемъ ихъ къ десяткамъ.

4) Сложеніе двузначныхъ чиселъ, единицы которыхъ даютъ въ суммѣ менѣе 10-ти: 52+36. Этотъ случай сложенія достаточно подготовленъ предшествующими: 36 мы прибавляемъ не сразу, а съ двухъ разъ: разбиваемъ 36 на десятки и единицы, придаемъ сначала десятки, потомъ единицы; 3 десятка прибавляемъ мы къ 5-ти десяткамъ (случай 3-й), а 6 единицъ къ 2-мъ единицамъ (случай 2-й): 52+36=80+8=88. Отсюда выводъ: чтобы сложить двузначныя числа, разбиваемъ эти числа на десятки и единицы, складываемъ сначала десятки, потомъ единицы; затѣмъ полученныя числа соединяемъ въ одно число (случай 1-й).

Мы полагаемъ удобнымъ пройти случаи сложенія на задачахъ, что придастъ уроку бо́льшій интересъ и лишній разъ напомнитъ дѣтямъ объ употребленіи сложенія. Для этой цѣли назначены задачи №№ 1—8 нашего сборника

(Годъ второй, первая сотня). Каждая задача сопровождается соотвѣтствующимъ примѣромъ (который рѣшается послѣ задачи). Дѣйствіе выполняется, конечно, устно, при чемъ данныя числа и искомое, — послѣднее тогда, когда оно сполна найдено въ умѣ, — могутъ быть записаны въ строку (см. введеніе, § 9).

Въ разсмотрѣнныхъ нами случаяхъ сложеніе совершается безъ превращенія единицъ въ десятокъ. Здѣсь мы считаемъ полезнымъ сдѣлать остановку, давши дѣтямъ для самостоятельнаго рѣшенія соотвѣтствующіе примѣры (№№ 1—8); а затѣмъ уже перейти къ другимъ случаямъ, требующимъ превращенія единицъ. Это будутъ:

5) Сложеніе двузначнаго числа съ однозначнымъ, когда сумма единицъ равна 10-ти: $42+8=40+10=50$; $4+26=20+10=30$. Подобные случаи уже имѣли мѣсто въ предѣлѣ двухъ десятковъ: $12+8$; $7+13$.

6) Сложеніе двузначныхъ чиселъ, единицы которыхъ даютъ десятокъ: $23+37=50+10=60$.

7) Сложеніе двузначнаго числа съ однозначнымъ, когда сумма единицъ больше 10-ти: $55+9$; $7+26$. Примѣненіе уже знакомаго дѣтямъ пріема сложенія двузначнаго числа съ однозначнымъ приводитъ здѣсь къ сложенію круглыхъ десятковъ съ двузначнымъ числомъ (случай 3-й): $55+9=50+14$; $7+26=20+13$.

8) Сложеніе двузначныхъ чиселъ, сумма единицъ которыхъ больше 10-ти: $56+28$. Примѣненіе пріема сложенія двузначныхъ чиселъ (случай 4-й) и здѣсь приведетъ къ сложенію круглыхъ десятковъ съ двузначнымъ числомъ: $56+28=70+14$.

Случаи сложенія 5—8 могутъ быть разсмотрѣны на задачахъ №№ 9—16 нашего сборника. Соотвѣтствующіе примѣры №№ 9—16 назначены для рѣшенія во время самостоятельныхъ занятій.

Остановимся еще на сложеніи нѣсколькихъ чиселъ (задача № 17). Складывать нѣсколько чиселъ ученикамъ приходилось и раньше, при чемъ дѣти поступали такъ: къ первому числу прибавляли второе, къ полученному — третье и т. д. Здѣсь слѣдуетъ указать дѣтямъ, что при сложеніи нѣсколькихъ чиселъ можно поступать еще и такъ: сначала сложить только десятки всѣхъ данныхъ чиселъ,

потомъ единицы ихъ и затѣмъ полученныя числа соединить въ одно: $47+25+15=72+15=87$; или $47+25+15=70+$ $+17=87$.

Примѣчаніе. Упражненія подъ № 17 ученики могутъ выполнять такъ:

$2+2=4$
$4+2=6$
$6+2=8$
$98+2=100$

Или же учитель назначаетъ опредѣленное число слагаемыхъ: набрать 15 троекъ, 13 шестерокъ, при чемъ указываетъ дѣтямъ, что набирать тройки, шестерки можно не по одной, а по нѣскольку (сколько ученики могутъ взять сразу, на память, напр. 6 троекъ, 3 шестерки, какъ результаты, находящіеся въ предѣлѣ 20-ти). Тогда ученики могутъ написать въ рядъ требуемое число слагаемыхъ, напр. 13 шестерокъ, соединить ихъ въ группы, напр. по 3 шестерки, (соединеніе въ группы можетъ быть сдѣлано подчеркиваніемъ), и затѣмъ сложить числа, выражающія величину каждой изъ этихъ группъ: $6+6+6+$ $+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6=18+18+18+18+6$. Такимъ образомъ, упражненіе въ сложеніи соединяется здѣсь съ упражненіемъ въ пройденномъ уже табличномъ умноженіи. Сложеніе равныхъ двузначныхъ чиселъ (№№ 18 и 19) можетъ служить подготовкою къ умноженію двузначнаго числа на однозначное. Рѣшая такіе примѣры, дѣти нападутъ на мысль пересчитать слагаемыя и, гдѣ можно, воспользоваться уже знакомыми результатами умноженія: $13+13+13+13+13+13+13$ — здѣсь семь чиселъ; семь десятковъ — это семьдесятъ (10 повторить 7 разъ, будетъ 70); надо теперь взять 7 троекъ: 6 троекъ — это 18, 7 троекъ — 18 да 3 — 21; $70+21=91$. Вмѣстѣ съ тѣмъ ученики могутъ запомнить составъ нѣкоторыхъ чиселъ первой сотни изъ меньшихъ чиселъ, напр. запомнить, что 96 есть 8 разъ 12.

28. Вычитаніе. Вычитаніе въ предѣлѣ 20-ти уже положило начало общему пріему вычитанія: ученики уже знаютъ, что для вычитанія 3-хъ изъ 17-ти надо 17 разбить на десятокъ и 7 единицъ и отнять 3 единицы отъ 7-ми единицъ; если въ числѣ, отъ котораго отнимаютъ, единицъ нѣтъ, то надо одинъ десятокъ раздробить въ единицы, какъ это они дѣлали при вычитаніи изъ 20-ти; для того, чтобы отнять напр. 16, надо разбить 16 на десятокъ и 6 единицъ и отнять отдѣльно 10 и 6. Въ предѣлѣ сотни эти пріемы получаютъ дальнѣйшее развитіе.

Всѣ случаи вычитанія въ предѣлѣ первой сотни могутъ быть расположены въ такомъ послѣдовательномъ порядкѣ:

1) Отъ двузначнаго числа отнять его единицы или его десятки: $47-7$, $47-40$; это вычитаніе требуетъ только знанія нумераціи: сорокъ семь — это 4 десятка и 7 единицъ; если отнять отсюда 7 единицъ, останется 4 десятка; если отнять 4 десятка, останется 7 единицъ.

2) Отъ двузначнаго числа отнять однозначное, которое меньше единицъ уменьшаемаго, и отъ двузначнаго числа отнять круглые десятки: 56—4, 76—20. Вычитаніе въ первомъ изъ этихъ случаевъ можетъ быть объяснено дѣтямъ такъ, какъ это сдѣлано раньше (гл. III, § 23, внѣтабличное вычитаніе); вычитаніе во второмъ случаѣ сходно съ первымъ: когда отъ двузначнаго числа надо отнять единицы, мы отнимаемъ ихъ отъ его единицъ; когда отъ него надо отнять десятки, мы отнимаемъ ихъ отъ его десятковъ.

3) Отъ двузначнаго числа отнять двузначное, когда въ уменьшаемомъ единицъ больше, чѣмъ въ вычитаемомъ: 85—52. Этотъ случай вычитанія достаточно подготовленъ предшествующими: двузначное число 52 мы вычитаемъ (такъ же, какъ и придаемъ) не сразу, а съ двухъ разъ: разбиваемъ 52 на десятки и единицы, вычитаемъ сначала десятки, потомъ единицы; 5 десятковъ вычитаемъ мы изъ 8-ми десятковъ, а 2 единицы изъ 5-ти единицъ (случай 2-й): 85—52=30+3=33. Отсюда выводъ: чтобы вычесть двузначное число изъ двузначнаго, разбиваемъ эти числа на десятки и единицы и вычитаемъ сначала десятки изъ десятковъ, потомъ единицы изъ единицъ.

Такъ же, какъ и при сложеніи, мы полагаемъ удобнымъ пройти случаи вычитанія на задачахъ. Для этой цѣли назначены задачи №№ 18—24, изъ которыхъ нѣкоторыя сопровождаются соотвѣтствующими примѣрами. Дѣйствіе выполняется, конечно, устно; записи могутъ быть строчныя.

Въ разсмотрѣнныхъ нами случаяхъ вычитаніе совершается безъ раздробленія десятка. Здѣсь мы считаемъ полезнымъ сдѣлать остановку, давши дѣтямъ для самостоятельнаго рѣшенія соотвѣтствующіе пройденному примѣры (№№ 20—23); а затѣмъ уже перейти къ другимъ случаямъ, требующимъ раздробленія десятка. Это будетъ:

4) Отъ круглыхъ десятковъ отнять однозначное число: 60—4; пріемъ такого вычитанія можетъ быть объясненъ дѣтямъ подобно тому, какъ это сдѣлано раньше, при вычитаніи однозначнаго числа изъ 20-ти (гл. III, § 23, внѣтабличное вычитаніе).

5) Отъ круглыхъ десятковъ отнять двухзначное число: 90—42; чтобы вычесть 42, разбиваемъ это число на десятки и единицы; сначала отнимаемъ десятки, потомъ еди-

ницы; вычтя 40 изъ 90, приходимъ къ вычитанію 50—2 (случай 4-й), которое требуетъ раздробленія одного десятка въ единицы; если это раздробленіе сдѣлать съ самаго начала, то пріемъ вычитанія въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ такой: разбиваемъ 90 на 8 десятковъ и 10 единицъ, отнимаемъ 4 десятка отъ 8-ми десятковъ и 2 единицы отъ 10-ти единицъ.

6) Отъ двузначнаго числа отнять однозначное, которое больше единицъ уменьшаемаго: 54—9. Пріемъ такого вычитанія можетъ быть выведенъ слѣдующимъ образомъ: въ числѣ 54 только 4 единицы; отнявши ихъ, получимъ число 50, изъ котораго надо будетъ вычесть 5; для этого (случай 4-й) разбиваемъ 50 на 4 десятка и 10 единицъ; если разбить 50 на 4 десятка и 10 единицъ, то все число 54 разложится на 4 десятка, на 10 и на 4, или на 4 десятка и 14 единицъ; итакъ, чтобы отъ 54-хъ отнять 9, разбиваемъ 54 на 4 десятка и 14 единицъ и отнимаемъ 9 отъ 14-ти.

7) Отъ двузначнаго числа отнять двузначное, когда въ вычитаемомъ больше единицъ, нежели въ уменьшаемомъ: 42—28. Чтобы вычесть число 28, мы разбиваемъ его на 2 десятка и 8 единицъ; такъ какъ единицы изъ единицъ вычесть нельзя, то число 42 разбиваемъ на 3 десятка и 12 единицъ; затѣмъ вычитамъ 2 десятка изъ 3-хъ десятковъ и 8 единицъ изъ 12 единицъ.

Случаи вычитанія 4—7 могутъ быть разсмотрѣны на задачахъ №№ 25—30 нашего сборника. Соотвѣтствующіе примѣры №№ 24—31 назначены для рѣшенія во время самостоятельныхъ занятій. Относительно примѣровъ №№ 32—34 см. примѣчаніе къ предыдущему §.

Считаемъ нужнымъ обратить вниманіе учениковъ на то, что число, которое отнимаютъ, всегда разбивается на десятки и единицы; число, отъ котораго отнимаютъ, иногда разбивается также на свои десятки и единицы, а иногда разлагается *по-другому*. Для этого учитель можетъ дать дѣтямъ рядъ примѣровъ въ родѣ слѣдующаго. Отъ 75 отнимите 43. Какъ разобьете вы число 43? — На 4 десятка и 3 единицы. — Какъ разобьете вы число 75? — На 7 десятковъ и 5 единицъ. — Отъ 75 отнимите 48. Какъ разобьете вы число 48? — На 4 десятка и 8 единицъ. — А какъ разо-

бьете вы число 75: такъ ли, какъ прежде, т.-е. на 7 десятковъ и 5 единицъ, или по-другому? — Теперь мы разобьемъ 75 по-другому: на 6 десятковъ и 15 единицъ. — Почему здѣсь надо разбить 75 по-другому? — Потому что 8 единицъ нельзя вычесть изъ 5-ти единицъ.

29. Сложеніе и вычитаніе на счетахъ. Выкладки на счетахъ, какъ мы уже говорили раньше (введеніе, § 1; глава II, § 21), содѣйствуютъ усвоенію понятія о различныхъ счетныхъ единицахъ и десятичномъ составѣ чиселъ, иллюстрируютъ сущность пріемовъ вычисленія, состоящихъ въ томъ, что дѣйствіе надъ данными числами сводится къ дѣйствіямъ надъ ихъ десятичными группами. Поэтому мы признаемъ весьма полезнымъ познакомить учениковъ съ выкладками на счетахъ. Умѣнье считать на счетахъ довольно важно въ практическомъ отношеніи для окончившихъ начальную школу. Поэтому мы думаемъ, что слѣдуетъ не только показать дѣтямъ, какъ производятся на счетахъ вычисленія, но и развить въ ученикахъ навыкъ возможно быстро считать на счетахъ, хотя бы ограничиваясь только сложеніемъ и вычитаніемъ. Полагаемъ умѣстнымъ познакомить дѣтей съ выполненіемъ этихъ дѣйствій на счетахъ вслѣдъ за тѣмъ, какъ будутъ усвоены пріемы устнаго сложенія и вычитанія въ предѣлѣ первой сотни, и потомъ, время отъ времени, упражнять учениковъ въ выкладкахъ на счетахъ въ теченіе остального курса.

Въ § 21 главы II мы изложили ходъ занятій по ознакомленію дѣтей съ обозначеніемъ чиселъ на счетахъ. Напомнивъ объ этомъ, учитель можетъ пройти съ учениками сложеніе и вычитаніе на счетахъ, располагая упражненія примѣрно въ такомъ же порядкѣ, въ какомъ приведены были случаи сложенія и вычитанія при выводѣ устныхъ пріемовъ выполненія этихъ дѣйствій. Для этой цѣли учитель можетъ продѣлать съ учениками примѣры нашего сборника подъ №№ 41—43 (сложеніе) и №№ 44 и 45 (вычитаніе).

Сложеніе на счетахъ мы начинаемъ сложеніемъ единицъ съ единицами и десятковъ съ десятками, когда въ суммѣ получается не больше 9-ти. Это — сложеніе на одной проволокѣ.

— Положите 6; прибавьте 2. Сколько получилось? Скиньте. Положите 40; прибавьте 30. Сколько вышло?

Мы предполагаемъ, что всѣмъ ученикамъ розданы ручные счеты, на которыхъ они и производятъ выкладки; для повѣрки одинъ ученикъ, по очереди, выполняетъ дѣйствіе на классныхъ счетахъ.

Остановимся на тѣхъ случаяхъ, когда сложеніе совершается съ превращеніемъ единицъ или десятковъ.

— Положите 7; прибавьте 3. Сколько шариковъ положено теперь на первой проволокѣ? Чѣмъ можно замѣнить 10 шариковъ первой проволоки? Замѣните. Сколько же получилось, когда къ 7-ми прибавили мы 3?

— Положите 60; прибавьте 40. Сколько положено теперь шариковъ на второй проволокѣ? Чѣмъ можно замѣнить ихъ? Замѣните. Что означали 10 шариковъ второй проволоки? Какъ называются по-иному 10 десятковъ? Сколько же получилось отъ сложенія 60-ти и 40-ка?

— Положите 8. Сюда надо прибавить 7. Есть ли еще 7 шариковъ на первой проволокѣ? Сколько ихъ есть?

— Есть еще только 2 шарика.

— Прибавьте ихъ къ 8-ми. Сколько шариковъ положено теперь на первой проволокѣ? Чѣмъ можно замѣнить ихъ? Замѣните. Сколько прибавили мы къ 8-ми? А сколько надо было прибавить? Сколько еще осталось положить? Положите. Сколько же получилось, когда къ 8-ми мы прибавили 7?

— Теперь я покажу вамъ, какъ можно по-другому прибавить 7 къ 8-ми. Смотрите сюда. У меня на столѣ (или на планкѣ доски) лежатъ 8 палочекъ. Я хочу, чтобы здѣсь было на 7 палочекъ больше. Какъ это сдѣлать?

— Положить еще 7 палочекъ, прибавить 7 палочекъ.

— Но отдѣльныхъ палочекъ, кромѣ тѣхъ 8-ми, у меня только 2; прочія же палочки связаны въ пучки, по 10-ти штукъ. Кто можетъ сдѣлать такъ, чтобы на столѣ стало 7-ю палочками больше, но при этомъ не развязывать (не рознить) пучковъ?

Ученики могутъ догадаться (а если нѣтъ, учитель объяснитъ самъ): положить на столъ цѣлый пучокъ и снять со стола 3 палочки.

— Когда, вмѣсто 7-ми палочекъ, мы положили на столъ 10 палочекъ, то сколько лишнихъ палочекъ прибавили мы? А когда сняли со стола 3 палочки, будутъ ли на столѣ лишнія палочки?

— Положите теперь на счетахъ 8 единицъ. Какъ же прибавите вы сюда 7 единицъ, когда на первой проволокѣ осталось только 2 шарика?

— Положимъ десять (одинъ шарикъ на второй проволокѣ) и скинемъ 3 (3 шарика съ первой проволоки).

Такъ же можно поступать и тогда, когда единицы слагаемыхъ даютъ въ суммѣ 10; напр., чтобы прибавить 3 къ 47, прибавляемъ десятокъ и скидываемъ 7 единицъ.

Вычитаніе на счетахъ начинаемъ мы вычитаніемъ единицъ изъ единицъ и десятковъ изъ десятковъ: 8 — 5, 70 — 30. Это — вычитаніе на одной проволокѣ.

Остановимся на тѣхъ случаяхъ, когда вычитаніе совершается съ раздробленіемъ десятка и сотни.

— Положите 15. Отсюда надо вычесть 7. Сколько шариковъ можно скинуть съ первой проволоки? Скиньте. Сколько осталось отнять? Какъ отнимите вы 2 отъ десятка? Чѣмъ можно замѣнить шарикъ второй проволоки? Замѣните. Что теперь надо сдѣлать?

— Скинуть 2.

— Скиньте. Сколько получилось?

Вычитаніе изъ десяти можно разсмотрѣть отдѣльно, раньше вычитанія изъ десятка вмѣстѣ съ единицами, но можно и соединить его съ этимъ послѣднимъ случаемъ, какъ мы это сдѣлали.

Затѣмъ учитель показываетъ дѣтямъ иной пріемъ вычитанія 7-ми изъ 15-ти: отнять десятокъ и прибавить 3 ед. На этотъ пріемъ можно навести учениковъ подобно тому, какъ это сдѣлано въ соотвѣтствующемъ случаѣ сложенія. На столѣ лежитъ 15 палочекъ: одинъ пучокъ и 5 палочекъ; кромѣ того есть палочки напр. въ коробкѣ. — Какъ взять со стола 7 палочекъ, не развязывая (не розня) пучка? Если мы возьмемъ со стола пучокъ, то мы снимемъ не только тѣ 7 палочекъ, которыя намъ надо снять, но еще лишнихъ 3 палочки, которыя должны бы остаться на столѣ. Эти 3 лишне снятыя палочки надо вернуть назадъ. Мы сдѣлаемъ это, если вмѣсто нихъ положимъ на столъ 3 палочки со стороны (напр. изъ коробки). Для той же цѣли можетъ служить задача въ родѣ слѣдующей. У мальчика было 15 копеекъ: гривенникъ и пятачокъ. Мальчикъ купилъ бумаги на 7 копеекъ. Сколько денегъ осталось у мальчика? Какъ это узнать? (Надо изъ 15-ти вычесть 7). Какъ расплатился мальчикъ съ торговцемъ: какую монету онъ далъ ему? Когда мальчикъ отдалъ торговцу гривенникъ, сколько денегъ у него осталось (въ карманѣ)? Какъ это узнать? (Отъ 15-ти отнять 10). Столько ли денегъ должно остаться у мальчика? — Нѣтъ, торговецъ долженъ дать ему 3 копейки сдачи, и у мальчика останется денегъ 5 копеекъ и еще 3 копейки, всего 8 копеекъ.

— Положите на счетахъ 15. Какъ отнимете вы отсюда 7? Почему скинете десятокъ?

— Потому что здѣсь (въ 15-ти) только 5 единицъ.

— А зачѣмъ положите вы потомъ 3 единицы?

— Когда мы скинули десять, то отняли лишнихъ 3 единицы: онѣ должны остаться, ихъ надо вернуть назадъ.

— Положите 70. Отнимите 6. Какъ сдѣлать это?

— Скинуть десятокъ и положить (вернуть назадъ) 4 единицы.

— Положите 100. Какъ скинуть отсюда 10?

— Скинуть шарикъ съ третьей проволоки и положить 9 шариковъ на второй.

— Положите 100. Какъ вычесть отсюда 7? Вспомните, какъ вычитали мы 7, когда единицъ не было или нехватало?

— Мы скидывали десятокъ и клали 3 единицы.

— Скиньте же десятокъ, вы это уже дѣлали. Сколько получится? (90). Что теперь надо сдѣлать?

— Положить 3 единицы.

— Положите 100. Отнимите отсюда 60. Какъ это сдѣлать?

— Скинуть шарикъ съ третьей проволоки и положить 4 шарика на второй; будетъ 40.

— Положите 100. Отнимите отсюда 83. Какъ это сдѣлать?

— Отнять сначала 80: скинуть шарикъ съ третьей проволоки и положить 2 шарика на второй: будетъ 20; отсюда отнять 3: скинуть шарикъ со второй проволоки и положить 7 шариковъ на первой; будетъ17.

Примѣры нашего сборника №№ 39—42 назначены для рѣшенія во время самостоятельныхъ занятій. Ученики могутъ списать примѣръ съ книжки на свои доски (въ тетради), произвести вычисленія на счетахъ и записать въ строку, послѣ знака равенства, окончательный результатъ.

Примѣчаніе. Сложеніе и вычитаніе на счетахъ отличается отъ общихъ, или нормальныхъ, пріемовъ устнаго выполненія этихъ дѣйствій въ тѣхъ случаяхъ, когда сложеніе совершается съ превращеніемъ единицъ, а вычитаніе съ раздробленіемъ десятка: здѣсь при вычисленіяхъ на счетахъ употребляется частный пріемъ округленія: чтобы придать 7 къ 28-ми, придаемъ 10 и отнимаемъ 3; чтобы вычесть 7 изъ 42, вычитаемъ 10 и придаемъ 3. Затѣмъ, при устномъ (а равно и письменномъ) выполненіи этихъ дѣйствій слѣдуетъ (для возможно быстраго вычисленія) знать наизусть таблицы сложенія и вычитанія; выкладки на счетахъ требуютъ отъ памяти только вычитанія изъ десяти (въ упомянутыхъ выше случаяхъ сложенія и вычитанія), всѣ же остальные результаты получаются на самихъ счетахъ — инструментально.

30. Умноженіе. Таблица умноженія. Приступая къ умноженію въ предѣлѣ сотни, прежде всего слѣдуетъ закончить таблицу этого дѣйствія, часть которой уже должна быть извѣстна ученикамъ послѣ изученія дѣйствій въ предѣлѣ 20-ти. Здѣсь, какъ и раньше (гл. III, § 24), надо начать съ того, чтобы напомнить ученикамъ значеніе выраженія «взять, или повторить, нѣсколько разъ» и знака $\times$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и способъ выполненія этого дѣйствія посредствомъ сложенія; затѣмъ указать дѣтямъ на удобство пользованія уже знакомыми результатами дѣйствія (до 20-ти) для полученія результатовъ новыхъ. Здѣсь можно ввести и весьма употребительныя въ табличномъ умноженіи выраженія «трижды восемь», «шестью семь» и т. п., которыя, вслѣдствіе своей краткости, могутъ оказать извѣстную услугу при запоминаніи табличныхъ результатовъ умноженія, а впослѣдствіи — по той же причинѣ — могутъ представить извѣстное удобство при письменномъ умноженіи многозначныхъ чиселъ.

— Слушайте задачу. Мальчикъ началъ читать книжку въ понедѣльникъ и прочиталъ въ этотъ день 7 страницъ; во вторникъ прочиталъ

онъ еще 7 страницъ. Сколько страницъ прочиталъ онъ въ эти два дня? Какъ это узнать?

— Къ 7-ми прибавить 7, будетъ 14.

Учитель пишетъ на классной доскѣ 7+7.

— Въ среду прочиталъ онъ еще 7 страницъ. Сколько страницъ теперь прочитано? Какъ это узнать? (Приписываетъ еще слагаемое.) Въ четвергъ прочиталъ онъ еще 7 страницъ. Сколько страницъ теперь прочитано? Какъ это узнать? Въ пятницу прочиталъ онъ еще 7 страницъ. Сколько страницъ теперь прочитано? Какъ это узнать? Въ субботу прочиталъ онъ еще 7 страницъ, и вся книжка была прочитана. Сколько страницъ въ этой книжкѣ?

По мѣрѣ того, какъ ученики даютъ отвѣты, учитель приписываетъ по одному слагаемому, и въ концѣ является запись: 7+7+7+7+ +7+7=42.

— Прочитайте то, что написано.

— Къ 7-ми прибавить 7, еще прибавить 7, еще прибавить 7, еще прибавить 7 и еще прибавить 7 — получится 42.

— Какъ можно прочитать это короче?

— 7 повторить 6 разъ, будетъ 42.

— Какъ можно записать это короче? Поди, запиши.

Ученикъ пишетъ $7 \times 6 = 42$.

— А какъ короче сказать самую задачу?

— Мальчикъ прочиталъ книжку въ 6 дней; каждый день читалъ онъ по 7-ми страницъ. Спрашивается, сколько страницъ въ этой книжкѣ?

— Что же надо сдѣлать, чтобы рѣшить эту задачу?

— Надо 7 повторить 6 разъ; будетъ 42.

— Для того, чтобы 7 повторить 6 разъ, мы прибавляли по 7-ми, набирали по одной семеркѣ. Какъ можно иначе набрать 6 семерокъ?

— По двѣ.

— Набирайте по двѣ.

Учитель соединяетъ написанныя семерки попарно, напр. подчеркивая ихъ: $\underline{7+7}+\underline{7+7}+\underline{7+7}$; ученики вычисляютъ: 2 семерки —14, еще 2 семерки —14, 14 да 14 — 28; еще 2 семерки 14; 28 да 14 — 42. Для того, чтобы облегчить ученикамъ вычисленіе, надъ каждою парою семерокъ можетъ быть написано число 14.

— Какъ же скорѣе набрать 6 семерокъ: по одной или по двѣ?

— По двѣ скорѣе.

Здѣсь можно, если учитель найдетъ это удобнымъ, забѣгая нѣсколько впередъ, познакомить дѣтей съ умноженіемъ двузначнаго числа на однозначное: 14×3; хотя ученикамъ извѣстна только часть таблицы умноженія, заключающаяся въ предѣлѣ 20-ти, такое умноженіе не можетъ затруднить дѣтей, если оно примѣняется къ тѣмъ случаямъ, когда отъ умноженія единицъ множимаго получается не больше 20-ти. Пользованіе пріемомъ умноженія двузначнаго числа на однозначное ускоритъ отысканіе результатовъ табличнаго умноженія.

Для упражненія въ примѣненіи пріема табличнаго умноженія учитель рѣшаетъ съ учениками нѣсколько задачъ, требующихъ такого

умноженія (вразбивку). Для этой цѣли могутъ служить задачи №№ 46—55. Мы считаемъ полезнымъ на первыхъ порахъ, на ряду съ сокращенными записями при помощи знака $\times$, дѣлать и записи со знакомъ $+$, такъ какъ послѣднія облегчаютъ вычисленіе и кромѣ того содѣйствуютъ запечатлѣнію въ сознаніи учениковъ смысла умноженія и способа выполненія этого дѣйствія. Приведемъ примѣръ относящихся сюда работъ.

Учитель читаетъ задачу:

— Хозяйка получаетъ со своихъ коровъ 6 ведеръ молока въ недѣлю. Сколько ведеръ молока получаетъ она въ 5 недѣль? Какъ это узнать?

— Надо 6 повторить 5 разъ.

— Запишите это.

Ученики пишутъ 6×5.

— Почему надо 6 повторить 5 разъ?

— Потому что въ недѣлю хозяйка получаетъ 6 ведеръ, а въ 5 недѣль получитъ она 5 разъ по 6-ти ведеръ.

— Какъ записать это по-иному? Запишите.

Ученики пишутъ: $6+6+6+6+6$.

— Какъ станете набирать вы шестерки? По одной долго. Самое бо́льшее — сколько шестерокъ вы уже имѣете взять сразу, на память? Подчеркните эти 3 шестерки. Сколько шестерокъ еще надо взять? Подчеркните ихъ ($\underline{6+6+6}+\underline{6+6}$). Вычисляйте.

— 6 повторить 3 раза — будетъ 18; 6 повторить 2 раза — будетъ 12. (Учитель можетъ позволить дѣтямъ записать 18 и 12 надъ подчеркнутыми группами шестерокъ). Къ 18-ти прибавить 12 — будетъ 30.

— Запишите теперь 30 въ той строчкѣ, которая написана съ косымъ крестомъ.

Ученики послѣ имѣющейся уже записи 6×5 ставитъ знакъ равенства и пишутъ результатъ: $6\times5=30$.

— 6 повторить 5 разъ — сколько будетъ? Сколько же ведеръ молока получаетъ хозяйка въ 5 недѣль?

Когда дѣти достаточно привыкнутъ къ подобнымъ вычисленіямъ, можно будетъ обойтись безъ записи каждаго изъ равныхъ слагаемыхъ, т.-е. не писать длинныхъ строкъ со знаками $+$.

Замѣтимъ еще разъ, что при добываніи новыхъ результатовъ умноженія ученики должны пользоваться уже знакомыми имъ результатами этого дѣйствія въ предѣлѣ 20-ти. Такъ, при умноженіи 4-хъ на 7 дѣти должны взять сразу 5 четверокъ и потомъ 2 четверки. При умноженіи 5-ти удобно соединять слагаемыя и попарно, для образованія десятка.

Примѣры №№ 43—66 нашего сборника назначены для рѣшенія во время самостоятельныхъ занятій. Въ этихъ упражненіяхъ новому для учениковъ результату умноженія предшествуютъ такіе уже знакомые дѣтямъ случаи умноженія и такіе случаи сложенія, которые или даютъ, или подготовляютъ этотъ новый результатъ. Если дѣти и не замѣтятъ связи упражненій, поставленныхъ подъ однимъ №, все же для учениковъ не будетъ безполезно вспомнить уже пройденные случаи умноженія и продѣлать нѣсколько примѣровъ на сложеніе, что̀ имъ понадобится при добываніи новыхъ результатовъ умноженія. Если же уче-

ники замѣтятъ названную связь, то это послужитъ имъ указаніемъ (напоминаніемъ), какимъ путемъ удобнѣе находить новые результаты умноженія; такъ напр., рѣшая упражненія подъ № 52, дѣти, написавши на память $4\times5=20$, $4\times4=16$, могутъ смекнуть, что $4\times9=(4\times5)+(4\times4)=20+16=36$.

Послѣ этихъ упражненій учитель можетъ продѣлать съ учениками нѣсколько задачъ съ цѣлью еще разъ провѣрить, насколько дѣти овладѣли пріемомъ табличнаго умноженія, и, если надо, то напомнить этотъ пріемъ, а также посмотрѣть, стали ли ученики запоминать результаты. Для этого могутъ служить задачи №№ 56—69.

Примѣры №№ 67 и 68 назначены для дальнѣйшихъ самостоятельныхъ упражненій въ умноженіи, къ которому присоединены здѣсь и сложеніе съ вычитаніемъ.

Считаемъ нелишнимъ показать ученикамъ пріемъ округленія чиселъ при умноженіи 9-ти и при умноженіи на 9 (а также при умноженіи 8-ми и на 8).

Для того, чтобы набрать нѣсколько девятокъ, напр., чтобы 9 повторить 6 разъ, мы возьмемъ столько же десятковъ, т.-е. 10 повторимъ 6 разъ; полученное число уменьшимъ на 6, потому что мы взяли лишку 6 разъ по единицѣ. Этотъ выводъ можетъ быть сдѣланъ изъ рѣшенія задачи № 70. Задача № 71 приводитъ къ подобному же пріему умноженія 8-ми.

Прежде чѣмъ разъяснять способъ умноженія на 9 (и на 8), слѣдуетъ указать дѣтямъ пріемъ умноженія на 10, который уже былъ однажды примѣненъ къ умноженію 2-хъ на 10 (гл. III, § 24, примѣчаніе). Для того, чтобы повторить какое-нибудь число 10 разъ, напр., чтобы 7 повторить 10 разъ, надо повторить 10 разъ каждую единицу, и будетъ столько десятковъ, сколько было единицъ: было 7 единицъ, станетъ 7 десятковъ, или 70. Для того, чтобы какое-нибудь число повторить 9 разъ, напр., чтобы набрать 9 семерокъ, мы повторимъ его 10 разъ, т.-е. возьмемъ 10 семерокъ, и потомъ вычтемъ 7, такъ какъ мы взяли одну лишнюю семерку. Этотъ выводъ можетъ быть сдѣланъ изъ рѣшенія задачи № 72. Задача № 73 приводитъ къ подобному же пріему умноженія на 8.

Для упражненія въ примѣненіи объясненныхъ пріемовъ округленія могутъ служить примѣры №№ 69—84, въ которыхъ приведенъ самый ходъ вычисленія.

Для того, чтобы еще разъ провѣрить, насколько дѣти усвоили эти пріемы, и — если надо — чтобы еще разъ напомнить ихъ, а также чтобы посмотрѣть, насколько ученики стали запоминать результаты, учитель можетъ рѣшить съ учениками задачи №№ 74—83.

Примѣры №№ 85 и 86 назначены для дальнѣйшихъ самостоятельныхъ упражненій.

Задачи №№ 84—90, въ каждой изъ которыхъ приведены два случая умноженія, различающіеся только перестановкой множимаго и множителя, имѣютъ цѣлью напомнить дѣтямъ о свойствѣ результата умноженія не измѣняться при перестановкѣ данныхъ, а также—путемъ сопоставленія — уяснить, какое изъ данныхъ въ задачѣ чиселъ должно

быть принято за множимое (какое число надо повторить), и какое — за множителя (сколько разъ надо повторить). (Гл. 1, § 11. Глава III, § 24, примѣч. 2.)

Передъ рѣшеніемъ этихъ задачъ считаемъ удобнымъ познакомить учениковъ съ выраженіями «трижды шесть», «пятью восемь» и т. д. На приведенныхъ выше задачахъ дѣти могутъ научиться различать такія выраженія, какъ «трижды семь» и «семью три», относящіяся къ двумъ случаямъ умноженія, которые отличаются одинъ отъ другого перестановкой данныхъ.

— Мальчикъ купилъ 2 пряника, по 5 копеекъ каждый. Сколько заплатилъ онъ за пряники?

— Какъ это узнать? Почему надо 5 повторить 2 раза? Да, одинъ пряникъ стоитъ 5 копеекъ, а 2 пряника — 2 раза по 5-ти копеекъ. 5 повторить 2 раза — сколько будетъ? Поди, запиши это.

Ученикъ пишетъ $5 \times 2 = 10$.

— Прочитайте то, что написано.

— 5 повторить 2 раза — будетъ 10.

— А какъ можно прочитать это короче? Да, это можно прочитать такъ: два раза по пяти — будетъ 10; два раза пять будетъ 10. Слушайте, дѣти: вмѣсто того, чтобы говорить «два раза», говорятъ иногда «дважды». Что же значитъ «дважды?»

— Дважды — значитъ два раза.

— А что значитъ «дважды пять?»

— Дважды пять — значитъ два раза пять.

— Какъ можно прочитать теперь то, что написано?

— Дважды пять — будетъ десять.

— Прочитайте еще короче, не говоря слова «будетъ».

— Дважды пять — десять.

— Другой разъ мальчикъ купилъ 5 пряниковъ, по 2 копейки каждый. Сколько заплатилъ онъ за пряники? Какъ это узнать? Почему надо 2 повторить 5 разъ? 2 повторить 5 разъ — сколько будетъ? Поди, запиши это.

Ученикъ пишетъ $2 \times 5 = 10$.

— Прочитайте то, что написано.

— 2 повторить 5 разъ — будетъ 10.

— Кто прочитаетъ короче?

— Пять разъ по два — будетъ десять. Пять разъ два — десять.

— Слушайте, дѣти: вмѣсто того, чтобы говорить «пять разъ», говорятъ иногда «пятью». Что же значитъ «пятью?» А что значитъ «пятью два?» Какъ можно прочитать теперь то, что написано?

— Пятью два — десять.

— А какъ читали мы первую строку? (указываетъ на прежнюю запись $5 \times 2 = 10$).

— Дважды 5 — десять.

— 2 повторить 3 раза — сколько будетъ? Запиши это.

Ученикъ пишетъ $2 \times 3 = 6$.

— Вмѣсто того, чтобы говорить «два раза», какъ иногда говорятъ?

— Дважды.

— А вмѣсто «три раза» какъ можно сказать?
— Трижды.
— Какъ же можно прочитать то, что написано?
— Трижды два — шесть.
— А что значитъ «дважды три?»
— Два раза три, два раза по три.
— Дважды три — сколько?
— Дважды три — шесть.
— Запиши это.
Ученикъ пишетъ $3 \times 2 = 6$.
— Кто догадается, что значитъ «четырежды?»
— Четырежды значитъ четыре раза.
Учитель пишетъ: $2 \times 4 = 8$.
— Читайте.
— 2 повторить 4 раза — будетъ 8.
— Кто скажетъ это по-другому?
— Четырежды два — восемь.
Учитель пишетъ $4 \times 2 = 8$.
Читайте.
— 4 повторить 2 раза — будетъ 8.
— Кто прочитаетъ по-другому?
— Дважды четыре — восемь.
— Что значитъ «шестью?», «семью?» Какъ можно сказать вмѣсто «восемь разъ?», вмѣсто «девять разъ?»
— 7 повторить 6 разъ — сколько будетъ? Запиши это.
Ученикъ пишетъ $7 \times 6 = 42$.
— Какъ прочитать это короче?
– Шестью семь — сорокъ два.
— 6 повторить 7 разъ — сколько будетъ? Запиши это.
Ученикъ пишетъ $6 \times 7 = 42$.
— Какъ прочитать это короче?
— Семью шесть — сорокъ два.

Проходя упражненія №№ 84—90, послѣ рѣшенія каждыхъ двухъ задачъ, помѣщенныхъ подъ однимъ №, можно сопоставлять относящіяся къ этимъ задачамъ записи, заставляя дѣтей читать ихъ въ краткой формѣ.

Упражненія въ табличномъ умноженіи мы заканчиваемъ таблицей умноженія въ порядкѣ; ее дѣти составляютъ во время самостоятельныхъ занятій (стран. 13 нашего сборника). Прежде чѣмъ задавать дѣтямъ эту работу, считаемъ нелишнимъ познакомить учениковъ съ терминами «умножить», «умноженіе»[1]), для того, чтобы можно было сообщить названіе «таблица умноженія». Вмѣстѣ съ тѣмъ слѣдуетъ указать ученикамъ на составъ таблицы и обратить ихъ вниманіе на то, что таблицу умноженія надо знать на память.

---

[1]) Знакомя учениковъ съ названіями дѣйствій, мы откладываемъ до другого времени сообщеніе терминовъ, относящихся къ числамъ даннымъ и искомымъ.

— 7 повторить 5 разъ — сколько будетъ? Слушайте, дѣти: вмѣсто «повторить» говорятъ также «умножить». Мы говорили «7 повторить 5 разъ»; можно сказать вмѣсто этого «7 умножить на 5». 7 умножить на 5 — сколько будетъ?

— 7 умножить на 5 — будетъ 35.

— 6 повторить 4 раза — сколько будетъ? Какъ сказать это иначе?

— 6 умножить на 4 — будетъ 24.

— 8 умножить на 7 — сколько будетъ? А какъ говорили мы раньше?

— 8 повторить 7 разъ — будетъ 56.

— Когда мы умножаемъ одно число на другое, то дѣлаемъ дѣйствіе, которое называется *умноженіемъ*. Какъ же называется то дѣйствіе, которое мы дѣлаемъ, когда умножаемъ одно число на другое?

— Вспомните, какія числа наз. однозначными? Переберите всѣ однозначныя числа. Слушайте, дѣти: вы уже умножали всѣ однозначныя числа одно на другое. Теперь вы еще разъ умножите ихъ въ томъ порядкѣ, какъ указано въ книжкѣ (стран. 13): если помните, сколько получается, то сразу запишите это; а если въ какомъ-нибудь примѣрѣ (въ какой-нибудь строчкѣ) не помните, сколько должно получиться, то вычисляйте такъ, какъ вычисляли раньше. У васъ составится тогда *таблица умноженія*. Въ этой таблицѣ каждое однозначное число умножено на каждое однозначное число. Таблицу эту надо знать наизусть, т.-е. надо помнить, напр., что трижды девять — 27, шестью восемь — 48 и т. д.

Если бы послѣ всѣхъ приведенныхъ нами упражненій оказалось, что дѣти не достаточно твердо усвоили памятью таблицу умноженія, то можно заставить учениковъ просто выучить ее; это заучиваніе не будетъ безсознательнымъ зубреніемъ: 1) потому, что таблица составлена самими же учениками, и они знаютъ пріемы добыванія ея результатовъ; 2) потому, что, пройдя сложеніе и вычитаніе, дѣти могли понять, что для выполненія этихъ дѣйствій весьма важно знать на память ихъ таблицы; они могутъ понять, что и таблицу умноженія надо знать на память.

Внѣтабличное умноженіе. Кромѣ таблицы умноженія и уже раньше знакомаго ученикамъ умноженія круглыхъ десятковъ (30×2), въ предѣлѣ первой сотни имѣютъ мѣсто а) умноженіе двузначнаго числа на однозначное: 32×3, 23×4 и б) умноженіе однозначнаго числа на двузначное: 2×34, 3×24. Умноженію на двузначное число (2×34) должно предшествовать умноженіе на круглые десятки (2×30), а этому послѣднему — умноженіе на 10 (2×10, 6×10).

1. Умноженіе двузначнаго числа на однозначное требуетъ (кромѣ сложенія) только уже извѣстныхъ дѣтямъ умноженія круглыхъ десятковъ и таблицы умноженія: чтобы умножить 32 на 3 или 23 на 4, разбиваемъ 32 или 23 на десятки и единицы, умножаемъ сначала десятки, потомъ

единицы и полученныя числа соединяемъ въ одно, складываемъ. Дѣйствіе выполняется, конечно, устно, при чемъ числа данныя и искомое, послѣднее — когда оно сполна найдено въ умѣ, могутъ быть записаны въ строку.

Пріемъ умноженія двузначнаго числа на однозначное можетъ быть выведенъ изъ пріема сложенія двузначныхъ чиселъ.

Учитель пишетъ 32 + 32 + 32.

— Читайте, складывайте.

— Къ 32-мъ прибавить 32: 30 да 30 = 60; 2 да 2 = 4; 60 да 4 = 64; къ 64-мъ прибавить 32: 60 да 30 = 90; 4 да 2 = 6; 90 да 6 = 96.

— Какъ можно иначе сдѣлать сложеніе?

— Сначала сложить всѣ десятки, потомъ единицы: 30 да 30 = 60; 60 да 30 = 90; 2 да 2 = 4; 4 да 2 = 6; 90 да 6 = 96.

— Для того, чтобы узнать, сколько будетъ всѣхъ десятковъ, вы къ 3 десяткамъ прибавили 3 десятка и еще прибавили 3 десятка. Нельзя ли узнать это сразу?

— Можно: 3 десятка повторить 3 раза — будетъ 9 десятковъ, или 90.

— А какъ узнать сразу, сколько будетъ всѣхъ единицъ?

— 2 повторить 3 раза — будетъ 6.

— Къ 32-мъ прибавить 32 и еще прибавить 32: какъ сказать это короче?

— 32 повторить 3 раза.

— Какъ записать это короче? Запиши.

Ученикъ пишетъ 32×3.

— 32 повторить 3 раза — сколько будетъ? Запиши.

Ученикъ пишетъ результатъ: 32×3 = 96.

— Вы уже знаете: вмѣсто «повторить» говорятъ «умножить». Какъ же прочитаете вы то, что написано?

— 32 умножить на 3 — будетъ 96.

— Какъ умножили мы 32 на 3: сразу или нѣтъ?

— Не сразу (съ двухъ разъ): сначала умножили 30 на 3, потомъ 2 на 3.

— Да, чтобы умножить 32 на 3, надо 32 разбить на десятки и единицы; сначала умножить десятки, потомъ единицы. Какъ же умножить 32 на 3? Умножьте 23 на 4. Умножьте 15 на 5.

Для упражненія въ примѣненіи выведеннаго пріема служатъ задачи №№ 91—102 и примѣры №№ 87—110. Пріемъ умноженія двузначнаго числа на однозначное можетъ быть выведенъ и на задачѣ № 91.

2. Умноженіе однозначнаго числа на 10 уже раньше было указано ученикамъ; здѣсь надо только вспомнить о немъ: для того, чтобы 6 умножить на 10, повторимъ 10 разъ каждую изъ 6-ти единицъ; вмѣсто каждой единицы будемъ имѣть десятокъ, а вмѣсто 6-ти единицъ получимъ 6 десятковъ, или 60.

3. Умноженіе однозначнаго числа на круглые десятки сводится къ умноженію однозначнаго числа на однозначное и однозначнаго числа на 10.

— Дѣвочка накопила 30 двухкопеечныхъ монетъ. Сколько денегъ (сколько копеекъ) накопила она? Какъ это узнать?

— Надо 2 повторить 30 разъ. Надо 2 умножить на 30.

— Запиши это.

— Ученикъ пишетъ 2×30.

— Какъ станете вы вычислять? Какъ наберете вы 30 двоекъ? Какъ пересчитали бы вы тѣ деньги, что̀ накопила дѣвочка? 2 копейки да 2 копейки — 4 копейки; 4 копейки да 2 копейки — 6 копеекъ... Такъ считать долго: по одной двойкѣ набирать долго. Какъ скорѣе набрать 30 двоекъ? Самое большее — сколько двоекъ вы можете взять на память?

— Десять двоекъ.

— Давайте набирать двойки по десяти (считать двухкопеечники по десяти штукъ). Сколько разъ можемъ мы брать по десяти двоекъ? (если всѣ двухкопеечники сложить въ кучки, по десяти монетъ въ каждой, то сколько будетъ такихъ кучекъ?) Вычисляйте.

— 10 двоекъ — 20; еще 10 двоекъ — 20; еще 10 двоекъ — 20; къ 20-ти прибавить 20, будетъ 40; къ 40-ка прибавить 20 — будетъ 60.

— Вы прибавляли къ 20-ти 20 и потомъ къ 40-ка еще 20. Нельзя ли сразу узнать, сколько будетъ?

— Можно: 20 повторить 3 раза — будетъ 60.

— Какъ же можемъ мы 2 повторить 30 разъ?

— 2 повторить 10 разъ — будетъ 20; потомъ 20 повторить 3 раза, будетъ 60.

Результатъ записывается: 2×30=60.

— Скажите еще разъ какъ можно 2 умножить на 30.

— 2 помножить на 10 — будетъ 20; потомъ 20 умножить на 3 — будетъ 60.

Затѣмъ учитель разъясняетъ дѣтямъ, что можно сдѣлать умноженіе 2×30 въ иномъ порядкѣ: сначала 2 умножить на 3, потомъ полученное число 6 умножить на 10. Съ этою цѣлью учитель пишетъ на доскѣ 30 двоекъ въ 3-хъ столбцахъ, по 10 двоекъ въ каждомъ столбцѣ. (Или же на 10-ти проволокахъ классныхъ счетовъ кладетъ по 3 пары шариковъ на каждой, оставляя промежутки между парами).

— Сколько всѣхъ здѣсь двоекъ, сосчитайте. Какъ узнать, сколько единицъ будетъ во всѣхъ этихъ двойкахъ?

Надо 2 повторить 30 разъ. Надо 2 умножить на 30.

— Давайте вычислять по столбцамъ. Сколько двоекъ въ каждомъ столбцѣ? Какъ узнать, сколько единицъ въ каждомъ столбцѣ?

— Надо 2 повторить 10 разъ; будетъ 20.

— Какъ узнать, сколько единицъ во всѣхъ столбцахъ?

— 20 повторить 3 раза — будетъ 60.

— Мы сейчасъ умножили 2 на 30 попрежнему, т.-е. какъ?

— Сначала 2 умножили на 10, потомъ 20 умножили на 3. Учитель можетъ записать 2×30=2×10×3=60.

— Теперь давайте вычислять по строкамъ. Сколько двоекъ въ каждой строкѣ? А какъ узнать, сколько единицъ въ каждой строчкѣ?

— Надо 2 повторить 3 раза — будетъ 6.

— Въ каждой строчкѣ по 6-ти единицъ. А сколько такихъ строкъ? Какъ же узнать, сколько единицъ во всѣхъ строчкахъ?

— 6 повторить 10 разъ — будетъ 60.

— Какъ мы сейчасъ умножали 2 на 30.

— Сначала умножили 2 на 3, потомъ 6 на 10.

Учитель можетъ подъ прежнею записью написать: $2\times30=2\times3\times10$.

— Умножьте 2 на 40 такъ, какъ умножали сначала. Умножьте теперь такъ, какъ умножали потомъ. Умножьте по второму способу 3 на 20, 2 на 50.

Для вывода изложенныхъ пріемовъ умноженія на круглые десятки могутъ также служить задачи №№ 103—105 нашего сборника; если же выводъ сдѣланъ помимо этихъ задачъ, то на нихъ онъ можетъ быть еще разъ повторенъ. Соотвѣтствующіе численные примѣры помѣщены подъ № 111.

4. Умноженіе однозначнаго числа на двузначное уже достаточно подготовлено разсмотрѣнными ранѣе случаями умноженія: умѣя множить однозначное число на круглые десятки и на однозначное число, ученики легко поймутъ, что для умноженія на двузначное число, напр. для умноженія 3-хъ на 23, слѣдуетъ разбить двузначное число на десятки и единицы, сначала умножить на десятки (взять 20 троекъ), потомъ на единицы (взять 3 тройки).

Этотъ пріемъ удобно можетъ быть выведенъ на задачѣ, въ родѣ той, какая помѣщена въ нашемъ сборникѣ подъ № 106.

— Хозяйка собрала 20 мѣшковъ картофелю, по 3 мѣры въ мѣшкѣ. Сколько мѣръ картофелю собрала хозяйка? Какъ это узнать?

— 3 повторить 20 разъ, 3 умножить на 20; будетъ 60.

— Потомъ набрала она еще 3 мѣшка, также по 3 мѣры въ мѣшкѣ. Сколько мѣръ картофелю собрала хозяйка еще? Какъ это узнать?

— 3 повторить 3 раза, 3 умножить на 3; будетъ 9.

— Сколько всѣхъ мѣръ картофелю собрала хозяйка? Какъ это узнать?

— Къ 60-ти прибавить 9, будетъ 69.

— Сколько всѣхъ мѣшковъ картофелю собрала хозяйка?

— 23 мѣшка.

— По скольку мѣръ въ мѣшкѣ?

— По 3 мѣры.

— Хозяйка собрала 23 мѣшка картофелю, по 3 мѣры въ мѣшкѣ. Что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько мѣръ картофелю собрала она?

— Надо 3 повторить 23 раза, надо 3 умножить на 23.

— Мы уже узнали, сколько получится. Сколько? Запишите.

Ученикъ пишетъ $3\times23=69$.

— Какъ набрали мы 23 тройки?

— Сначала взяли 20 троекъ, потомъ 3 тройки.

— Какъ же умножить 3 на 23?

— Сначала 3 умножить на 20, потомъ 3 умножить на 3.

— Да, чтобы умножить на 23, надо разбить 23 на десятки и единицы, сначала умножить на десятки, потомъ на единицы. Почему такъ слѣдуетъ умножать на 23? Почему такъ слѣдуетъ набирать 23 тройки?

— Потому что мы умѣемъ умножать на 20, и это просто, скоро; умѣемъ умножать и на 3.

Для упражненія въ примѣненіи выведеннаго пріема служатъ задачи №№ 107—113 и примѣры №№ 112—122.

Примѣчаніе. При письменномъ умноженіи удобнѣе бо́льшее число множить на меньшее, нежели обратно: удобнѣе напр. 32164 умножить на 6, нежели 6 умножить на 32164. При устномъ выполненіи дѣйствія это безразлично, если для насъ одинаково легко умножить напр. 40 на 2 и 2 на 40. Поэтому, проходя умноженіе однозначнаго числа на двузначное, мы не считаемъ нужнымъ указывать дѣтямъ на пользованіе перестановкой данныхъ чиселъ, хотя бы ученики и знали, что отъ такой перестановки результатъ не измѣняется. Мы полагаемъ даже, что здѣсь эта перестановка нежелательна, потому что она сократила бы количество упражненій въ умноженіи на двузначное число, необходимыхъ для послѣдующаго умноженія на число многозначное. Кромѣ того, при рѣшеніи задачъ, особенно во время самостоятельныхъ занятій, такая перестановка могла бы повести къ нѣкоторой сбивчивости въ выборѣ множимаго и множителя.

31. Дѣленіе.

Объединеніе обоихъ видовъ дѣленія. До сихъ поръ мы различали два вида дѣленія, употребляя для нихъ такія выраженія, какъ «18 раздѣлить на 3 равныя части» и «18 раздѣлить на тройки». Здѣсь мы считаемъ умѣстнымъ объединить оба случая дѣленія: разъяснить ученикамъ, что раздѣливши напр. 24 на тройки, т.-е. узнавши, сколько разъ три заключается въ 24-хъ, мы вмѣстѣ съ тѣмъ раздѣлили 24 на 3 равныхъ части, т.-е. узнали, какъ велика третья часть 24-хъ (сколько въ ней единицъ), и обратно; иными словами — раздѣлимъ ли мы 24 на тройки, раздѣлимъ ли 24 на 3 равныя части, мы получимъ одно и то же число[1]). Вслѣдствіе этого оба выраженія «24 раздѣлить на 3 равныя части» и «24 раздѣлить на тройки» замѣняются однимъ выраженіемъ «24 раздѣлить на три», которое означаетъ: и раздѣлить на 3 равныя части, и раздѣлить на

---

[1]) Быть можетъ, это подмѣтили уже и сами ученики при рѣшеніи задачъ на дѣленіе.

тройки. Объединеніе обоихъ видовъ дѣленія, кромѣ теоретическаго значенія, состоящаго въ томъ, что оно сводитъ всѣ ариѳметическія дѣйствія только къ *четыремъ* главнымъ дѣйствіямъ, важно и въ практическомъ отношеніи, позволяя при отыскиваніи частнаго вести разсужденіе примѣнительно къ тому виду дѣленія, какой въ данномъ случаѣ окажется удобнѣе. Должно, однако, замѣтить, что при рѣшеніи задачъ, независимо отъ самаго выполненія дѣйствія, слѣдуетъ строго различать, какимъ изъ двухъ видовъ дѣленія рѣшается задача. Работа по составленію таблицы дѣленія представитъ достаточно упражненій для усвоенія такого взгляда на оба случая дѣленія, по которому оба дѣленія, употребляемыя при рѣшеніи различныхъ между собою вопросовъ-задачъ, являются однимъ дѣйствіемъ въ томъ смыслѣ, что, отыскивая результатъ одного дѣленія, мы находимъ въ то же время и результатъ другого, при однихъ и тѣхъ же числовыхъ данныхъ.

— У меня на столѣ много кубиковъ. Я хочу раздѣлить ихъ на 3 равныя части, раздать поровну 3-мъ ученикамъ (вызываетъ къ столу 3-хъ учениковъ). Кто можетъ сдѣлать это?

Одинъ изъ желающихъ сдѣлать этотъ дѣлежъ подходитъ къ столу и начинаетъ раздавать кубики тремъ своимъ товарищамъ: даетъ кубикъ одному, кубикъ другому, кубикъ третьему; даетъ опять каждому по кубику. Здѣсь учитель останавливаетъ ученика и, обращаясь ко всѣмъ, спрашиваетъ:

— Сколько разъ давалъ онъ каждому по кубику? Сколько раздачъ сдѣлалъ онъ?

— Двѣ раздачи.

— Сколько кубиковъ надо взять, чтобы сдѣлать одну раздачу?

— Чтобы сдѣлать одну раздачу, надо взять 3 кубика.

— Начни снова, только прежде чѣмъ раздавать, отдѣляй сначала по 3 кубика, пока не выйдутъ всѣ кубики (подготовь кубики къ дѣлежу).

Такимъ образомъ всѣ кубики разставляются тройками (въ рядъ).

— Какъ разставили мы кубики?

— Мы разставили ихъ тройками.

— Да, мы раздѣлили кубики на тройки. Сосчитайте, сколько вышло троекъ? (8). Сколько тутъ всѣхъ кубиковъ? (24). 24 раздѣлить на тройки — сколько будетъ троекъ? Сколько разъ три содержится въ 24-хъ?

— Теперь дѣли кубики между товарищами.

Ученикъ беретъ тройку кубиковъ и раздаетъ ее по одному кубику, потомъ такъ же дѣлитъ другую и остальныя тройки.

— По скольку кубиковъ получилъ каждый ученикъ изъ каждой тройки? А сколько было всѣхъ троекъ? По скольку же кубиковъ

получилъ каждый ученикъ? Что сдѣлали мы сейчасъ съ 24-мя кубиками?

— Мы раздѣлили ихъ на 3 равныя части.

— 24 раздѣлить на 3 равныя части, сколько будетъ въ каждой части? Вотъ видите, дѣти: если раздѣлить 24 на 3 равныя части, то въ каждой части будетъ столько единицъ, сколько троекъ въ 24-хъ, сколько разъ 3 содержится въ 24-хъ.

— Здѣсь у меня на планкѣ доски 28 кубиковъ. Я раздѣлю ихъ на четверки. (Разставляетъ кубики четверками). Сосчитайте, сколько вышло четверокъ? 28 раздѣлить на четверки, сколько будетъ четверокъ? Сколько разъ 4 содержится въ 28-ми? Если бы я теперь хотѣлъ всѣ эти кубики раздѣлить на 4 равныя части, напр. раздать поровну 4-мъ ученикамъ, то какъ можно было бы это сдѣлать?

— Изъ каждой четверки дать каждому по кубику.

— Сколько же всѣхъ кубиковъ достанется каждому? Почему каждому достанется семь кубиковъ?

— Отъ каждой четверки достанется по одному кубику, а отъ 7-ми четверокъ достанется по 7 кубиковъ.

— Значитъ, если 28 раздѣлить на 4 равныя части, то по скольку будетъ въ каждой части? Что сдѣлалъ я съ кубиками, которые раньше стояли рядомъ?

— Вы разставили ихъ четверками, раздѣлили на четверки.

— Если мы раздѣлили 28 кубиковъ на четверки и узнали, что выходитъ 7 четверокъ, то что мы еще вмѣстѣ съ этимъ узнали?

— Мы узнали еще, что если 28 раздѣлить на 4 равныя части, то въ каждой части будетъ по 7 (единицъ).

— Я скажу вамъ: 72 раздѣлить на восьмерки — будетъ 9 восьмерокъ. А вы скажите мнѣ: 72 раздѣлить на 8 равныхъ частей — сколько единицъ будетъ въ каждой части?

— Я скажу вамъ: 35 раздѣлить на семь равныхъ частей — въ каждой части будетъ по 5 единицъ. А вы скажите мнѣ: 35 раздѣлить на семерки — сколько будетъ семерокъ?

— Я скажу вамъ: въ 54-хъ число 9 содержится 6 разъ. А вы скажите мнѣ: 54 раздѣлить на 9 равныхъ частей — сколько будетъ въ каждой части?

— Я скажу вамъ: 48 раздѣлить на 6 равныхъ частей — въ каждой части будетъ по 8-ми единицъ. А вы скажите мнѣ: сколько разъ 6 содержится въ 48-ми?

Учитель пишетъ 18 : 3.

— Читайте.

Одни ученики читаютъ: 18 раздѣлить на 3 равныя части. Другіе — 18 раздѣлить на тройки.

— 18 раздѣлить на 3 равныя части — сколько будетъ въ каждой части? (Результатъ записывается). 18 раздѣлить на тройки — сколько будетъ троекъ? Слушайте, дѣти: вы уже знаете — раздѣлимъ ли мы 18 на 3 равныя части, раздѣлимъ ли 18 на тройки, все равно получится 6. Поэтому, то, что написано, читаютъ короче такъ: 18 раздѣлить *на три* — будетъ 6. Что же значитъ: 18 раздѣлить на 3?

— Значитъ: 18 раздѣлить на 3 равныя части.

— А еще что значитъ: 18 раздѣлить на 3?

— Еще значитъ: 18 раздѣлить на тройки; узнать, сколько троекъ; узнать, сколько разъ 3 содержится въ 18-ти.

Слѣдуетъ нѣсколько упражненій: учитель пишетъ примѣры на дѣленіе, ученики читаютъ ихъ, употребляя общее выраженіе «раздѣлить на четыре, на шесть»; затѣмъ учитель спрашиваетъ, что въ частности означаетъ «раздѣлить на четыре, на шесть»?

Таблица дѣленія. Продолжая и заканчивая таблицу дѣленія, часть которой уже извѣстна ученикамъ послѣ изученія дѣйствій въ предѣлѣ 20-ти, считаемъ нужнымъ напомнить и вновь показать дѣтямъ различные пріемы добыванія относящихся сюда результатовъ, ведя разсужденіе примѣнительно то къ одному, то къ другому виду дѣленія, и затѣмъ обобщая сдѣланный выводъ. Эти пріемы слѣдующіе.

1. Отысканіе частнаго путемъ вычитанія. Этотъ пріемъ былъ намѣченъ еще въ предѣлѣ перваго десятка.

— Учитель раздалъ 24 листа бумаги поровну 4-мъ ученикамъ (задача № 114). Раздавалъ онъ такъ: взялъ 4 листа и далъ каждому по листу; опять взялъ 4 листа и далъ каждому по листу и т. д. Когда каждый ученикъ получилъ по листу, т.-е. когда была сдѣлана первая раздача, тогда сколько бумаги осталось у учителя? Какъ это узнать?

— Отъ 24 отнять 4 — останется 20.

Дѣлается запись 24 — 4 = 20.

— Послѣ второй раздачи, т.-е. когда каждый ученикъ получилъ по другому листу, сколько бумаги осталось у учителя? Какъ это узнать?

Подъ первой записью дѣлается вторая 20—4 = 16. Такъ продолжается до конца (4 — 4 = 0).

— Сколько всѣхъ раздачъ сдѣлалъ учитель? По скольку листовъ бумаги получилъ каждый ученикъ? 24 раздѣлить на четверки, сколько будетъ четверокъ? Сколько разъ 4 содержится въ 24-хъ? 24 раздѣлить на 4 равныя части — сколько будетъ въ каждой части? 24 раздѣлить *на четыре* — сколько получится? Запишите это. (24 : 4 = 6). Какъ раздѣлили мы 24 на 4?

— Отнимали по 4 и сосчитали, сколько разъ отнимали.

— У хозяйки было 45 фунтовъ коровьяго масла; каждый мѣсяцъ изводила она по 9 фунтовъ. Во сколько мѣсяцевъ вышло у нея все масло? (Задача № 115, относящаяся къ дѣленію по содержанію). Что надо сдѣлать, чтобы узнать это?

— Надо 45 раздѣлить на девятки. Надо узнать, сколько разъ 9 содержится въ 45-ти.

— Какъ можно это узнать?

— Вычитаніемъ.

— Узнавайте. Прошелъ мѣсяцъ, сколько масла осталось у хозяйки? Какъ это узнать? (45 — 9 = 36). Продолжайте.

— Прошелъ другой мѣсяцъ. Чтобы узнать, сколько осталось масла, надо отъ 36 отнять 9.

И т. д.

— Во сколько же мѣсяцевъ вышло у хозяйки масло? Сколько разъ 9 содержится въ 45-ти? А если 45 раздѣлить на 9 равныхъ частей — сколько получится въ каждой части? 45 раздѣлить на 9 — сколько будетъ? Запишите.

2. Отысканіе частнаго путемъ умноженія. Это наиболѣе удобный и наиболѣе важный пріемъ, уясняющій связь между умноженіемъ и дѣленіемъ. Онъ уже знакомъ ученикамъ.

— Мальчикъ читалъ книжку, въ которой 56 страницъ; каждый день прочитывалъ онъ по 7-ми страницъ. (Задача № 116). Что надо сдѣлать, чтобы узнать, во сколько дней прочиталъ онъ всю книжку?

— Надо 56 раздѣлить на семерки. Надо узнать, сколько разъ 7 содержится въ 56-ти.

— Давайте угадывать и провѣрять. Не въ 2 ли дня прочиталъ мальчикъ всю книжку? Почему нѣтъ?

— Потому что въ 2 дня онъ прочиталъ только 14 страницъ.

— А какъ узнать, сколько страницъ прочиталъ мальчикъ въ 2 дня?

— Надо 7 повторить 2 раза, надо 7 умножить на 2.

— Не въ 3 ли дня прочиталъ онъ книжку? Не въ 4 ли дня? Можетъ-быть, въ 6 дней? Не 8 ли дней? Почему такъ?

— Потому что въ 8 дней онъ прочитаетъ 56 страницъ, а въ книжкѣ и есть 56 страницъ.

— А какъ узнать, что въ 8 дней прочитаетъ онъ 56 страницъ?

— Надо 7 повторить 8 разъ, надо 7 умножить на 8.

— Вотъ видите, дѣти: мы угадывали и провѣряли. Какъ же мы провѣряли, какимъ дѣйствіемъ?

— Умноженіемъ.

— Но узнавать такъ, какъ мы сейчасъ узнавали, долго: должно сразу припомнить по таблицѣ умноженія: сколько разъ надо повторить 7, чтобы получить 56.

— Сколько же разъ 7 содержится въ 56-ти? А если раздѣлить 56 на 7 равныхъ частей, сколько получится въ каждой части? 56 раздѣлить на 7 — сколько будетъ? Запишите.

При рѣшеніи слѣдующей задачи (№ 117) можно потребовать отъ учениковъ, чтобы они прямо припомнили по таблицѣ умноженія, сколько разъ надо повторить 3, чтобы получить 24.

Пріемъ отысканія результата при дѣленіи на равныя части отличается отъ предыдущаго только тѣмъ, что здѣсь подыскивается не множитель, а множимое.

— Хозяйка собрала 27 мѣръ картофелю и разсыпала его поровну въ 9 мѣшковъ (задача № 118). Что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько мѣръ ссыпала она въ каждый мѣшокъ?

— Надо 27 раздѣлить на 9 равныхъ частей.

— Если бъ она ссыпала по одной мѣрѣ въ мѣшокъ, то сколько мѣръ пришлось бы на 9 мѣшковъ? А если бъ по 2 мѣры, — тогда сколько? А какъ это узнать? Не по 3 ли мѣры ссыпала она въ мѣшокъ? Какъ это провѣрить? Вотъ видите: чтобы раздѣлить 27 на 9 равныхъ частей, должно вспомнить по таблицѣ умноженія: какое число надо повторить 9 разъ, чтобы получить 27.

При рѣшеніи слѣдующихъ задачъ (№№ 119 и 120) учитель требуетъ отъ учениковъ, чтобы они прямо по таблицѣ умноженія припомнили, какое число надо повторить 6 разъ, чтобы получить 48; какое число надо повторить 8 разъ, чтобы вышло 56.

Примѣры №№ 123—132 могутъ служить для того, чтобы ученики во время самостоятельныхъ занятій еще разъ вспомнили о пріемѣ дѣленія посредствомъ вычитанія и поупражнялись въ отысканіи частнаго путемъ умноженія. Въ № 123, чтобы опредѣлить, сколько разъ 8 содержится въ 48-ми, дѣти сосчитаютъ, сколько разъ они передъ этимъ отнимали по 8-ми. Въ № 125 ученики поставятъ на мѣсто знака вопроса число 7, сосчитавши, сколько четверокъ складывали они передъ этимъ; а зная, сколько разъ надо повторить 4, чтобы получить 28, они напишутъ и частное отъ дѣленія 28-ми на 4. При рѣшеніи №№ 127—132 ученики должны припомнить по таблицѣ умноженія, сколько разъ надо повторить данное число или какое число надо повторить извѣстное число разъ, чтобы получить другое данное число; послѣ этого они напишутъ частное, которое требуется отыскать во второй строкѣ примѣра.

Рѣшая съ учениками задачи №№ 121—130, учитель можетъ еще разъ провѣрить, насколько усвоили дѣти изложенные выше пріемы дѣленія и насколько быстро отыскиваютъ они результаты.

Примѣры №№ 133 и 134 служатъ для рѣшенія во время самостоятельныхъ занятій; въ этихъ примѣрахъ къ дѣленію присоединены и остальныя дѣйствія.

3. Отысканіе частнаго по частямъ. Этотъ пріемъ, уже примѣнявшійся ранѣе, состоитъ въ томъ, что дѣлимое разбивается на такія группы, какія ученики на основаніи прежде пройденнаго могутъ раздѣлить сразу, на память: напр. на группы, не превышающія 20 [1]). Дѣленіе на 5 удобно свести къ дѣленію десятка.

— Въ корзинкѣ было 40 яицъ; хозяйка сосчитала эти яйца пятками. Сколько пятковъ насчитала она? (задача № 131). Что надо сдѣлать, чтобы узнать это?

— Надо 40 раздѣлить на пятки; надо узнать, сколько разъ 5 содержится въ 40-ка.

---

[1]) Выполняя дѣленіе посредствомъ вычитанія, мы также разбиваемъ дѣлимое на группы, изъ которыхъ каждая равна дѣлителю и даетъ въ частномъ одну единицу.

— Сколько десятковъ въ 40-ка? Сколько пятковъ въ десяткѣ? Сколько пятковъ въ 4-хъ десяткахъ? Сколько же получится, если 40 раздѣлить на 5? Запишите.

— Работникъ заработалъ въ городѣ 30 рублей, пятую часть этихъ денегъ онъ послалъ домой. Сколько денегъ послалъ онъ домой? (задача № 132). Какъ это узнать?

— Надо 30 раздѣлить на 5 равныхъ частей.

— Сколько десятковъ въ 30-ти? Сколько получится, если одинъ десятокъ раздѣлить на 5 равныхъ частей? Сколько будетъ, если 3 десятка раздѣлить на 5 равныхъ частей? 30 раздѣлить на 5 — сколько же будетъ? Запишите.

Подобнымъ же образомъ выполняется дѣленіе на 5 и въ тѣхъ случаяхъ, когда въ дѣлимомъ кромѣ десятковъ есть и единицы. (Задачи №№ 133, 134, 135).

— Мальчику дали 18 орѣховъ, и онъ разложилъ ихъ на 6 одинаковыхъ кучекъ (задача № 136). По скольку орѣховъ положилъ онъ въ каждую кучку? Какъ это узнать? Потомъ дали ему еще 12 орѣховъ; онъ и ихъ разложилъ въ тѣ же 6 кучекъ. По скольку орѣховъ пришлось еще въ каждую кучку? Какъ это узнать? Сколько всѣхъ орѣховъ разложилъ мальчикъ? По скольку орѣховъ положилъ онъ въ каждую кучку? Мальчикъ разложилъ 30 орѣховъ поровну въ 6 кучекъ. Что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько орѣховъ пришлось въ каждую кучку?

— Надо 30 раздѣлить на 6 равныхъ частей.

— Какъ раздѣлили мы 30 на 6?

— Сначала раздѣлили 18, потомъ 12.

— Да, 18 вы уже умѣете раздѣлить на 6 сразу. А когда раздѣлите 18, то сколько еще останется дѣлить? Значитъ, если мы не можемъ раздѣлить число сразу, то мы будемъ дѣлить его не сразу, а по частямъ.

Этотъ выводъ можетъ быть еще разъ повторенъ примѣнительно къ дѣленію по содержанію. (Задача № 138).

Изложеннымъ пріемомъ выполняется дѣленіе въ задачахъ № 137 и №№ 139—144.

Примѣры №№ 135—139 служатъ для рѣшенія во время самостоятельныхъ занятій.

4. Разложеніе дѣлителя на сомножителей. Веревку длиною въ 30 вершковъ разрѣзали на 3 равныя части (задача № 145). Какой длины вышла каждая часть? Какъ это узнать? Потомъ каждую такую часть разрѣзали пополамъ. Какой длины вышла каждая новая часть? Какъ это узнать? На сколько частей разрѣзали теперь всю веревку? Какъ же можно раздѣлить 30 на 6?

5. Округленіе дѣлителя. Для того, чтобы раздѣлить, напр., 72 на 9, разсуждаемъ такъ: въ 72-хъ 7 десятковъ, значитъ девятокъ не менѣе 7-ми; 7 девятокъ составляютъ 63; слѣдовательно, кромѣ нихъ, въ числѣ 72 заключается еще одна девятка (72 — 63 = 9), т.-е. всѣхъ девятокъ будетъ 8. Этотъ пріемъ дѣленія можетъ быть выведенъ на задачѣ № 148 и затѣмъ примѣненъ къ рѣшенію задачъ №№ 149—151.

Замѣтимъ при этомъ, что здѣсь при рѣшеніи задачъ, требующихъ дѣленія на равныя части, послѣ того какъ опредѣлено дѣйствіе, не-

обходимое для рѣшенія задачи (чтобы узнать это, надо 54 раздѣлить на 9 равныхъ частей), выполненіе дѣйствія можетъ быть сведено къ отысканію содержанія; намъ надо 54 раздѣлить на 9 равныхъ частей; а если мы узнаемъ, сколько девятокъ въ 54-хъ, то вмѣстѣ съ тѣмъ найдемъ и девятую часть 54-хъ. Или же здѣсь можно разсуждать такъ: раздѣлимъ одинъ десятокъ на 9 равныхъ частей, получимъ въ каждой части по единицѣ и въ остаткѣ единицу; отъ дѣленія же 5-ти десятковъ имѣемъ въ каждой части 5 единицъ и въ остаткѣ 5 единицъ; эти 5 оставшихся единицъ вмѣстѣ съ 4-мя единицами составляютъ число 9; раздѣливъ его на 9 равныхъ частей, будемъ имѣть въ каждой части еще по единицѣ.

Для самостоятельнаго примѣненія учениками различныхъ пріемовъ табличнаго дѣленія могутъ служить примѣры №№ 140—143, въ которыхъ къ дѣленію присоединены и остальныя дѣйствія.

Упражненія въ табличномъ дѣленіи мы заканчиваемъ таблицей дѣленія въ порядкѣ: ее дѣти составляютъ во время самостоятельныхъ занятій (стр. 22 нашего сборника).

Послѣ того какъ ученики ознакомились съ пріемами табличнаго дѣленія и усвоили на память таблицу дѣленія, слѣдуетъ продѣлать нѣсколько упражненій на дѣленіе съ остаткомъ (задачи №№ 152—155; примѣры №№ 144—147). Зная хорошо таблицу, ученики могутъ сразу опредѣлить наибольшее число, которое можно раздѣлить безъ остатка. Такъ при рѣшеніи задачъ №№ 152 и 153 дѣти сразу могутъ сказать, что всѣхъ листовъ бумаги роздано 48, что хозяйка купила крупы на 72 коп. Въ случаѣ же затрудненія можно заставить выполнить дѣленіе однимъ изъ вышеизложенныхъ пріемовъ, напр. путемъ умноженія или посредствомъ разложенія дѣлимаго на группы.

— Припомните по таблицѣ умноженія, какое число надо повторить 8 разъ, чтобы получить 54.

— Такого числа нѣтъ.

— Тогда припомните, какое число надо повторить 8 разъ, чтобы получить меньше 54-хъ?

Если дѣти не назовутъ сразу 6-ти, а укажутъ напр. 4 или 5, можно спросить: нѣтъ ли другого числа, побольше, которое, умноженное на 8, давало бы все-таки менѣе 54-хъ, и такимъ путемъ довести учениковъ до искомаго числа 6, которое будетъ наибольшимъ потому, что слѣдующее за нимъ число 7, повторенное 8 разъ, даетъ уже больше 54-хъ.

Или напр. такъ:

— Назовите число меньше 54-хъ, которое вы умѣете раздѣлить на 8.

Ученики могутъ назвать напр. число 40, и тогда дѣленіе съ остаткомъ сводится къ болѣе простому дѣленію 14-ти на 8.

Внѣтабличное дѣленіе. Кромѣ таблицы дѣленія и дѣленія круглыхъ десятковъ, дающаго въ частномъ также круглые десятки (80 : 4) или однозначное число (60 : 30), — въ предѣлѣ первой сотни могутъ имѣть мѣсто два случая

дѣленія: дѣленіе двузначнаго числа на однозначное и дѣленіе двузначнаго числа на двузначное.

1. Дѣленіе двузначнаго числа на однозначное. Дѣлимое разбивается на такія двѣ группы, изъ которыхъ одна даетъ десятки частнаго, другая — его единицы. Для этого иногда надо разбить дѣлимое на его десятки и единицы (86 : 2), иногда — по-другому, раздробивши въ единицы одинъ или нѣсколько десятковъ (52 : 2, 95 : 5). Слѣдуетъ начать съ перваго изъ этихъ случаевъ, какъ болѣе простого; затѣмъ разсмотрѣть дѣленіе круглыхъ десятковъ, дающее въ частномъ десятки вмѣстѣ съ единицами (50 : 2), и потомъ уже перейти къ общему случаю дѣленія, требующаго раздробленія десятковъ въ единицы.

— Хозяйка сорвала 80 яблоковъ и разложила ихъ поровну въ 2 корзины (задача № 156). По скольку яблоковъ положила она въ каждую корзину? Что надо сдѣлать, чтобы узнать это? Какъ раздѣлили вы 80 на 2 равныя части?

— Сразу, на память: 80 — это 8 десятковъ; 8 раздѣлить пополамъ — будетъ 4; 8 десятковъ раздѣлить пополамъ — будетъ 4 десятка, или 40.

— Послѣ этого подобрала она подъ яблоней еще 6 яблоковъ и ихъ разложила поровну въ тѣ же 2 корзины. По скольку яблоковъ пришлось еще въ каждую корзину? Какъ это узнать? Сколько всѣхъ яблоковъ набрала хозяйка? По скольку яблоковъ положила она въ каждую корзину? Хозяйка набрала 86 яблоковъ и разложила ихъ поровну въ 2 корзины. Что надо сдѣлать, чтобы узнать, по скольку яблоковъ положила она въ каждую корзину?

— Надо 86 раздѣлить на 2 равныя части.

— Какъ раздѣлили мы 86 на 2 равныя части?

— Сначала раздѣлили 80, потомъ 6.

— Да, чтобы раздѣлить 86 на 2 равныя части, мы разбили 86 на десятки и единицы; сначала раздѣлили десятки, потомъ единицы. Повторите.

Этотъ выводъ можетъ быть сдѣланъ еще разъ примѣнительно къ дѣленію по содержанію. (Задача № 159).

Къ разсмотрѣнному случаю дѣленія относятся задачи №№ 156—161 и примѣры №№ 148—151.

— Барышникъ продалъ по одинаковой цѣнѣ 2 коровъ и взялъ за обѣихъ 50 рублей. По скольку взялъ онъ за каждую корову? (Задача № 162).

Ученики могутъ дать вѣрный отвѣтъ, раздѣливъ 50 на 2 напр. такъ: одинъ десятокъ раздѣлить пополамъ — будетъ 5; а если раздѣлить 5 десятковъ, то получится въ 5 разъ больше 5-ти, т.-е. 25; 50 : 2 = 25.

Затѣмъ изъ разсмотрѣнія десятичнаго состава полученнаго числа выводится иной пріемъ дѣленія.

— Изъ сколькихъ десятковъ и единицъ состоитъ число 25? Какое число надо раздѣлить на 2, чтобы получить 2 десятка? Какое число надо раздѣлить на 2, чтобы получить 5 единицъ? На какія же группы удобно разбить число 50 для того, чтобы раздѣлить его на 2?

— На 40 и 10.

— Да, такъ дѣлить всего удобнѣе, потому что, раздѣливши 40, мы получимъ всѣ десятки того числа, которое отыскиваемъ; а раздѣливши 10, найдемъ всѣ единицы этого числа.

Для упражненія въ примѣненіи выведеннаго пріема служатъ задачи №№ 163—168 и примѣры №№ 152—155.

— Крестьянинъ повезъ въ городъ продавать сѣно; это сѣно онъ навилъ поровну на 2 воза; всего сѣна оказалось 52 пуда. По скольку пудовъ навилъ онъ на каждый возъ? Какъ это узнать? Какъ станете вы дѣлить 52 на 2?

Знакомые уже съ дѣленіемъ двузначнаго числа на однозначное въ такихъ случаяхъ, какъ 48 : 2, 96 : 3 и т. п., ученики и здѣсь могутъ сказать:

— Мы раздѣлимъ сначала 50, потомъ 2.

— Какъ станете вы дѣлить 50 на 2?

— Мы разобьемъ 50 на 40 и 10.

— Стало-быть, на какія же группы разобьется тогда все число 52?

— На 40, 10 и 2.

— Дѣлите.

— 40 раздѣлить на 2 — будетъ 20; 10 раздѣлить на 2 — будетъ 5; 2 раздѣлить на 2 — будетъ 1; 20 да 5, да 1 — всего 26.

— Изъ сколькихъ десятковъ и единицъ состоитъ полученное число 26? Мы разбили 52 на 40, 10 и 2 (эти группы могутъ быть записаны). Которая изъ этихъ группъ дала намъ 2 десятка? А отъ дѣленія какихъ группъ получилось 6 единицъ? Сколько единицъ дала вторая группа? третья? Съ одного ли раза получили мы всѣ 6 единицъ? Не догадаетесь ли вы, что̀ надо сдѣлать, чтобы получить всѣ 6 единицъ съ одного раза?

— Надо 12 раздѣлить на 2.

— Да, надо изъ второй и третьей группы сдѣлать одну группу. Какая же будетъ эта группа? Стало-быть, на какія двѣ группы удобно разбить число 52 для того, чтобы раздѣлить его на 2?

— На 40 и 12.

— Дѣлите.

— 40 раздѣлить на 2 — будетъ 20; 12 раздѣлить на 2 — будетъ 6; 20 и 6 — 26.

— Дѣлятся ли всѣ 5 десятковъ на 2?

— Дѣлятся.

— Но получатся ли при этомъ одни только десятки?

— Нѣтъ, получатся и единицы.

— Зачѣмъ мы разбили 52 не на 50 и 2, а на 40 и 12?

— Затѣмъ, чтобы получить всѣ единицы съ одного раза.

— Раздѣлимъ 72 на 3. Дѣлятся ли всѣ 7 десятковъ на 3? Самое большее — изъ 7-ми десятковъ сколько десятковъ можно раздѣлить

на 3? (6 десятковъ). Поэтому, когда станете 72 разбивать на группы, то какая будетъ первая группа? (60). А вторая? (12). Дѣлите.

— 60 раздѣлить на 3 — будетъ 20; 12 раздѣлить на 3 — будетъ 4; 20 и 4—24.

Для упражненія въ примѣненіи выведеннаго пріема могутъ служить задачи №№ 170—176 и примѣры №№ 156—163.

Напомнивъ дѣтямъ, какія числа называются четными и какія нечетными[1]), учитель можетъ дать ученикамъ, въ видѣ самостоятельной работы, упражненія, приведенныя подъ №№ 164—166. Собственно говоря, это — упражненія въ умноженіи или сложеніи. Такъ, чтобы найти по порядку всѣ числа до ста, которыя дѣлятся безъ остатка на 2, дѣти возьмутъ двойку одинъ, два, три, четыре, пять и т. д. разъ; или же будутъ писать рядъ чиселъ 2, 4, 6, 10 и т. д., прибавляя по 2 къ предыдущему числу для образованія слѣдующаго. Но, по отношенію къ дѣленію, эти упражненія могутъ привести къ тому, что ученики: 1) замѣтятъ признакъ четнаго и нечетнаго числа, а также признакъ дѣлимости на 5; 2) могутъ запомнить составъ нѣкоторыхъ чиселъ изъ множителей, находящійся внѣ предѣловъ таблицы, напр. $72 = 6 \times 12$, $64 = 4 \times 16$ и т. п., что даетъ возможность сразу, на память, дѣлить 72 на 6, 64 на 4; а затѣмъ 72 на 12, 64 на 16 и т. п.

2. Дѣленіе двузначнаго числа на двузначное. Такое дѣленіе сначала можетъ быть выполнено посредствомъ вычитанія и сложенія или умноженія; потомъ слѣдуетъ показать дѣтямъ, какъ *угадывается* частное, и какъ оно повѣряется. Разсужденіе удобнѣе здѣсь вести примѣнительно къ дѣленію по содержанію.

— Фунтъ свѣчей стоитъ 21 коп., хозяйка купила свѣчей на 84 коп. Сколько фунтовъ свѣчей купила хозяйка? (Задача № 117). Что надо сдѣлать, чтобы узнать это? Почему надо 84 раздѣлить на 21?

— На 84 коп. дадутъ столько фунтовъ, сколько разъ 21 содержится въ 84; а чтобы узнать это, надо 84 раздѣлить на 21.

— Будемъ узнавать, сколько фунтовъ свѣчей купила хозяйка. Если купитъ она одинъ фунтъ, сколько денегъ останется у нея отъ 84-хъ копеекъ? Какъ это узнать? ($84 - 21 = 63$). Купитъ она еще фунтъ, тогда сколько денегъ у нея останется? ($63 - 21 = 42$). Купитъ третій фунтъ — сколько останется? ($42 - 21 = 21$). Купитъ еще фунтъ — останется ли что нибудь отъ 84-хъ коп.? ($21 - 21 = 0$).

— Сколько же фунтовъ свѣчей купила хозяйка? Какъ узнали мы, сколько разъ 21 содержится въ 84-хъ?

— Отнимали по 21.

— Да, мы отнимали по 21 до тѣхъ поръ, пока ничего не осталось, и сосчитали, сколько разъ можно отнимать.

— Рѣшимъ нашу задачу по-другому. Если хозяйка купитъ одинъ фунтъ, то она издержитъ 21 коп. А если купитъ еще фунтъ, то сколько

---

[1]) См. годъ первый нашего сборника, стран. 66, №№ 125 и 126.

издержитъ денегъ? Какъ это узнать? (21 + 21 = 42). Купить еще фунтъ — сколько заплатитъ? (42 + 21 = 63). Купить еще четвертый фунтъ — сколько отдастъ за все? (63 + 21 = 84). Какъ мы сейчасъ узнали, сколько разъ 21 содержится въ 84-хъ? Да, мы набирали по 21 (21 + 21 + 21 + 21 = 84), пока не получили 84, и считали, сколько разъ брали. Вмѣсто того, чтобы прибавлять по 21, какое дѣйствіе можно сдѣлать? Да, можно умножать 21 на 2, на 3, пока не получится 84. Узнайте умноженіемъ, сколько разъ 16 содержится въ 80-ти.

— 16 повторить 2 раза — будетъ 32, 16 повторить 3 раза — будетъ 48, 16 умножить на 4 — получится 64, 16 умножить на 5 — будетъ 80.

— Сколько же разъ 16 содержится въ 80-ти? Сколько получится, если 80 раздѣлить на 16?

— Но узнавать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, такъ, какъ мы узнавали, — долго. Я покажу вамъ, какъ можно угадать это скорѣе. Узнаемъ, сколько разъ 21 содержится въ 84-хъ. Сколько десятковъ въ числѣ 84? Сколько десятковъ въ числѣ 21? Вмѣсто чиселъ 84 и 21 будемъ дѣлить 80 на 20. Сколько разъ 2 десятка содержатся въ 8 десяткахъ? А теперь посмотримъ, не будетъ ли и 21 содержаться въ 84-хъ тоже 4 раза. Какъ это провѣрить?

— 21 повторить 4 раза, будетъ 84.

— Угадали мы, сколько разъ 21 содержится въ 84?

— Угадали.

— Узнаемъ, сколько разъ 29 содержится въ 87. (87 : 29). Какъ будемъ угадывать это?

— Раздѣлимъ 80 на 20; 2 десятка въ 8-ми десяткахъ содержатся 4 раза.

— Что теперь надо сдѣлать?

— Надо провѣрить (посмотрѣть), не будетъ ли и 29 содержаться въ 87 тоже 4 раза.

— Какъ провѣрить это?

— Надо 29 умножить на 4.

При испытаніи частнаго умноженіемъ весьма часто можетъ получиться произведеніе болѣе ста, между тѣмъ какъ дѣти знакомы съ нумераціей и дѣйствіями лишь въ предѣлѣ сотни. Вычислять такого произведенія не надо: достаточно лишь убѣдиться въ томъ, что оно больше дѣлимаго.

— 20 умножить на 4 — будетъ 80; 9 умножить на 4 — будетъ 36.

— Если къ 80-ти прибавить 36, получится ли 87?

— Нѣтъ, получится больше.

— Стало-быть, содержится ли 29 въ 87-ми 4 раза?

— Нѣтъ, меньше 4-хъ разъ.

— Попробуемъ теперь, не будетъ ли 29 содержаться въ 87-ми 3 раза. Какъ это провѣрить?

— 29 умножить на 3: получится 87.

— Сколько же разъ содержится 29 въ 87? Угадали ли мы это сразу? Хотя мы и не угадали этого сразу, все-таки узнавать такъ скорѣе, чѣмъ мы узнавали раньше.

Задаваясь десятками дѣлителя въ десяткахъ дѣлимаго, мы округляемъ дѣлителя, напр. вмѣсто 23 беремъ 20. Если въ дѣлителѣ единицъ больше 5-ти, напр. 8, 9 единицъ, то дѣлитель ближе подходитъ къ слѣдующему числу десятковъ; напр. дѣлитель 19 ближе къ 20-ти, нежели къ 10, и мы найдемъ частное, болѣе близкое къ вѣрному, если зададимся въ десяткахъ дѣлимаго десятками дѣлителя, увеличенными однимъ десяткомъ. На это можно указать ученикамъ.

— Какъ раздѣлите вы 76 на 19?

— Раздѣлимъ 70 на 10: 1 десятокъ содержится въ 7-ми десяткахъ 7 разъ. Посмотримъ, не будетъ ли и 19 содержаться въ 76 тоже 7 разъ.

Дѣлается повѣрка; отыскивается настоящее частное.

— Для того, чтобы узнать, сколько разъ 19 содержится въ 76-ти, мы дѣлили 70 на 10, т.-е. вмѣсто 19 брали 10. Къ чему ближе подходитъ 19: къ 10-ти или къ 20-ти? (отъ чего меньше отличается?) Чтобы поскорѣе найти, сколько разъ 19 содержится въ 76-ти, будемъ дѣлить 70 на 20. Сколько разъ 2 десятка содержатся въ 7-ми десяткахъ? Что теперь надо сдѣлать?

— Надо провѣрить (посмотрѣть), не будетъ ли и 19 въ 76-ти содержаться тоже 3 раза: 19 умножить на 3 — будетъ 57.

— 3 раза 19 меньше 76-ти. Сколько же разъ надо теперь прикинуть?

— 4 раза: 19 умножить на 4 — будетъ 76.

Для упражненія въ примѣненіи выведеннаго пріема могутъ служить задачи №№ 178—184 и примѣры №№ 167—182 нашего сборника[1]).

Примѣчаніе. При рѣшеніи задачъ, требующихъ дѣленія на равныя части, послѣ установленія надлежащаго дѣйствія, самое выполненіе дѣйствія удобнѣе дѣлать примѣнительно къ дѣленію по содержанію. Такъ, для рѣшенія задачи № 178 надо 96 раздѣлить на 32 равныя части. Но мы узнаемъ, сколько получится въ каждой части, если опредѣлимъ, сколько разъ 32 содержится въ 96-ти.

Задачи №№ 185—188 и примѣры 183—186 содержатъ случаи дѣленія съ остаткомъ. При провѣркѣ частнаго слѣдуетъ обратить вниманіе учениковъ и на то, что получаемый остатокъ долженъ быть меньше дѣлителя.

Задачи №№ 187—190, назначенныя для рѣшенія во время самостоятельныхъ занятій, принадлежатъ къ задачамъ неопредѣленнымъ, т.-е. имѣющимъ много рѣшеній. Открывая значительное поле для самодѣятельности, онѣ могутъ заинтересовать учениковъ. Рѣшеніе такихъ задачъ, какъ напр. задача № 187,— сколькимъ нищимъ и поскольку можно раздать 60 копеечныхъ монетъ такъ, чтобы всѣ получили поровну?— можетъ быть записано слѣдующимъ образомъ: $1 \times 60 = 60$; $2 \times 30 = 60$; $3 \times 20 = 60$ и т. д.; не бѣда, если дѣти напишутъ и не всѣ разложенія и безъ должнаго порядка. Для составленія этихъ разложеній назначается (предполагается) множимое (предполагаемъ, по скольку копеекъ дается каждому нищему), и посредствомъ дѣленія отыскивается множитель (узнается, будутъ ли тогда розданы всѣ 60 к. и, если будутъ, то сколькимъ нищимъ); или же назначается множитель (предполагается, сколькимъ нищимъ раздаются деньги), и дѣленіемъ отыскивается

---

[1]) При дѣленіи сотни послѣдняя разсматривается какъ 10 десятковъ.

множимое (узнается, можно ли столькимъ нищимъ раздать всѣ 60 к., и, если можно, то по скольку придется каждому). Подобныя задачи могутъ повести къ тому, что дѣти запомнятъ многіе результаты умноженія и дѣленія, выходящіе изъ предѣловъ таблицъ этихъ дѣйствій, какъ напр. $4 \times 19 = 76$, $76 : 19 = 4$, и т. п.; а это знаніе имѣетъ большую цѣну въ практическомъ отношеніи, такъ какъ влечетъ за собою быстроту вычисленія.

32. Дроби. Какъ мы уже говорили раньше (введеніе, § 6), закончивъ дѣленіе чиселъ первой сотни, умѣстно начать упражненія съ простѣйшими долями: $^1/_2$, $^1/_4$ и $^1/_8$. Здѣсь мы знакомимъ учениковъ съ дѣленіемъ *единицы* на равныя части и употребленіемъ нѣсколькихъ такихъ частей, что и ведетъ къ появленію чиселъ, называемыхъ дробями. Показываемъ письменное обозначеніе дробей. Сообщаемъ затѣмъ происхожденіе дробей отъ дѣленія на равныя части *нѣсколькихъ* единицъ и указываемъ составъ полнаго частнаго при дѣленіи съ остаткомъ.

Проходя дѣленіе, дѣти уже ознакомились съ выраженіями «половина», «четверть», «восьмая часть», и знаютъ, какъ найти половину, четверть, восьмую часть какого-нибудь числа, напр. половину 18-ти, четверть 32-хъ и т. п. Задачи №№ 189—195 служатъ для подготовки къ понятію о дѣленіи *единицы* на равныя части и объ употребленіи одной и нѣсколькихъ такихъ частей.

При обозначеніи дробей на наглядныхъ пособіяхъ единица съ удобствомъ можетъ быть изображена нѣкоторою длиною, напр. длиною валика дробныхъ счетовъ [1]), нитки или палочки, прямой черты (линіи), которая раздѣляется на равныя части. Для этой же цѣли могутъ служить такіе предметы, которые приходится дѣлить на части, какъ, напр., листъ бумаги.

Для того, чтобы имѣть возможность назвать единицей напр. валикъ дробныхъ счетовъ (длину его) и показать, что единицу иногда приходится дѣлить на части, надо сказать нѣсколько словъ объ измѣреніи.

— Если бъ у насъ на столѣ было много кубиковъ, и мы захотѣли бы узнать, сколько ихъ, то что надо сдѣлать для этого?

— Надо сосчитать

---

[1]) *Дробные счеты* отличаются отъ обыкновенныхъ классныхъ счетовъ тѣмъ, что на проволокахъ ихъ, вмѣсто шариковъ, надѣты узкіе подвижные цилиндрики — валики: на одной проволокѣ — валикъ цѣлый, на другихъ валики распилены на различное число равныхъ частей для изображенія наиболѣе употребительныхъ долей; большею частью имѣются доли: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_{10}$, $^1/_{12}$, $^1/_{16}$, $^1/_{20}$, $^1/_{24}$. Проволоки вынимаются изъ рамки, благодаря чему на сосѣднихъ проволокахъ можно помѣстить любыя изъ имѣющихся долей, что бываетъ удобно при сравненіи ихъ между собою. Валикъ обыкновенно дѣлается длиною въ 1 футъ.

— Вспомните: то, что считаютъ (чему ведутъ счетъ), называется единицей. Стало-быть, при счетѣ кубиковъ чѣмъ былъ бы каждый кубикъ?

— Каждый кубикъ былъ бы единицей.

— Что надо сдѣлать, чтобы узнать длину нашей комнаты?

— Надо ее смѣрить (измѣрить).

— Чѣмъ можно измѣрить длину комнаты?

— Аршиномъ.

— Вотъ аршинъ. Ступай, измѣрь длину комнаты.

Производится измѣреніе. Аршинъ долженъ уложиться въ измѣряемой длинѣ нѣсколько разъ съ остаткомъ. Если длина комнаты содержитъ цѣлое число аршинъ (объ этомъ надо справиться напередъ), то можно дать другой примѣръ, напр. измѣрить разстояніе отъ стѣны до стула. (Далеко ли отъ стѣны поставилъ я стулъ?)

— Какова же длина нашей комнаты?

— 11 аршинъ съ лишкомъ.

— Слушайте, дѣти: мы *мѣрили* длину комнаты аршиномъ; поэтому аршинъ называется *мѣрою*. Почему же аршинъ называется мѣрою? (Потому что имъ мѣряютъ). Но когда мы измѣряли, мы *считали*, сколько разъ уложился аршинъ, мы считали аршины; а то, чему ведутъ счетъ, какъ называется? Какъ же еще можно назвать аршинъ?

— Аршинъ можно назвать единицей.

— Аршинъ уложился въ длинѣ комнаты 11 разъ съ лишкомъ, съ остаткомъ. Чѣмъ измѣрить намъ этотъ остатокъ?

— Вершкомъ.

— Сколько вершковъ въ аршинѣ? Если бы на нашемъ аршинѣ не было понадѣлано вершковъ, то какъ могли бы мы ихъ намѣтить: что для этого должны были бы сдѣлать?

— Раздѣлить аршинъ на 16 равныхъ частей.

— Значитъ, вершокъ есть какая часть аршина? А если бы мы раздѣлили аршинъ на 8 равныхъ частей, то какія части аршина получились бы? Вотъ смотрите: этими чертами аршинъ раздѣленъ на 8 равныхъ частей. Такая часть уложилась въ остаткѣ 3 раза. Чему равенъ остатокъ?

— Онъ равенъ тремъ восьмымъ частямъ аршина.

— Какъ назвали мы аршинъ?

— Мѣрою или единицею.

— Вотъ видите: иногда приходится единицу дѣлить на части.

— Какими еще единицами можно измѣрять длину, напр. длину дороги, длину поля, длину стола?

— Верстами, саженями, вершками.

— Есть еще единица, которою измѣряютъ длину; эта единица называется футъ. Смотрите (показываетъ на дробные счеты): на верхней проволокѣ надѣтъ здѣсь валикъ длиною въ футъ. Будемъ называть этотъ валикъ единицей[1]). На второй проволокѣ тоже единица, только цѣлая ли она?

---

[1]) За неимѣніемъ дробныхъ счетовъ тутъ можно воспользоваться прямыми линіями, проводимыми на классной доскѣ.

— Нѣтъ, она раздѣлена на двѣ равныя части, пополамъ.

— Какъ назвать каждую такую часть? Что же надо сдѣлать съ единицей, чтобы получить половину ея? Сколько половинъ въ единицѣ? На сколько равныхъ частей раздѣлена та единица, что̀ на третьей проволокѣ? Какъ назовете вы каждую такую часть? (Четвертая часть, четверть). Что надо сдѣлать съ единицей, чтобы получить четверть ея? Сколько четвертей въ единицѣ? На сколько равныхъ частей раздѣлена единица на слѣдующей проволокѣ? Какъ назовете вы каждую такую часть? Что надо сдѣлать съ единицей, чтобы получить восьмую часть ея? Сколько восьмыхъ въ единицѣ?

— Что показываю я вамъ? (Кладетъ половину). А теперь? (Четверть). Теперь? (Двѣ четверти). Теперь? (Три четверти). Слушайте, дѣти: такія числа, какъ половина, четверть, восьмая, три четверти наз. дробными числами, или *дробями;* они наз. такъ потому, что для полученія ихъ единица дѣлится, или *дробится*, на равныя части. Придумайте сами какую-нибудь дробь.

Затѣмъ, сообщивши ученикамъ, что приборъ, на которомъ мы обозначали дроби, наз. дробными счетами, учитель заставляетъ дѣтей класть на счетахъ различныя дроби: половину, три четверти, восьмую, двѣ восьмыхъ, три восьмыхъ и т. д.

Выяснить понятіе о числителѣ и знаменателѣ (терминовъ этихъ можно здѣсь и не давать) удобно слѣдующимъ образомъ. Учитель кладетъ на дробныхъ счетахъ (обозначаетъ при помощи черты, раздѣленной на части) такую дробь, которую ученикамъ трудно прочитать съ мѣста, напр. $^{11}/_{20}$, такъ какъ дѣленія тутъ мелкія, и ихъ довольно много. Дробь эту и невозможно будетъ прочитать, если учитель закроетъ остальныя 9 долей.

— Почему не можете вы прочитать этой дроби?

— Трудно разобрать, разглядѣть, сколько частей положено.

— Ступай къ счетамъ и попробуй назвать эту дробь.

Ученикъ считаетъ, сколько положено долей, и насчитываетъ ихъ 11.

— Можно ли теперь назвать положенную дробь? Почему нѣтъ?

— Мы не знаемъ, какія части на этой проволокѣ.

— Какъ же узнать это?

— Надо сосчитать, сколько на этой проволокѣ всѣхъ частей.

Учитель сдвигаетъ вмѣстѣ всѣ части, отдѣливъ (напр. бумажкой) прежде положенныя 11 частей отъ остальныхъ 9-ти, и, когда ученикъ сосчитаетъ, сколько всѣхъ долей на проволокѣ, снова кладетъ 11 долей.

— Назовите теперь эту дробь.

— Одиннадцать двадцатыхъ.

— Что же надо знать, чтобы прочитать положенную дробь?

— Надо знать, на сколько частей раздѣленъ весь валикъ (единица), и сколько положено (взято) такихъ частей.

Учитель кладетъ дробь три четверти.

— Сколько частей (долей) положилъ я? (Три доли). Запишемъ это. (Пишетъ 3). Сколько всѣхъ долей на этой проволокѣ (Четыре). Напишемъ 4 вотъ здѣсь, внизу 3-хъ, и поставимъ между этими числами

лежачую черточку $\frac{3}{4}$. Назовите положенную дробь. (Три четверти). Вотъ смотрите, какъ она пишется. Что же сначала надо писать?

— Сначала надо писать сколько положено (взято) частей.

— Что написать потомъ?

— Потомъ написать, сколько всѣхъ частей на проволокѣ (на сколько частей раздѣлена единица).

— Гдѣ это написать? Что поставить между этими числами?

Учитель кладетъ на счетахъ половину и спрашиваетъ:

— Сколько частей положилъ я? (Одну). Что долженъ написать я? (Пишетъ 1). Сколько всѣхъ частей на этой проволокѣ? Что теперь надо написать? Гдѣ написать цифру 2? (Пишетъ). Что поставить между написанными цифрами? (Ставитъ черточку). Назовите ту дробь, которую мы положили на счетахъ и написали.

— Теперь я положу на счетахъ дробь, а вы сами напишите ее на своихъ доскахъ. (Кладетъ пять восьмыхъ). Что сначала сосчитаете вы? (Сколько положено частей). Сколько положено частей? Что же вы напишете? Напишите и проведите внизу черточку. Что сосчитаете теперь? (Сколько всѣхъ частей на проволокѣ, на сколько частей раздѣлена единица). На сколько частей раздѣлена единица? Что же вы напишете теперь? Гдѣ это напишете? Напишите. Назовите ту дробь, которую я положилъ на счетахъ, а вы написали[1]).

Для упражненія въ чтеніи и письмѣ дробей могутъ служить и такіе примѣры, какіе помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ № 195.

Задачи №№ 196 и 197 и примѣры №№ 191 и 192 содержатъ отысканіе частей цѣлаго числа; а въ задачѣ № 198 требуется опредѣлить, какую часть одного числа составляетъ другое. Подобныя задачи и примѣры могутъ быть здѣсь пригодны для закрѣпленія понятія о дробяхъ, а также способа ихъ обозначенія.

Мы указали дѣтямъ происхожденіе дроби отъ дѣленія на равныя части *одной* единицы, и ученики представляютъ себѣ напр. дробь $^3/_4$ такъ: единица (одна единица) раздѣлена на 4 равныя части, и такихъ частей взято 3. Теперь слѣдуетъ познакомить учениковъ съ происхожденіемъ дроби отъ дѣленія на части не одной, а нѣсколькихъ единицъ, показать, что дробь $^3/_4$ можетъ получиться отъ дѣленія 3-хъ единицъ на 4 равныя части. Послѣ этого дѣти легко поймутъ составъ полнаго частнаго при дѣленіи съ остаткомъ.

— Слушайте задачу. Учитель раздалъ 20 листовъ бумаги поровну 4-мъ ученикамъ. По скольку листовъ получилъ каждый ученикъ? Что надо сдѣлать, чтобы узнать это?

— Надо 20 раздѣлить на 4 равныя части. (20 : 4 = 5).

— Слушайте еще задачу. Учитель раздалъ 3 листа бумаги поровну 4-мъ ученикамъ. Сколько бумаги получилъ каждый ученикъ? Похожа ли эта задача на прежнюю? Да, похожа: здѣсь только раздается не 20 листовъ, а 3 листа. Чтобы рѣшить прежнюю задачу, надо было 20 раздѣлить на 4 равныя части. Что же надо сдѣлать, чтобы рѣшить и эту задачу?

---

[1]) Можно указать ученикамъ и на то, что лежачая черточка иногда замѣняется наклонною.

— Надо 3 раздѣлить на 4 равныя части.

Учитель записываетъ $3:4=$

— Вотъ 3 листа бумаги. Какъ раздѣлить ихъ поровну четыремъ ученикамъ?

— Разрѣзать (раздѣлить) одинъ листъ на 4 равныя части и дать каждому по четверти листа. (Выполняется). Потомъ то же сдѣлать съ другимъ листомъ (выполняется) и съ третьимъ (выполняется).

— По скольку же бумаги получилъ каждый ученикъ?

— По $^3/_4$ листа.

— А что (какое дѣйствіе) надо было сдѣлать, чтобы рѣшить эту задачу?

— Надо было 3 раздѣлить на 4 равныя части.

— 3 раздѣлить на 4 равныя части — сколько же будетъ?

— 3 раздѣлить на 4 равныя части — будетъ $^3/_4$.

Учитель пишетъ $3:4=^3/_4$.

Для упражненія служитъ задача № 200.

— Хозяйка заплатила 47 копеекъ за 4 фунта мыла. Сколько стоитъ фунтъ мыла? Что надо сдѣлать, чтобы узнать это?

— Надо 47 раздѣлить на 4 равныя части.

— Дѣлите.

— 47 раздѣлить на 4 равныя части, получится 11, и останется 3.

— Что же надо сдѣлать съ этимъ остаткомъ? Вѣдь, хозяйка не получила сдачи этихъ 3-хъ копеекъ, она и ихъ отдала за тѣ же 4 фунта мыла.

— Надо 3 раздѣлить на 4; получится $^3/_4$.

— Сколько же сто́итъ фунтъ мыла?

— Фунтъ мыла сто́итъ 11 и $^3/_4$ коп.

— Смотрите дѣти, какъ это надо записать: $47:4=11^3/_4$.

Упражненіемъ могутъ служить примѣры, помѣщенные въ № 201 и, въ видѣ самостоятельной работы, примѣры №№ 193—196.

Въ задачи и примѣры на всѣ дѣйствія въ предѣлѣ первой сотни мы вводимъ, отъ времени до времени, употребленіе уже знакомыхъ дѣтямъ дробей: тамъ ученики встрѣтятся съ отысканіемъ части цѣлаго числа и нахожденіемъ полнаго частнаго.

33. Задачи и примѣры на всѣ дѣйствія. Еще при рѣшеніи сложныхъ задачъ въ предѣлѣ первыхъ двухъ десятковъ слѣдуетъ требовать отъ учениковъ связнаго пересказа содержанія задачи и самостоятельной постановки вопросовъ при разложеніи сложной задачи на простыя. То же самое относится и къ рѣшенію задачъ въ предѣлѣ сотни. Прочитавши задачу и записавъ, во время чтенія, ея числовыя данныя на классной доскѣ, учитель заставляетъ цѣликомъ повторить задачу одного или нѣсколькихъ учениковъ, пока не убѣдится, что дѣти поняли и усвоили содержаніе задачи. Затѣмъ свое участіе въ рѣшеніи задачи

учитель ограничиваетъ вопросами: что сначала надо узнать? какъ это узнать? что станете узнавать теперь? и т. д., приходя на помощь въ затрудняющихъ дѣтей случаяхъ. Желательно пріучить дѣтей рѣшать задачи и безъ этихъ вопросовъ (такъ, какъ они рѣшаютъ во время самостоятельныхъ занятій); учитель спроситъ лишь: какъ станете рѣшать задачу?, на что ученики отвѣтятъ: сначала надо узнать то-то, чтобы узнать это, надо и т. д.—Продолжайте.

При рѣшеніи простыхъ задачъ, на которыя разлагается задача сложная, — послѣ того, какъ ученики назовутъ дѣйствіе, нужное для рѣшенія вопроса, — учитель иногда спрашиваетъ: почему надо сдѣлать именно это дѣйствіе? (почему надо сложить, вычесть и т. д.). Эти вопросы служатъ для провѣрки того, насколько дѣти усвоили примѣненіе каждаго изъ четырехъ дѣйствій, насколько научились они подводить подъ эти дѣйствія различные частные случаи употребленія ихъ, встрѣчающіеся на практикѣ. Однако не слѣдуетъ доходить до педантизма съ этимъ вопросомъ «почему?», предлагая его непремѣнно для всякаго названнаго учениками дѣйствія: это заняло бы и много времени, и сдѣлало бы рѣшеніе задачи довольно тяжелымъ. Само собою разумѣется, если ученики невѣрно указали дѣйствіе (назвали одно дѣйствіе вмѣсто другого), то при разъясненіи ошибки необходимо спросить, почему надо примѣнить то или другое дѣйствіе. Но если выборъ дѣйствія сдѣланъ ученикомъ вѣрно и притомъ самостоятельно и сознательно (учитель, знающій своихъ учениковъ, всегда можетъ судить объ этомъ), то вопросъ «почему?» во многихъ случаяхъ можетъ быть опущенъ. Онъ является, по нашему мнѣнію, излишнимъ въ тѣхъ случаяхъ, когда вопросъ или условія задачи явно указываютъ дѣйствіе: сколько всего, увеличить, уменьшить на сколько-нибудь и т. д. Пусть, напр., дана задача: въ младшемъ отдѣленіи училища 27 учениковъ, въ среднемъ 15 и въ старшемъ 9; сколько всѣхъ учениковъ въ училищѣ? Какъ это узнать? Надо сложить 27, 15 и 9. Почему надо сложить? Чтобы узнать, сколько всего. Дѣти повторяютъ здѣсь вопросъ самой задачи. Еще примѣръ. Брату 15 лѣтъ, сестрѣ на 3 года меньше; сколько лѣтъ сестрѣ? Какъ это узнать? Почему надо вычесть? Потому что сестрѣ— на 3 года меньше. Здѣсь ученики повторяютъ то, что ска-

зано въ условіи задачи. Относительно подобныхъ задачъ вопросъ: почему надо сложить, вычесть? умѣстенъ тогда, когда ученики только что знакомятся съ тѣмъ или другимъ типомъ простыхъ задачъ; но не тогда, когда дѣти уже перешли къ рѣшенію задачъ сложныхъ. Однако, простыя задачи по формѣ выраженія могутъ быть очень разнообразны, и если дѣйствіе не указано явно въ самой задачѣ, то и при рѣшеніи сложныхъ задачъ не лишнее иногда спрашивать, почему поставленный вопросъ рѣшается тѣмъ или другимъ дѣйствіемъ. Примѣръ. Торговецъ, продавая пудъ муки по 96 коп., получаетъ за пудъ 18 коп. барыша. Сколько стоитъ пудъ муки самому торговцу? Какъ это узнать? Почему надо вычесть? Потому что самому торговцу пудъ муки стоитъ на 18 коп. меньше. Крестьянинъ поѣхалъ изъ деревни въ городъ, до котораго 24 версты; каждый часъ проѣзжалъ онъ по 6 верстъ. Во сколько часовъ доѣхалъ онъ до города? Какъ это узнать? Почему надо раздѣлить? Потому что онъ ѣхалъ столько часовъ, сколько разъ 6 содержится въ 24-хъ. Спрашивая здѣсь: почему надо вычесть? почему надо раздѣлить?—мы не имѣемъ въ виду провѣрить, знаютъ ли дѣти, что для уменьшенія на сколько-нибудь надо вычесть, а для опредѣленія содержанія надо раздѣлить: мы желаемъ убѣдиться лишь въ томъ, подводятъ ли ученики данныя задачи подъ эти случаи примѣненія дѣйствій; понимаютъ ли они, что если при продажѣ муки по 96 коп. за пудъ торговецъ получаетъ на пудъ 18 коп. прибыли, то самому ему пудъ муки стоитъ на 18 коп. меньше 96 коп.; что извѣстный путь можно проѣхать во столько часовъ, сколько разъ путь, проходимый въ часъ, т.-е. скорость, содержится во всемъ пути. Чаще всего вопросъ «почему?» ставится при рѣшеніи задачъ на умноженіе; но здѣсь онъ относится не столько къ выбору дѣйствія (почему надо именно умножить?), сколько къ выбору одного числа за множимое, другого — за множителя.

Скажемъ нѣсколько словъ о записяхъ при рѣшеніи задачъ

Всѣ вычисленія въ предѣлѣ сотни слѣдуетъ выполнять устно, хотя бы числа и были написаны; записи каждаго выполненнаго дѣйствія удобно располагать по отдѣльнымъ строкамъ.

Для того, чтобы еще разъ напомнить, что узнано каждымъ выполненнымъ дѣйствіемъ, весьма полезно къ полученному числовому результату приписывать соотвѣтствующее названіе. Однако было бы неправильно писать, напримѣръ, 15+17=32 фунт. Съ другой стороны, письмо названій при данныхъ числахъ заняло бы много мѣста и времени. Мы предлагаемъ не писать наименованій ни при данныхъ, ни при результатѣ, соединенномъ съ данными знакомъ равенства; но, записавши этотъ результатъ, еще разъ написать его вмѣстѣ съ соотвѣтствующимъ названіемъ. Пусть, напр., рѣшается задача: въ одной деревнѣ 26 домовъ, въ другой на 12 домовъ больше; сколько домовъ въ другой деревнѣ? Предлагаемая нами запись рѣшенія такая: 26+12=38; 38 дом. Эта запись соотвѣтствуетъ разсужденію: чтобы узнать, сколько домовъ въ другой деревнѣ, надо къ 26-ти (отвлеченному числу 26) прибавить 12; получится 38 (отвлеченное число). Значитъ (это слово «значитъ» мы замѣняемъ точкой съ запятой), въ другой деревнѣ 38 домовъ[1]).

Приведемъ для примѣра запись рѣшенія сложной задачи.

Задача. Крестьянка купила у разносчика 6 аршинъ ситцу, по 14 коп. аршинъ, и нѣсколько катушекъ нитокъ, по 4 коп. за катушку; за все это заплатила она рубль. Сколько катушекъ купила крестьянка?

Запись задачи:

6 арш.	14 коп.	1 руб.
?	4 »	

Запись рѣшенія:

1) 14×6=84; 84 коп.
2) 100—84=16; 16 коп.
3) 16:4 = 4; 4 кат.

При рѣшеніи численныхъ примѣровъ ученики могутъ записать все вычисленіе въ нѣсколькихъ строкахъ, по числу дѣйствій. Такъ рѣшеніе примѣра

(57:3)+(13×4)—(96:2)—(95:19)+(35×2)+(60:5)

---

[1]) Наименованія при числахъ данныхъ и въ результатѣ имѣютъ мѣсто въ области составныхъ именованныхъ чиселъ.

можетъ быть записано слѣдующимъ образомъ:

1) $57 : 3 = 19$	7) $23 - 5 = 18$
2) $13 \times 4 = 52$	8) $35 \times 2 = 70$
3) $19 + 52 = 71$	9) $18 + 70 = 88$
4) $96 : 2 = 48$	10) $60 : 5 = 12$
5) $71 - 48 = 23$	11) $88 + 12 = \underline{\underline{100}}.$
6) $95 : 19 = 5$	

Или же можно ограничиться только записью надъ каждой скобкой результата того дѣйствія, которое въ этой скобкѣ обозначено, и затѣмъ, уже не прибѣгая ни къ какимъ другимъ промежуточнымъ записямъ, писать только окончательный результатъ:

$$\overset{19}{(57 : 3)} + \overset{52}{(13 \times 4)} - \overset{48}{(96 : 2)} - \overset{5}{(95 : 19)} + \overset{70}{(35 \times 2)} + \overset{12}{(60 : 5)} = 100.$$

Весьма желательно достигнуть и того, чтобы ученики могли выполнить всѣ вычисленія, видя написанными только данныя числа и удерживая въ памяти всѣ числа, найденныя по даннымъ.

34. Дроби. Здѣсь помѣщаемъ мы образованіе цѣлыхъ изъ долей единицы, выраженіе цѣлыхъ въ доляхъ единицы, сравненіе долей между собою и выраженіе однѣхъ долей въ другихъ доляхъ. Какъ и раньше, мы ограничиваемся долями $^1/_2$, $^1/_4$ и $^1/_8$.

До сихъ поръ дѣти имѣли дѣло съ дробями, которыя меньше единицы. Теперь слѣдуетъ показать ученикамъ дроби, которыя больше единицы, равны единицѣ, и цѣлыя числа съ дробями. Это удобно сдѣлать при помощи чертежа.

Учитель проводитъ на доскѣ прямую линію.

— Вотъ эту черту будемъ считать за единицу.

Дѣлитъ ее, напр., на 8 равныхъ частей. Это дѣленіе можетъ быть сдѣлано на глазъ или — лучше — при помощи нитки: взять нитку, длина которой равна длинѣ проведенной прямой линіи, сложить эту нитку пополамъ, еще разъ пополамъ и еще разъ пополамъ; полученную восьмую часть откладывать на прямой линіи.

— Прочитайте отмѣченную дробь. (Отмѣчаетъ, напр., $^5/_8$.) Напишите ее. Что меньше: $^5/_8$ или единица? Почему $^5/_8$ меньше единицы?

Затѣмъ учитель снова чертитъ прямую линію прежней длины (эта длина можетъ быть отложена при помощи имѣющейся нитки), продолжаетъ ее и на продолженіи откладываетъ еще единицу.

— Какое число обозначено на доскѣ?

— Двѣ единицы.

— Теперь я каждую изъ этихъ единицъ раздѣляю на 4 равныя части. (Выполняетъ это дѣленіе; поперечная черточка, отдѣляющая одну единицу отъ другой, должна быть больше, замѣтнѣе, тѣхъ черточекъ, которыя стоятъ между четвертями одной и той же единицы.)

— Прочтите дробь, которую я отмѣчу. (Отмѣчаетъ $^7/_4$.) Напишите ее. Что больше: $^7/_4$ или единица? Почему $^7/_4$ больше единицы? (Дѣлитъ пополамъ каждую четверть.) На сколько частей раздѣлена теперь каждая единица? Прочитайте дробь, которую я теперь отмѣчу (отмѣчаетъ $^{11}/_8$.) Напишите ее. Что больше: $^{11}/_8$ или единица? Почему? Придумайте сами такую дробь, которая была бы больше единицы. Придумайте дробь, которая меньше единицы. (Отмѣчаетъ $^8/_8$.) Какую дробь показываю я вамъ теперь? Напишите ее. Что больше: $^8/_8$ или единица? Придумайте такую дробь, которая была бы равна единицѣ.

Чтобы показать дѣтямъ цѣлое съ дробью, учитель проводитъ на доскѣ прямую линію, откладываетъ на ней (ниткой) единицу, продолжаетъ ее и на продолженіи беретъ другую единицу; эту вторую единицу дѣлитъ, напр., на 4 равныя части; отмѣчаетъ число, состоящее изъ первой единицы и изъ $^3/_4$ второй единицы, и предлагаетъ дѣтямъ, прочитать отмѣченное число. Если ученики, которые уже читали подобныя числа, скажутъ, что отмѣчена дробь $^7/_4$, то учитель обратитъ ихъ вниманіе на то, что первая единица не раздѣлена на части, но оставлена цѣлою; тогда дѣти прочитаютъ отмѣченное число, какъ цѣлое съ дробью: одна и три четверти. — Чтобы получить это число, скажетъ учитель, надо къ 1 прибавить $^3/_4$, а потому его можно было бы написать такъ: $1+^3/_4$; но знакъ «прибавить» здѣсь обыкновенно пропускается, и пишутъ короче: $1^3/_4$. Слѣдуютъ упражненія: учитель пишетъ числа $2^5/_8$, $6^1/_4$, $15^7/_8$ и т. п., ученики читаютъ ихъ; обратно, учитель говоритъ подобныя числа, дѣти пишутъ ихъ[1]). Здѣсь учитель скажетъ ученикамъ, что $1^1/_2$ называется «полтора»; можетъ сказать, что если при цѣломъ числѣ находится только одна доля, какъ напр. въ числахъ $5^1/_2$, $10^1/_4$, то такія числа, т.-е. 5 и одна половина, 10 и одна четверть, иногда читаютъ такъ: 5 съ половиной, 10 съ четвертью.

Когда ученикамъ будутъ извѣстны различные виды дробныхъ чиселъ: дроби, меньшія единицы, равныя ей, большія единицы[2]) и цѣлыя съ дробью, тогда можно перейти къ выраженію цѣлаго и цѣлаго съ дробью въ доляхъ единицы (обращеніе цѣлаго и цѣлаго съ дробью въ неправильную дробь) и къ образованію цѣлыхъ изъ долей единицы (исключеніе цѣлаго изъ неправильной дроби).

— На сколько равныхъ частей раздѣленъ вотъ этотъ валикъ-единица? (Указываетъ валикъ дробныхъ счетовъ, раздѣленный пополамъ.) Какъ называется каждая такая часть? Сколько половинъ въ единицѣ? Запишите это вотъ такъ: $1=^2/_2$. Во сколько разъ единица больше по-

---

[1]) Съ такими числами дѣти уже встрѣчались, отыскивая полное частное, на что тутъ можно указать ученикамъ.

[2]) Считаемъ излишнимъ сообщать термины: правильная и неправильная дробь.

ловины? Во сколько разъ половина меньше единицы? А сколько половинъ въ 2-хъ единицахъ? Какъ вы это сообразили?

— Въ одной единицѣ 2 половины, а въ 2-хъ единицахъ — вдвое больше.

— Запишите это.

Ученики пишутъ $2 = {}^4/_2$.

— Сколько половинъ въ 5-ти, 7-ми, 25 единицахъ? и т. д.

— Сколько половинъ въ $5^1/_2$? Какъ вы сообразили это?

— Въ 5-ти единицахъ 10 половинъ, 10 половинъ и еще одна половина — 11 половинъ ($5^1/_2 = {}^{11}/_2$).

— Сколько половинъ въ $1^1/_2$, $3^1/_2$, $15^1/_2$? И т. д

— Изъ сколькихъ половинъ выходитъ одна единица? (Сколько половинъ составляютъ одну единицу?) Сколько единицъ выйдетъ изъ ${}^4/_2$? Какъ вы сообразили это?

— Изъ 2-хъ половинъ выходитъ одна единица, а изъ 4-хъ половинъ 2 единицы, потому что 4 вдвое больше 2-хъ.

Или такъ:

— Половинъ четыре, а единицъ будетъ въ 2 раза меньше.

— Запишите это такъ: ${}^4/_2 = 2$.

— Сколько единицъ составляютъ ${}^8/_2$, ${}^{12}/_2$, ${}^{20}/_2$? И т. д.

— Сколько единицъ заключается въ ${}^7/_2$? Что будетъ тутъ кромѣ 3-хъ цѣлыхъ единицъ? Чему же равны ${}^7/_2$? Запишите это. (${}^7/_2 = 3^1/_2$). Какъ сообразили вы, что ${}^7/_2 = 3^1/_2$?

— Половинъ 7, а единицъ будетъ въ 2 раза меньше; 7 раздѣлить на 2, получится 3 и въ остаткѣ 1.

— Сколько единицъ и сколько половинъ въ ${}^{15}/_2$, ${}^{25}/_2$, ${}^{47}/_2$? И т. д.

Подобнымъ же образомъ могутъ быть проведены соотвѣтствующія упражненія для четвертыхъ и восьмыхъ долей.

Замѣтимъ, что всѣ приведенныя преобразованія выполняются учениками не по правиламъ, а — какъ иногда выражаются — по свободному соображенію; иными словами, дѣти, не зная готовой формулы и слѣдовательно не пользуясь ею, въ каждомъ данномъ случаѣ должны найти результатъ путемъ разсужденія, или соображенія; такъ, напр., обращая $6^3/_4$ въ четвертыя доли, ученикъ не скажетъ: для этого надо цѣлое (6) умножить на знаменателя (4), прибавить числителя (3) и подписать того же знаменателя; ученикъ долженъ разсуждать: въ одной единицѣ 4 четверти, въ 6 единицахъ въ 6 разъ больше, т.-е. ${}^{24}/_4$; ${}^{24}/_4$ да ${}^3/_4$ — всего ${}^{27}/_4$.

Обращеніе цѣлаго съ дробью въ неправильную дробь можетъ быть названо обращеніемъ, или раздробленіемъ, въ извѣстныя доли: $6^3/_4$ обратить, раздробить, въ четверти. Исключеніе цѣлаго изъ неправильной дроби ученики могутъ называть обращеніемъ, или превращеніемъ, долей въ цѣлыя единицы: ${}^{21}/_8$ обратить, превратить, въ цѣлыя единицы (будетъ 2 цѣлыхъ единицы и сверхъ того ${}^5/_8$).

Относящіяся сюда упражненія помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 252—262. Приведемъ примѣры рѣшенія задачъ.

— Учитель раздалъ бумагу 24-мъ ученикамъ, по ${}^1/_2$ листа каждому. Сколько листовъ бумаги раздалъ учитель? Сколько полулистовъ раз-

далъ онъ? 24 полулиста составятъ сколько цѣлыхъ листовъ? Какъ это записать? ($^{24}/_2 = 12$). Сколько же листовъ бумаги раздалъ учитель?

Первый вопросъ: сколько полулистовъ раздалъ учитель? можетъ быть оставленъ безъ объясненія того дѣйствія, которымъ онъ рѣшается, хотя едва ли ученики затруднятся отвѣтить: чтобы узнать это, надо $^1/_2$ повторить 24 раза; не поставитъ ихъ въ затрудненіе и запись: $^1/_2 \times 24 = {}^{24}/_2$.

— У хозяйки выходитъ въ день $^1/_2$ фунта сахару. На сколько дней хватитъ ей 15 фунтовъ сахару?

— Хватитъ на столько дней, сколько полуфунтовъ въ 15-ти фунтахъ (сколько половинъ въ 15-ти); въ одной единицѣ 2 половины, въ 15-ти единицахъ въ 15 разъ больше, 30 половинъ: $15 = {}^{30}/_2$; 15 фунтовъ сахару хватитъ на 30 дней.

Здѣсь можно не касаться вопроса о томъ, какое дѣйствіе надо произвести надъ 15-ю и надъ $^1/_2$, чтобы узнать, сколько половинъ въ 15-ти (чтобы узнать это, надо 15 раздѣлить на половины: $15 : {}^1/_2 = 30$).

Далѣе идетъ сравненіе долей между собою ($^1/_2$ съ $^1/_4$, $^1/_4$ съ $^1/_8$, $^1/_2$ съ $^1/_8$) и выраженіе однѣхъ долей въ другихъ доляхъ (раздробленіе половинъ въ четверти, четвертей въ восьмыя, половинъ въ восьмыя; превращеніе четвертей въ половины, восьмыхъ въ четверти, восьмыхъ въ половины).

Сравненіе долей должно быть проведено при помощи наглядныхъ пособій, напр. дробныхъ счетовъ или прямыхъ линій, начерченныхъ на доскѣ.

— На сколько равныхъ частей раздѣленъ вотъ этотъ валикъ-единица? Какъ называется каждая такая часть? Что надо сдѣлать съ единицей, чтобы получить половину? Сколько половинъ въ единицѣ? Во сколько разъ единица больше половины? Во сколько разъ половина меньше единицы? А на сколько равныхъ частей раздѣленъ вотъ этотъ валикъ? Какъ называется каждая такая часть? Что надо сдѣлать съ единицей, чтобы получить четверть? Сколько четвертей въ единицѣ? Во сколько разъ единица больше одной четверти? Во сколько разъ одна четверть меньше единицы? Прочтите дробь, которую я положу (кладетъ половину). Кто положитъ половину (валика) на той проволокѣ, гдѣ валикъ раздѣленъ на 4 равныя части? Сколько четвертей въ половинѣ? Что надо сдѣлать съ половиной, чтобы получить четверть? Что больше: половина или четверть? Во сколько разъ половина больше четверти? Во сколько разъ четверть меньше половины?

Подобнымъ же образомъ можетъ быть сдѣлано сравненіе $^1/_4$ съ $^1/_8$ и $^1/_2$ съ $^1/_8$.

Упражненія, относящіяся къ сравненію долей и выраженію однѣхъ долей въ другихъ доляхъ, приведены въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 263—265.

— $^1/_2$ фунта чаю стоитъ 80 коп. Что стоитъ $^1/_4$ фунта этого чаю? Какъ это узнать?

— Надо 80 раздѣлить на 2 равныя части.

— Почему надо 80 раздѣлить на двѣ равныя части?

— Потому что $^1/_4$ фунта стоитъ вдвое дешевле, чѣмъ $^1/_2$ фунта.

— А почему $^1/_4$ фунта стоитъ вдвое дешевле, чѣмъ $^1/_2$ фунта?

— Потому что $^1/_4$ вдвое меньше, чѣмъ $^1/_2$.

— Обратите (раздробите) $5^1/_2$ въ четверти. Сколько будетъ четвертей? Какъ вы сообразили это?

— Въ единицѣ 4 четверти, въ 5-ти единицахъ — въ 5 разъ больше, 20 четвертей; въ половинѣ 2 четверти; 20 четвертей да 2 четверти — 22 четверти. (Записываютъ $5^1/_2 = {}^{22}/_4$).

— Обратите (превратите) $^{18}/_4$ въ половины. Сколько будетъ? Какъ вы сообразили это?

— Изъ $^2/_4$ выходитъ $^1/_2$, а изъ $^{18}/_4$ выйдетъ $^9/_2$, потому что 18 въ 9 разъ больше 2-хъ.

Или такъ:

— Четвертей 18, а половинъ будетъ вдвое меньше.

Примѣры нашего сборника №№ 207—215 назначены для рѣшенія во время самостоятельныхъ занятій.

ГЛАВА V.

Первая тысяча.

35. Устная нумерація. Ученики уже знаютъ двѣ счетныхъ единицы: простую единицу и десятокъ. Теперь надо познакомить ихъ съ сотней какъ единицей. Наглядными пособіями могутъ служить здѣсь опять палочки, которыя связываются въ пучки по десяти и по сту штукъ; а затѣмъ кубики, бруски и доски ариѳметическаго ящика.

— У меня на столѣ много палочекъ. Что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько ихъ? Какъ стали бы мы считать палочки, если бъ умѣли считать только до десяти?

— Насчитали бы десять палочекъ, еще десять палочекъ, еще десять палочекъ...

— Такъ и давайте считать. А какъ наберемъ десять палочекъ, свяжемъ ихъ въ пучокъ.

Учитель вызываетъ къ столу, напр., четырехъ учениковъ, изъ которыхъ каждый набираетъ по 10 палочекъ и связываетъ ихъ въ пучокъ. То же дѣлаютъ слѣдующіе четыре ученика и т. д., пока всѣ палочки не будутъ связаны въ пучки. Пусть при этомъ останется 6 палочекъ.

Примѣчаніе. Въ то время какъ ученики набираютъ десятки, учитель можетъ отойти къ другимъ отдѣленіямъ школы.

— Всѣ ли палочки связаны въ пучки? Сколько палочекъ осталось несвязанными? Что теперь надо сосчитать?

— Тенерь надо сосчитать пучки, или десятки.

— Какъ станете вы считать десятки?

— Такъ же, какъ палочки, по одному, пока не наберемъ десяти пучковъ; потомъ опять насчитаемъ десять пучковъ, еще десять пучковъ.

Ученики, вызываемые къ столу поочередно, по одному, вслухъ считаютъ десятки: одинъ десятокъ, два десятка, три десятка,... девять десятковъ, десять десятковъ; набравши десять пучковъ, связываютъ ихъ вмѣстѣ.

— Всѣ ли десятки связаны въ большіе пучки?

— Нѣтъ, осталось три десятка.

— Что теперь надо сосчитать?

— Теперь надо сосчитать большіе пучки.

— Сколько десятковъ въ каждомъ такомъ пучкѣ? Какъ называются десять десятковъ? Какъ же назовемъ мы большой пучокъ? Сосчитаемъ, сколько у насъ сотенъ.

Ученикъ считаетъ вслухъ: одна сотня, двѣ сотни, три сотни, четыре сотни.

— Видите, дѣти: сотнями считаютъ такъ же, какъ простыми единицами и какъ десятками: сотня есть также счетная единица. Какія же счетныя единицы вы теперь знаете?

— Мы знаемъ простую единицу, десятокъ и сотню

Считайте сотнями.

— Одна сотня, двѣ сотни, три сотни,... девять сотенъ, десять сотенъ.

Затѣмъ учитель сообщаетъ или, вѣрнѣе, выспрашиваетъ у дѣтей названія группъ сотенъ (такъ какъ названія эти большинству учениковъ уже бываютъ извѣстны).

— Одна сотня — иначе сто. Не знаетъ ли кто, какъ короче называются двѣ сотни? Три сотни? Четыре сотни? И т. д.

Названія: сто, двѣсти, триста,... девятьсотъ учитель можетъ написать на классной доскѣ.

— А кто знаетъ, какъ называются десять сотенъ?

И на этотъ вопросъ можетъ послѣдовать правильный отвѣтъ. Въ противномъ случаѣ учитель самъ сообщитъ дѣтямъ названіе «тысяча», которое и запишетъ на классной доскѣ.

— У насъ на столѣ четыре сотни, три десятка и шесть палочекъ. Какъ сказать короче, сколько здѣсь палочекъ?

— Четыреста тридцать шесть.

Слѣдуютъ упражненія, состоящія въ томъ, что

а) ученики составляютъ (называютъ) число по даннымъ десятичнымъ группамъ его, т.-е. зная, сколько въ этомъ числѣ сотенъ, десятковъ и единицъ;

б) разлагаютъ данное число на его десятичныя группы, т.-е. говорятъ, сколько въ этомъ числѣ сотенъ, десятковъ и единицъ.

Тѣ и другія упражненія полезно провести сначала на наглядныхъ пособіяхъ, которыми могутъ служить кубики, бруски и доски ариѳметическаго ящика или палочки, пучки по десяти и связки по сту палочекъ.

Показывая ученикамъ брусокъ ариѳметическаго ящика, учитель спроситъ:

— Вспомните, какъ называется этотъ предметъ? (Показываетъ рядомъ съ брускомъ кубикъ). Сколько кубиковъ замѣняетъ брусокъ? Если кубикъ есть простая единица, что такое будетъ брусокъ? (Показываетъ доску ариѳметическаго ящика и покрываетъ ее брусками). Смотрите, сколько брусковъ уложилось на доскѣ? Сколько брусковъ можно напилить изъ доски? Брусокъ изображаетъ десятокъ; что же будетъ изображать доска?

Упражненія а. Учитель ставитъ на планку классной доски или на столъ три доски, четыре бруска и пять кубиковъ.

— Назовите то число, которое я обозначилъ.

— Триста сорокъ пять.

— Почему вы такъ прочитали это число?

— Потому что въ немъ три сотни (три доски), четыре десятка (четыре бруска) и пять единицъ (пять кубиковъ).

Такихъ упражненій нѣсколько. Примѣры должны быть разнообразные: обозначаются числа, въ которыхъ на лицо всѣ три разряда; числа, въ которыхъ нѣтъ десятковъ или единицъ.

Упражненія б.

— Обозначьте досками, брусками и кубиками число четыреста двадцать одинъ.

Ученикъ ставитъ четыре доски, два бруска и одинъ кубикъ.

— Вѣрно ли онъ обозначилъ число? Почему надо такъ обозначить число четыреста двадцать одинъ?

— Потому что въ немъ четыре сотни, два десятка и одна единица.

Такихъ упражненій нѣсколько; ученики обозначаютъ такія числа, въ которыхъ на лицо всѣ три разряда, и такія, въ которыхъ нѣтъ десятковъ или единицъ. Нѣсколько большее вниманіе надо удѣлить числамъ, содержащимъ одинъ десятокъ (двѣсти тринадцать), такъ какъ здѣсь названія десятка и единицъ сливаются въ одно слово.

Далѣе слѣдуютъ тѣ же упражненія безъ наглядныхъ пособій.

Упражненія а.

— Назовите число, которое состоитъ изъ пяти сотенъ, трехъ десятковъ и восьми единицъ. (См. годъ второй нашего сборника, стран. 38, № 1.)

Упражненія б.

— Четыреста двадцать девять — сколько тутъ сотенъ, десятковъ и единицъ? (№ 2).

— Слушайте, дѣти: сотни, десятки и единицы числа называются его *десятичными группами.* Повторите. Если я скажу вамъ: разбейте число на десятичныя группы, то вы должны мнѣ отвѣтить, сколько въ этомъ числѣ сотенъ, десятковъ и единицъ. Разбейте на десятичныя группы число сто семьдесятъ восемь. Что будетъ?

— Будетъ одна сотня, семь десятковъ и восемь единицъ.

Затѣмъ учитель можетъ сообщить ученикамъ, что простая единица, десятокъ и сотня называются единицами перваго, второго и третьяго разряда, и продѣлать тѣ же упражненія, употребляя эти названія вмѣсто словъ: сотня, десятокъ и единица.

Упражненія а.

— Назовите число, которое состоитъ изъ семи единицъ III разряда, шести единицъ II разряда и трехъ единицъ I разряда (№ 3).

Упражненія б.

— Скажите, изъ сколькихъ единицъ каждаго разряда состоитъ число двѣсти пятьдесятъ семь. (№ 4).

Заканчивая устную нумерацію, не лишне заставить учениковъ провести прямой и обратный счетъ отъ одного числа до другого, преимущественно съ переходомъ черезъ круглыя сотни.

— Девяносто восемь — считайте дальше.

Ученикъ считаетъ, пока учитель не остановитъ его, напр. на числѣ сто двадцать одинъ. (№ 5).

— Считайте назадъ отъ тысячи.

Ученикъ ведетъ обратный счетъ, пока учитель не остановитъ его, напр. на числѣ девятьсотъ семьдесятъ четыре. (№ 6).

36. Письменная нумерація. При изученіи письменной нумераціи хорошимъ пособіемъ могутъ служить счеты. Это пособіе не даетъ нагляднаго представленія о сравнительной величинѣ счетныхъ единицъ (сотни, десятка и единицы), какъ это дѣлаютъ доски, бруски и кубики ариѳметическаго ящика, или палочки, пучки по десятки и связки по сту палочекъ: совершенно одинаковые шарики означаютъ каждую изъ счетныхъ единицъ. Но здѣсь этого и не надо: при ознакомленіи съ письменной нумераціей назначеніе нагляднаго пособія состоитъ въ томъ, чтобы уяснить мѣстное значеніе цифръ и нуля; это назначеніе и выполняютъ счеты: какъ шарики, совершенно одинаковые, означаютъ сотни, десятки и единицы, смотря по тому, на которой проволокѣ они положены, такъ одна и та же цифра означаетъ сотни, десятки и единицы въ зависимости отъ того, на какомъ мѣстѣ она написана; если въ числѣ нѣтъ единицъ какого-либо разряда, то проволока, назначенная для этихъ единицъ, остается пустою (т.-е. на ней не кладется шариковъ), а при письменномъ обозначеніи на мѣстѣ этихъ единицъ ставится нуль.

Примѣчаніе. Нѣкоторое несоотвѣтствіе между обозначеніемъ чиселъ на счетахъ и на письмѣ заключается въ томъ, что на счетахъ единицы высшихъ разрядовъ находятся *надъ* единицами разрядовъ низшихъ, а при письмѣ — *влѣво* отъ нихъ. Это несоотвѣтствіе можетъ быть устранено при употребленіи шведскихъ счетовъ, если обозначать числа шариками, надѣваемыми на вертикальныя проволоки, укрѣпленныя на верху счетовъ. Впрочемъ, указанное внѣшнее несоотвѣтствіе не имѣетъ большого значенія, между тѣмъ какъ обозначать числа на горизонтальныхъ проволокахъ удоб-

нѣе, нежели на вертикальныхъ, потому что въ первомъ случаѣ приходится только передвигать шарики по проволокамъ, а во второмъ — надѣвать шарики на проволоки и снимать ихъ съ проволокъ.

Кромѣ того, впослѣдствіи все равно придется показать дѣтямъ обозначеніе чиселъ на горизонтальныхъ проволокахъ, когда счеты станутъ орудіемъ вычисленія, когда ученики будутъ производить на нихъ сложеніе и вычитаніе въ предѣлѣ тысячи.

Приступая къ письменной нумераціи чиселъ первой тысячи, мы показываемъ ученикамъ обозначеніе этихъ чиселъ на счетахъ и отсюда переходимъ къ обозначенію ихъ помощью цифръ, проводя соотвѣтствіе между обозначеніемъ чиселъ на счетахъ и обозначеніемъ ихъ на письмѣ.

— Положите на счетахъ число 6. Положите 70. На какой проволокѣ кладутся единицы? На какой десятки? А на которой проволокѣ надо класть сотни? Что же означаетъ каждый шарикъ третьей проволоки? Положите двѣсти, четыреста, семьсотъ, девятьсотъ.

Выяснивъ значеніе шариковъ третьей проволоки, учитель кладетъ на счетахъ различныя числа въ предѣлѣ тысячи, а ученики читаютъ ихъ и обратно: учитель диктуетъ такія числа, а ученики кладутъ ихъ счетахъ.

— Прочитайте, какое число положилъ я?

— Восемьсотъ сорокъ три.

— Почему вы такъ прочитали его?

— На третьей проволокѣ положено восемь шариковъ: они означаютъ восемь сотенъ, восемьсотъ; четыре шарика на второй проволокѣ означаютъ четыре десятка, или сорокъ; три шарика на первой проволокѣ — три единицы.

— Теперь какое число положено?

— Четыреста восемь.

— Почему вы такъ прочитали его? На какихъ проволокахъ положены шарики? На какой нѣтъ? Что же это означаетъ?

— Это означаетъ, что въ числѣ есть сотни и единицы, а десятковъ нѣтъ.

— Прочитайте, какое число положено теперь?

— Триста восемьдесятъ.

— Почему вы такъ прочитали его? На какихъ проволокахъ положены шарики? На какой нѣтъ? Что это означаетъ?

— Положите число шестьсотъ семьдесятъ четыре.

Ученики кладутъ число на розданныхъ имъ ручныхъ счетахъ, а затѣмъ одинъ изъ учениковъ — для повѣрки — на классныхъ счетахъ. Впрочемъ, здѣсь можно ограничиться обозначеніемъ чиселъ лишь на счетахъ классныхъ.

— Какъ обозначили вы это число? Почему надо такъ обозначить его?

— Потому что оно состоитъ изъ шести сотенъ, семи десятковъ и четырехъ единицъ.

— Положите девятьсотъ пять. Почему надо такъ положить это число? На какихъ проволокахъ положили вы шарики? На какой нѣтъ? Почему не положили вы шариковъ на второй проволокѣ?

— Положите пятьсотъ сорокъ. Почему надо такъ положить это число? На какихъ проволокахъ положили вы шарики? На какой нѣтъ? Почему не положили вы шариковъ на первой проволокѣ?

Затѣмъ дѣлается переходъ къ письму чиселъ.

— Положите на счетахъ двадцать семь. Напишите это число. Сколько шариковъ положено на второй проволокѣ? Что они означаютъ? Какая цифра написана на второмъ мѣстѣ? Что она означаетъ? Сколько шариковъ положено на первой проволокѣ? Что они означаютъ? Какая цифра написана на первомъ мѣстѣ? Что она означаетъ?

— Положите на счетахъ число пятьсотъ восемьдесятъ четыре. На какой проволокѣ кладутся сотни? А на какомъ мѣстѣ надо писать сотни? Напишите то число, которое положено на счетахъ.

Еще нѣсколько упражненій въ письмѣ чиселъ, въ которыхъ на лицо всѣ три разряда: учитель диктуетъ число, ученики кладутъ его на своихъ счетахъ (или только одинъ ученикъ на счетахъ классныхъ), а затѣмъ пишутъ его на грифельныхъ доскахъ или тетрадяхъ, послѣ чего одинъ изъ учениковъ пишетъ его и на классной доскѣ.

Затѣмъ слѣдуетъ письмо чиселъ, въ которыхъ нѣтъ десятковъ, нѣтъ единицъ, нѣтъ ни десятковъ, ни единицъ (круглыя сотни), и наконецъ письменное обозначеніе тысячи.

— Положите на счетахъ число восемьсотъ три. На всѣхъ ли трехъ проволокахъ положены шарики? На какой не положено? Какъ напишете вы это число: что поставите на второмъ мѣстѣ?

— На второмъ мѣстѣ поставимъ нуль[1]).

— Напишите же это число.

Ученики пишутъ 803.

— На второй проволокѣ не положено шариковъ. Что это значитъ?

— Значитъ, въ числѣ нѣтъ десятковъ.

— А что означаетъ нуль, поставленный на второмъ мѣстѣ?

— Онъ означаетъ, что въ числѣ нѣтъ десятковъ.

Такихъ примѣровъ нѣсколько.

— Положите число шестьсотъ тридцать. На всѣхъ ли трехъ проволокахъ положены шарики? На какой не положено? Какъ напишете вы это число: что поставите на первомъ мѣстѣ? Напишите. Что значитъ:

---

[1]) Если бъ ученики не дали такого отвѣта, на него можно было бы навести, сопоставляя обозначеніе круглыхъ десятковъ на счетахъ и на письмѣ.—Положите семьдесятъ. Напишите это число. На какой проволокѣ положены семь шариковъ? Что они означаютъ? На какомъ мѣстѣ написана цифра 7? Что она означаетъ? Положены ли шарики на первой проволокѣ? Первая проволока оставлена пустою; что это значитъ?— Это значитъ, что въ числѣ нѣтъ единицъ. — Что написано на первомъ мѣстѣ? Что означаетъ этотъ нуль? Вотъ видите: когда на счетахъ проволока остается пустою, тогда при письмѣ на этомъ мѣстѣ ставится нуль.

на первой проволокѣ не положено шариковъ, а на первомъ мѣстѣ написанъ нуль?

— Это значитъ, что въ числѣ нѣтъ единицъ.

Нѣсколько такихъ примѣровъ.

— Положите семьсотъ. На какой проволокѣ положены шарики? На второй и первой проволокахъ шариковъ не положено: что это значитъ? Какъ напишете вы это число: что поставите на второмъ и первомъ мѣстѣ? Напишите. Положите число сто. Напишите его. Объясните, почему такъ надо писать число сто.

— Положите на счетахъ девятьсотъ девяносто девять. Прибавьте сюда единицу. Чѣмъ можно замѣнить десять шариковъ первой проволоки? Замѣните. Сколько шариковъ положено теперь на второй проволокѣ? Чѣмъ можно ихъ замѣнить? Замѣните. Сколько шариковъ положено теперь на третьей проволокѣ? Что они означаютъ?

— Они означаютъ десять сотенъ.

— Какъ называются десять сотенъ? Чѣмъ можно замѣнить десять шариковъ третьей проволоки? Замѣните. Что же означаетъ шарикъ четвертой проволоки?

— Шарикъ четвертой проволоки означаетъ тысячу.

— Кто догадается, какъ надо написать тысячу цифрами?

Если дѣти напишутъ 1000, учитель спроситъ: почему именно такъ надо писать это число? Въ противномъ случаѣ учитель наведетъ учениковъ на письменное обозначеніе тысячи.

— Сколькими шариками обозначается тысяча на счетахъ? А мы напишемъ цифру 1. На которой проволокѣ положенъ этотъ шарикъ? На которомъ мѣстѣ должна быть написанная цифра 1? Положены ли шарики на третьей, второй и первой проволокахъ? Что должно быть поставлено на третьемъ, второмъ и первомъ мѣстѣ?

№№ 7 и 8 нашего сборника назначены для упражненія въ нумераціи на урокахъ съ учителемъ, а слѣдующіе за ними №№ 1 и 2 — для рѣшенія учениками во время самостоятельныхъ занятій.

Закончивъ нумерацію до тысячи, считаемъ весьма полезнымъ продѣлать съ учениками рядъ упражненій, состоящихъ въ разложеніи чиселъ перваго класса на двѣ группы, изъ которыхъ одна содержитъ всѣ десятки числа, а другая—его единицы: 684=68 десятковъ и 4 единицы; и обратно, въ составленіи числа по такимъ группамъ: 37 десятковъ и 9 единицъ=379. Если же число не содержитъ единицъ, то оно читается какъ группа десятковъ: 520=52 десяткамъ; обратно, числу, представленному въ видѣ группы десятковъ, дается общепринятое названіе его: 26 десятковъ — двѣсти шестьдесятъ.

Указанное преобразованіе чиселъ слѣдуетъ объяснить при помощи наглядныхъ пособій, которыми могутъ служить здѣсь доски, бруски и кубики ариѳметическаго ящика.

Учитель ставитъ двѣ доски, три бруска, пять кубиковъ.

— Прочитайте число, которое я обозначилъ. Напишите его. Сколькими брусками можно замѣнить доску? Сколькими брусками замѣнятся двѣ доски? (Дѣлаетъ эту замѣну). Прочитайте число, которое теперь обозначено.

— Двадцать три десятка и пять единицъ.

— А какъ читали мы это же число раньше, когда доски не были замѣнены брусками?

— Двѣсти тридцать пять.

— Изъ чего состоитъ число двѣсти тридцать пять? Да, оно состоитъ изъ трехъ группъ: сотенъ, десятковъ и единицъ. А когда мы замѣнили доски брусками, мы раздробили сотни въ десятки, и число это стало состоять только изъ двухъ группъ: изъ десятковъ и единицъ. Изъ сколькихъ десятковъ и сколькихъ единицъ стало состоять это число?

— Изъ двадцати трехъ десятковъ и пяти единицъ.

— Число это записано на доскѣ. Разбейте его такъ, какъ сказано, запятою.

Ученикъ ставитъ запятую: 23,5.

— Прочитайте число, которое влѣво отъ запятой.

— Двадцать три.

— Что означаетъ это число 23?

— Оно означаетъ 23 десятка.

— Какая цифра направо отъ запятой? Что означаетъ эта цифра?

Слѣдуютъ упражненія въ указанномъ разложеніи уже безъ наглядныхъ пособій.

— Прочитайте число, которое я написалъ (678). Разбейте его на десятки и единицы. Сколько будетъ всѣхъ десятковъ въ этомъ числѣ? Какъ вы сообразили это?

— Въ одной сотнѣ 10 десятковъ, въ 6 сотняхъ 60 десятковъ; 60 десятковъ да еще 7 десятковъ, всего 67 десятковъ.

— А сколько единицъ въ этомъ числѣ? Напишите на своихъ доскахъ 678. Разбейте написанное числое запятою.

— Прочитайте число, которое я написалъ (380). Сколько всѣхъ десятковъ въ этомъ числѣ? Какъ вы сообразили это? А сколько единицъ въ этомъ числѣ?

— Единицъ въ немъ нѣтъ.

— Напишите на своихъ доскахъ 380. Отдѣлите запятою его десятки.

Соотвѣтствующія упражненія помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ № 9.

Далѣе идутъ обратныя упражненія: дается число, какъ группа десятковъ (24 десятка) или какъ группа десятковъ и единицъ (35 десятковъ и 7 единицъ): ученики должны сказать общепринятое названіе числа. Разъясненіе удобно сдѣлать при помощи наглядныхъ пособій.

Учитель ставитъ 24 бруска и спрашиваетъ.

— Какое число обозначилъ я?

— 24 десятка.

— Чѣмъ можно замѣнить 10 брусковъ? (Замѣняетъ 10 брусковъ доскою.) Сколько брусковъ осталось теперь? Можно ли еще разъ сдѣлать замѣну брусковъ доскою? (Замѣняетъ.) Сколько брусковъ осталось? Чѣмъ же изображено теперь наше число?

— Двумя досками и четырьмя брусками.

— Прочитайте его.

— Двѣсти сорокъ.

— А какъ назвали вы это число раньше, когда бруски еще не были замѣнены досками?

— 24 десятка.

Слѣдуютъ упражненія уже безъ наглядныхъ пособій.

— Сорокъ три десятка — назовите это число по-другому (какъ называютъ обыкновенно).

— Четыреста тридцать.

— Какъ вы сообразили это?

— Десять десятковъ составляютъ сотню, сорокъ десятковъ — четыре сотни; 4 сотни и 3 десятка — четыреста тридцать.

— Назовите число, которое состоитъ изъ 35 десятковъ и 7 единицъ.

— Триста пятьдесятъ семь.

— Какъ вы сообразили это?

— 35 десятковъ — триста пятьдесятъ; да еще семь — триста пятьдесятъ семь.

Соотвѣтствующія упражненія помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ № 10.

Изложенныя преобразованія чиселъ ведутъ къ умноженію и дѣленію на 10, съ которыми теперь и можно познакомить учениковъ, показавъ вмѣстѣ съ тѣмъ умноженіе и дѣленіе на 100.

Умноженіе и дѣленіе на 10 и 100 весьма удобно поставить тотчасъ послѣ изученія нумераціи: эти упражненія, требуя перечисленія счетныхъ единицъ изъ одного разряда въ другой, могутъ содѣйствовать усвоенію нумераціи.

— Хозяинъ посѣялъ 23 мѣры ржи, а собралъ въ 10 разъ больше, чѣмъ посѣялъ. Сколько мѣръ ржи собралъ хозяинъ? Что надо сдѣлать, чтобы узнать это? — Число 23 состоитъ изъ 23 единицъ; если мы каждую единицу повторимъ 10 разъ, что̀ будетъ тогда у насъ вмѣсто единицы? — Десятокъ. — А что получится вмѣсто 23 единицъ? — Вмѣсто 23 единицъ получится 23 десятка. — Какъ можно иначе назвать 23 десятка? — Двѣсти тридцать. — Запишите рѣшеніе этой задачи. ($23 \times 10 = 230$.) Какое число умножили мы на 10? — 23. — Какое число получили? — 230. — Какими цифрами пишется число 230? Если написано 23, то что должно сдѣлать, чтобы вмѣсто 23 написано было 230? — Надо съ правой стороны приписать нуль.

Иначе:

— Изъ сколькихъ десятковъ и единицъ состоитъ число 23? Какое число составляютъ 10 десятковъ? Одинъ десятокъ умножить на 10 —

что получится? — Сотня. — А если два десятка умножимъ на 10, что тогда получимъ? — 2 сотни, двѣсти. — Умножайте дальше. — 3 единицы умножить на 10 — будетъ 3 десятка, или тридцать; 200 и 30 = 230.

— Торговецъ купилъ товару на 320 р.; при продажѣ этого товара онъ получилъ прибыли по одному рублю на каждые 10 рублей. Сколько всей прибыли получилъ торговецъ отъ этой продажи? Что надо сдѣлать, чтобы узнать это? Почему надо 320 раздѣлить на 10? — Онъ получилъ столько рублей прибыли, сколько разъ 10 руб. содержатся въ 320 рубляхъ, сколько десятковъ въ 320. — Сколько десятковъ въ 320? Сколько же прибыли получилъ торговецъ? Вотъ видите: чтобы раздѣлить 320 на 10, надо сказать, сколько всѣхъ десятковъ въ числѣ 320; если раздѣлить каждый десятокъ на 10, то каждый десятокъ замѣнится единицей; сколько было десятковъ, столько станетъ единицъ: было 32 десятка, стало 32 единицы. Запишите рѣшеніе задачи. (320 : 10 = 32). Какое число мы дѣлили на 10? Какое число получили? Если мы напишемъ 320, то что надо сдѣлать, чтобы вмѣсто 320 было написано 32? — Надо откинуть (стереть, зачеркнуть) нуль съ правой стороны.

— Можно ли 246 листовъ бумаги раздать поровну 10 ученикамъ? (такъ чтобы каждому достались только цѣлые листы). Самое большее — по скольку листовъ можетъ получить каждый, и сколько листовъ останутся нерозданными? Какъ это узнать? — Надо 246 раздѣлить на 10. — Какъ станете дѣлить? — 246 состоитъ изъ 24 десятковъ и 6 единицъ; 24 десятка раздѣлить на 10, получится 24; 6 единицъ будутъ въ остаткѣ: каждый ученикъ можетъ получить по 24 листа, 6 листовъ останутся нерозданными. — Запишите рѣшеніе этой задачи. — 246 : 10 = 24 (6.) — Въ написанномъ числѣ 246 укажите ту часть его, которая получается послѣ дѣленія. (Ученики показываютъ число 24, стоящее влѣво отъ цифры единицъ.) Укажите ту часть его, которая будетъ въ остаткѣ. (Ученики указываютъ цифру единицъ.)

Инымъ путемъ дѣленіе на 10 можетъ быть выполнено такъ.

— 320 раздѣлить на 10. Изъ сколькихъ сотенъ и сколькихъ десятковъ состоитъ 320? Сколько десятковъ въ сотнѣ? Во сколько разъ десятокъ меньше сотни? Если сотню раздѣлимъ на 10, что тогда получимъ? — Если сотню раздѣлимъ на 10, получимъ десятокъ. — Сколько сотенъ намъ надо раздѣлить? Что получимъ, когда 3 сотни раздѣлимъ на 10? — 3 сотни раздѣлимъ на 10, получимъ 3 десятка. — Продолжайте дѣленіе. — 2 десятка раздѣлить на 10, будетъ 2 единицы; 3 десятка и 2 единицы составляютъ 32.

Умноженіе на 100, напр., числа 7, выполняется замѣной каждой единицы сотней: было 7 единицъ, будетъ 7 сотенъ; $7 \times 100 = 700$. Письменно это выразится приписываніемъ къ множимому съ правой стороны двухъ нулей.

Для раздѣленія какого-нибудь числа на 100 замѣнимъ каждую сотню этого числа единицей: сколько было сотенъ, столько станетъ единицъ. Письменно это выразится отбрасываніемъ съ правой стороны дѣлимаго двухъ нулей или двухъ цифръ, которыя представляютъ собою остатокъ: 600 : 100 = 6; 738 : 100 = 7 (38); 540 : 100 = 5 (40); 308 : 100 = 3 (8).

Упражненія въ умноженіи и дѣленіи на 10 и на 100 помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 11—16.

37. Сложеніе. Говоря объ устныхъ вычисленіяхъ (введеніе, § 9), мы сказали, что, по нашему мнѣнію, является весьма желательнымъ и возможнымъ пріучить дѣтей производить устно всѣ дѣйствія въ предѣлѣ тысячи. Числа данныя записываются въ строку, въ ту же строку записывается и результатъ, но не прежде, чѣмъ онъ сполна найденъ въ умѣ. Дѣйствіе слѣдуетъ начинать съ высшихъ разрядовъ.

До сихъ поръ мы сообщили дѣтямъ только названія дѣйствій. Здѣсь, въ предѣлѣ тысячи, считаемъ умѣстнымъ познакомить учениковъ съ названіями чиселъ данныхъ и искомыхъ въ каждомъ изъ четырехъ дѣйствій.

Разсматривая общій случай сложенія въ предѣлѣ тысячи, напр. сложеніе 586+367, мы приходимъ къ такимъ элементамъ его: а) сложеніе круглыхъ сотенъ: 500+300=800; б) сложеніе круглыхъ десятковъ, сумма которыхъ болѣе ста: 80+60=140; в) сложеніе круглыхъ сотенъ съ числомъ, состоящимъ изъ сотенъ и десятковъ: 800+140=940; г) сложеніе числа, состоящаго изъ сотенъ и десятковъ съ двузначнымъ числомъ: 940+13=953.

Эти частные случаи сложенія въ предѣлѣ тысячи должны быть разсмотрѣны ранѣе общаго случая[1]). Ранѣе его слѣдуетъ поставить и такіе примѣры, въ которыхъ пріемъ сложенія ученикамъ уже извѣстенъ: сложеніе двузначнаго числа съ однозначнымъ и двузначнымъ, когда въ суммѣ получается болѣе ста (95+9, 7+96, 75+40, 60+73, 56+85). Всѣ перечисленные случаи сложенія въ предѣлѣ тысячи, которые должны предшествовать общему случаю, приведены въ нашемъ сборникѣ въ задачахъ и примѣрахъ подъ №№ 17—24 и 6—13.

Изложимъ относящійся сюда процессъ сложенія.

1) Сложеніе круглыхъ сотенъ, напр. 500+300, требуетъ только распространенія на сотни таблицы сложенія (въ пре-

---

[1]) Подготовляя учениковъ къ выводу пріема сложенія трехзначныхъ чиселъ, мы не считаемъ нужнымъ останавливаться особо на сложеніи чиселъ, состоящихъ — одно изъ сотенъ, другое изъ десятковъ, третье изъ единицъ, какъ напр. чиселъ 900, 80 и 7, къ сложенію которыхъ приводитъ отысканіе напр. суммы 524+463.

цѣлѣ десяти): къ 5 прибавить 3—будетъ 8; къ 5 сотнямъ прибавить 3 сотни—будетъ 8 сотенъ: 500+300=800. (№ 17.)

2) Сложеніе круглыхъ десятковъ, дающихъ въ суммѣ больше ста, напр. 90+50, требуетъ распространенія на десятки таблицы сложенія и превращенія десятковъ въ сотни: къ 9 прибавить 5—будетъ 14; къ 9 десяткамъ прибавить 5 десятковъ—будетъ 14 десятковъ, которые составляютъ одну сотню и четыре десятка, т.-е. число сто сорокъ: 90+50=140. (№ 18.)

3) Изученіемъ дѣйствій въ предѣлѣ сотни ученики достаточно подготовлены къ пользованію десятичнымъ составомъ чиселъ, и при сложеніи сотенъ съ числомъ, состоящимъ изъ сотенъ и десятковъ, напр. при сложеніи 300+120, они придадутъ сначала 100 къ 300, потомъ 400 и 20 соединятъ въ одно число. (№ 21.)

4) Не встрѣтятъ затрудненія и примѣры сложенія, приведенные подъ №№ 22 и 23: для сложенія 370+10 ученики придадутъ 10 къ 70; для отысканія суммы 230+17 прибавятъ сначала 10 (къ 30), потомъ 7 (соединятъ въ одно число 240 и 7).

5) Пріемъ сложенія двузначныхъ чиселъ, напр. чиселъ 56 и 85 (№ 24), ученикамъ уже извѣстенъ; здѣсь потребуется превращеніе десятковъ въ сотню и затѣмъ прибавленіе двузначнаго числа къ числу, состоящему изъ сотни и десятковъ (предыдущій примѣръ): 50+80=130; 130+11=141. Сложеніе двузначнаго числа съ однозначнымъ (95+9, 7+96) и съ круглыми десятками (75+40, 60+73) можетъ быть разсматриваемо, какъ частный случай сложенія двузначныхъ чиселъ; но оно можетъ быть поставлено и ранѣе, какъ это сдѣлано въ нашемъ сборникѣ (№№ 19 и 20), такъ какъ не требуетъ сложенія двузначнаго числа съ числомъ, состоящимъ изъ сотенъ и десятковъ.

Общій пріемъ сложенія трехзначныхъ чиселъ достаточно подготовленъ изученіемъ сложенія въ предѣлѣ сотни и разсмотрѣнными выше случаями сложенія въ предѣлѣ тысячи.

Для вывода этого пріема слѣдуетъ взять такой примѣръ, въ которомъ единицы одноименныхъ разрядовъ даютъ въ суммѣ не болѣе 9; это надо сдѣлать съ тою цѣлію, чтобы вниманіе дѣтей было всецѣло обращено на сущность пріема: складывать сотни съ сотнями, десятки съ десят-

ками и единицы съ единицами. Затѣмъ выведенный пріемъ примѣняется къ случаямъ, требующимъ превращенія десятковъ и единицъ или и тѣхъ и другихъ вмѣстѣ.

Учитель пишетъ на классной доскѣ примѣръ на сложеніе двузначныхъ чиселъ: 56 + 23.

— Прочитайте. Сколько будетъ? Какъ складывали вы эти числа?

— 50 и 20 будетъ 70, 6 и 3 будетъ 9; всего 79.

— Да, вы разбили 56 и 23 на десятки и единицы. Изъ сколькихъ десятковъ и сколькихъ единицъ состоитъ 56? 23? Что сначала складывали вы? — Десятки съ десятками. — Что складывали потомъ? — Единицы съ единицами.

Затѣмъ учитель пишетъ на классной доскѣ примѣръ на сложеніе трехзначныхъ чиселъ: 254 + 325.

— Прочитайте. Какъ станете вы складывать эти числа?

Подготовленные сложеніемъ двузначныхъ чиселъ, ученики дадутъ правильный отвѣтъ:

— Сначала сложимъ сотни, потомъ десятки, затѣмъ единицы.

— Сколько сотенъ, десятковъ и единицъ въ числѣ 254? въ числѣ 325? Когда мы говоримъ, сколько сотенъ, десятковъ и единицъ въ какомъ-нибудь числѣ, то мы разбиваемъ это число на десятичныя группы: на сотни, десятки и единицы. Скажите же, что прежде всего надо сдѣлать, чтобы сложить эти числа.

— Прежде всего надо разбить ихъ на десятичныя группы: на сотни, десятки и единицы.

— Повторите, какъ будете складывать.

— Сначала сложимъ сотни съ сотнями, потомъ десятки съ десятками, затѣмъ единицы съ единицами.

— Складывайте.

— 200 и 300 — 500; 50 и 20 — 70; 500 и 70 — 570; 4 и 5 — 9; 570 и 9 — 579.

Результатъ записывается послѣ знака равенства: 254 + 325 = 579.

Примѣчаніе. Намъ кажется удобнымъ соединять десятичныя группы получаемой суммы именно въ томъ порядкѣ, какой мы привели: сложивши сотни и затѣмъ десятки, мы тотчасъ же соединяемъ ихъ въ одно число (570) и потомъ уже складываемъ единицы. Иной порядокъ: 200 + 300 = 500, 50 + 20 = 70, 4 + 5 = 9, 500 + 70 + 9 = 579 — представляется менѣе удобнымъ, такъ какъ, приступая къ сложенію единицъ въ первомъ случаѣ, мы держимъ въ памяти только одно число (570); во второмъ же случаѣ должны держать въ памяти два числа (500 и 70). Преимущество перваго порядка передъ вторымъ еще замѣтнѣе тогда, когда отъ сложенія десятковъ получается сотня.

При выводѣ пріема сложенія въ предѣлѣ тысячи можно познакомить учениковъ съ названіями чиселъ данныхъ и результата.

— Прочитайте тѣ числа, которыя мы сейчасъ сложили. Какъ называется то дѣйствіе, которое мы дѣлаемъ, когда складываемъ числа? — Сложеніе. — Слушайте, дѣти; тѣ числа, которыя складываются, называются «слагаемыя числа», или просто *слагаемыя*. (Учитель записываетъ

этотъ терминъ на классной доскѣ.) Повторите. Сколько у насъ здѣсь слагаемыхъ? Какое первое слагаемое? Второе? Прочитайте то число, которое получилось отъ сложенія. Слушайте: число, которое получается отъ сложенія, называется *сумма*. (Записываетъ этотъ терминъ.) Повторите. Значитъ, 579 есть сумма чиселъ 254 и 325. — Найдемъ сумму чиселъ 614 и 243. Какъ это обозначить? — 614 + 243. — Какъ станете находить сумму этихъ чиселъ? — Мы разобьемъ эти числа на сотни, десятки и единицы; сложимъ сначала сотни, потомъ десятки и затѣмъ единицы.

Далѣе выведенный пріемъ устнаго сложенія примѣняется къ тѣмъ случаямъ, когда отъ сложенія десятковъ или единицъ, или и тѣхъ и другихъ, получается больше девяти. Приведемъ относящійся сюда процессъ сложенія. 1) 386 + 242; 300 + 200 = 500, 80 + 40 = 120, 500 + + 120 = 620, 6 + 2 = 8, 620 + 8 = 628; все это выполняется, конечно, въ умѣ; записываются лишь данныя числа и окончательный результатъ, когда онъ найденъ сполна: 386 + 242 = 628. 2) 536 + 387; 500 + 300 = = 800, 30 + 80 = 110, 800 + 110 = 910, 6 + 7 = 13, 910 + 13 = 923; 536 + + 387 = 923.

Для упражненія могутъ служить задачи №№ 25—31 и примѣры №№ 14—44 нашего сборника.

Примѣчаніе. Выше мы привели тѣ случаи сложенія въ предѣлѣ тысячи, которые слѣдуетъ поставить раньше общаго случая сложенія въ этомъ предѣлѣ. Что же касается остальныхъ частныхъ случаевъ, какъ-то сложенія трехзначнаго числа съ двузначнымъ или однозначнымъ, мы не считаемъ нужнымъ останавливаться на нихъ особо: сложеніе выполняется здѣсь примѣненіемъ уже выведеннаго общаго пріема.

Скажемъ нѣсколько словъ относительно примѣровъ на сложеніе (№ 31 и №№ 43 и 44), въ которыхъ удобно воспользоваться такъ наз. свойствомъ сочетательности (Ч. I, § 12). Къ этимъ упражненіямъ можно подготовить учениковъ, заставивъ ихъ продѣлать рядъ примѣровъ на вычитаніе двузначныхъ чиселъ изъ сотни: 100—67; разлагая 100 на 90 и на 10, отнимаемъ 60 отъ 90 и 7 отъ 10: цифру десятковъ вычитаемъ изъ 9, цифру единицъ изъ 10. Умѣя быстро вычитать изъ 100, ученики этимъ самымъ будутъ быстро находить дополненіе даннаго числа до ста (78; сколько нехватаетъ до 100?). Приступая къ рѣшенію примѣровъ на сложеніе въ родѣ примѣра 225 + 348 + 175 + 152, учитель сначала предоставитъ дѣтямъ выполнить сложеніе въ томъ порядкѣ, въ какомъ приведены слагаемыя: къ первому изъ нихъ прибавить второе, къ полученному числу — третье, къ вновь полученному — четвертое; или сначала сложить сотни всѣхъ четырехъ слагаемыхъ, потомъ десятки ихъ и единицы. Затѣмъ, если дѣти не догадаются объ этомъ сами, учитель укажетъ имъ на удобство иной группировки слагаемыхъ; сложить первое число съ третьимъ: 225 + 175 = 400, второе съ четвертымъ: 348 + 152 = 500, и затѣмъ полученныя суммы соединить въ одну: 400 + 500 = 900. Въ послѣдующихъ примѣрахъ того же рода ученики уже сами будутъ дѣлать подобную группировку слагаемыхъ. Такая группировка слагаемыхъ имѣетъ значеніе въ практическомъ отношеніи, облегчая выполненіе дѣйствія и скорѣе приводя къ искомому результату. Затѣмъ она останавливаетъ вниманіе на одномъ изъ свойствъ

сложенія (свойствѣ сочетательности) и вноситъ въ вычисленіе свою долю сознательности, заставляя дѣтей всматриваться въ данныя числа съ цѣлью наиболѣе удобнаго ихъ соединенія.

Послѣ упражненій въ устномъ сложеніи въ предѣлѣ тысячи можно поупражнять учениковъ въ сложеніи на счетахъ. (№№ 32—37 нашего сборника, назначенные для рѣшенія учениками вмѣстѣ съ учителемъ, №№ 45—57, которые дѣти рѣшаютъ во время самостоятельныхъ занятій.) Здѣсь, кромѣ отвлеченныхъ чиселъ, полагаемъ умѣстнымъ ввести въ вычисленіе числа, выраженныя въ рубляхъ и копейкахъ (на первой — нижней — проволокѣ кладутся копейки, на второй — гривенники, на третьей — рубли, на четвертой и пятой — десятки и сотни рублей; здѣсь можно сказать и о значеніи проволокъ съ четырьмя шариками: одна изъ нихъ — нижняя — служитъ для обозначенія четвертей копейки, другая — для четвертей рубля).

38. Сложеніе дробей. Говоря о расположеніи учебнаго матеріала начальной ариѳметики (введеніе, § 6), мы поставили дѣйствія надъ дробями $^1/_2$, $^1/_4$ и $^1/_8$ послѣ изученія дѣйствій надъ цѣлыми числами въ предѣлѣ тысячи.

Въ необходимости дѣйствій надъ числами дѣтей убѣждаютъ задачи. Поэтому, приступая къ дѣйствіямъ надъ дробями, слѣдуетъ начинать не съ отвлеченныхъ примѣровъ, а съ задачъ, которыя и поведутъ къ требованію выполнить надъ дробями то или другое ариѳметическое дѣйствіе.

Правила выполненія дѣйствій надъ дробями, въ ихъ обычной формулировкѣ, здѣсь не сообщаются.

Для ознакомленія учениковъ съ сложеніемъ дробей ($^1/_2$, $^1/_4$ и $^1/_8$) могутъ служить задачи №№ 38—45 нашего сборника, и затѣмъ для упражненія въ сложеніи примѣры №№ 58—60.

Сложеніе дробей слѣдуетъ начать, конечно, со сложенія одинаковыхъ долей (дробей съ одинаковыми знаменателями).

— Хозяйка разбила кусокъ сахару на двѣ части: въ одной оказалось $^3/_8$ фунта, въ другой $^1/_8$ фунта. Сколько вѣсу въ обоихъ кускахъ? (Задача № 38). Какъ это узнать?

— Надо къ $^3/_8$ прибавить $^1/_8$. Надо сложить $^3/_8$ и $^1/_8$.

— Запишите это.

Является запись $^3/_8 + ^1/_8$.

— Положите $^3/_8$ на дробныхъ счетахъ. (Или: отмѣтьте $^3/_8$ на чертежѣ). Прибавьте сюда $^1/_8$. Сколько получилось?

— Получилось $^4/_8$.

— Запишите. ($^3/_8+^1/_8=^4/_8$.) Чѣмъ можно замѣнить $^4/_8$? (Во что можно превратить $^4/_8$?). Запишите. ($^3/_8+^1/_8=^4/_8=^1/_2$.) Сколько же вѣсу въ обоихъ кускахъ сахару?

Въ слѣдующей задачѣ — № 39 — полученная сумма обращается въ цѣлое число съ дробью: $^7/_8+^3/_8=^{10}/_8=1^2/_8=1^1/_4$.

Потомъ идутъ такіе случаи сложенія, когда одно и оба слагаемыя выражены цѣлыми числами вмѣстѣ съ дробями: $2^3/_4+^1/_4=2^4/_4=3$. (№ 40); $4^1/_8+3^5/_8=7^6/_8=7^3/_4$. (№ 41); $4^3/_8+3^7/_8=7^{10}/_8=8^2/_8=8^1/_4$. (№ 42).

Послѣ этого можно объяснить дѣтямъ сложеніе разныхъ долей (дробей съ разными знаменателями).

— Крестьянинъ былъ долженъ въ лавку; въ одинъ мѣсяцъ онъ заплатилъ $^1/_2$ всего долга, въ другой мѣсяцъ $^1/_4$ долга. Какую часть долга заплатилъ онъ въ эти два мѣсяца? (Задача № 43.) Какъ это узнать? Запишите. ($^1/_2+^1/_4$.) Положите на дробныхъ счетахъ $^1/_2$. Что еще осталось на этой проволокѣ? — Осталось еще $^1/_2$. — А сколько намъ надо прибавить? Не догадаетесь ли, на какой проволокѣ надо сдѣлать сложеніе? — На той, гдѣ четверти, гдѣ единица раздѣлена на 4 равныя части. — Что же сначала вы положите на этой проволокѣ? — Сначала положимъ $^1/_2$. — Какъ положить на этой проволокѣ $^1/_2$: на ней вѣдь четверти? — Надо положить $^2/_4$: это все равно, что $^1/_2$. — Положите. Что теперь надо сдѣлать? — Прибавить $^1/_4$. — Прибавьте. Сколько же получилось? — Получилось $^3/_4$. — Запишите. ($^1/_2+^1/_4=^2/_4+^1/_4=^3/_4$.) Какую же часть своего долга заплатилъ крестьянинъ въ два мѣсяца? — Для того, чтобы сложить $^1/_2$ съ $^1/_4$, мы положили $^1/_2$ на той проволокѣ, гдѣ четверти: положили вмѣсто половины $^2/_4$. Какъ сказать: что сдѣлали мы съ $^1/_2$? — Мы раздробили $^1/_2$ въ четверти. — Сложите $^1/_4$ и $^1/_8$. Какъ станете складывать? — Мы раздробимъ $^1/_4$ въ восьмыя: будетъ $^2/_8$; къ $^2/_8$ прибавить $^1/_8$ — получится $^3/_8$. (Запись: $^1/_4+^1/_8=^2/_8+^1/_8=^3/_8$.) — Сложите $^1/_2$ и $^1/_8$. Какъ станете складывать? — Мы раздробимъ $^1/_2$ въ восьмыя: будетъ $^4/_8$; къ $^4/_8$ прибавить $^1/_8$ — получится $^5/_8$. ($^1/_2+^1/_8=^4/_8+^1/_8=^5/_8$.)

Въ задачѣ № 44 полученная сумма обращается въ цѣлое съ дробью: $^3/_4+^5/_8=^6/_8+^5/_8=^{11}/_8=1^3/_8$. Въ задачѣ № 45 слагаемыми служатъ цѣлыя вмѣстѣ съ дробями: $2^3/_4+1^1/_2=2^3/_4+1^2/_4=3^5/_4=4^1/_4$. Примѣры №№ 58—60 ученики могутъ рѣшать во время самостоятельныхъ занятій.

39. Вычитаніе. Для того, чтобы вычесть устно трехзначное число изъ трехзначнаго въ общемъ случаѣ, напр. чтобы вычесть 386 изъ 825, разбиваемъ вычитаемое на его десятичныя группы 300, 80 и 6, а уменьшаемое — на группы 700, 110 и 15, и вычитаемъ: 300 изъ 700, 80 изъ 110

и 6 изъ 15; полученныя разности соединяемъ въ одно число (складываемъ). Чтобы выполнить вычитаніе 826—386, какъ видимъ, мы должны умѣть производить слѣдующія вычитанія въ предѣлѣ тысячи: а) вычитаніе сотенъ изъ сотенъ: 700—300 и б) вычитаніе десятковъ, числомъ менѣе десяти, изъ десятковъ, числомъ болѣе десяти: 110—80. Эти два случая вычитанія въ предѣлѣ тысячи и должны быть разсмотрѣны прежде всего (задачи и примѣры подъ №№ 46 и 47 и №№ 61—64).

Изложимъ относящійся сюда процессъ вычитанія.

а) Вычитаніе сотенъ изъ сотенъ, напр. 800—600, требуетъ только распространенія на сотни таблицы вычитанія (въ предѣлѣ десяти); отъ 8 отнять 6 — останется 2; отъ 8 сотенъ отнять 6 сотенъ — останется 2 сотни: 800—600=200.

При вычитаніи изъ тысячи надо разсматривать 1000 какъ 10 сотенъ.

б) Вычитаніе десятковъ изъ десятковъ, напр. 120—40, требуетъ раздробленія сотни въ десятки и распространенія на десятки таблицы вычитанія: 120 — это 12 десятковъ; отъ 12 отнять — 4 останется 8; отъ 12 десятковъ отнять 4 десятка — останется 8 десятковъ: 120—40=80.

Такъ же, какъ было сдѣлано при ознакомленіи со сложеніемъ, мы ведемъ учениковъ къ пріему вычитанія трехзначныхъ чиселъ отъ знакомаго уже дѣтямъ пріема вычитанія чиселъ двузначныхъ. Сначала беремъ примѣръ, въ которомъ вычитаніе совершается безъ раздробленія сотни и десятка; потомъ разсматриваемъ такіе случаи, въ которыхъ приходится раздроблять сотню или десятокъ, или сотню и десятокъ вмѣстѣ.

Учитель пишетъ на классной доскѣ примѣръ на вычитаніе двузначныхъ чиселъ: 76—24.

— Прочитайте. Сколько будетъ? Какъ вычитали?

— Отъ 70 отняли 20, осталось 50; отъ 6 отняли 4, осталось 2; 50 и 2 — всего 52.

— Да, вы разбили 76 и 24 на десятки и единицы. Изъ сколькихъ десятковъ и сколькихъ единицъ состоитъ 76? 24? Что сначала вычитали? — Десятки изъ десятковъ. — Что вычитали потомъ? — Единицы изъ единицъ.

Затѣмъ учитель пишетъ примѣръ на вычитаніе трехзначныхъ чиселъ: 896—532.

— Прочитайте. Какъ станете вычитать?

Подготовленные вычитаніемъ двузначныхъ чиселъ, ученики отвѣтятъ:

— Сначала вычтемъ сотни изъ сотенъ, потомъ десятки изъ десятковъ и единицы изъ единицъ.

— Сколько сотенъ, десятковъ и единицъ въ числѣ 896? въ числѣ 532?

— Когда мы говоримъ, сколько сотенъ, десятковъ и единицъ въ какомъ-нибудь числѣ, то что мы дѣлаемъ съ этимъ числомъ, — какъ это сказать?

— Мы разбиваемъ его на десятичныя группы: на сотни, десятки и единицы.

— Скажите же, что̀ прежде всего надо сдѣлать, чтобы вычесть 532 изъ 896?

— Прежде всего надо разбить эти числа на десятичныя группы: на сотни, десятки и единицы.

— Повторите, какъ станете вычитать.

— Сначала вычтемъ сотни изъ сотенъ, потомъ десятки изъ десятковъ и единицы изъ единицъ.

— Вычитайте.

— Отъ 800 отнять 500 — останется 300; отъ 90 отнять 30 — останется 60; 300 да 60 будетъ 360; отъ 6 отнять 2 — останется 4; 360 да 4 будетъ 364.

Результатъ записывается послѣ знака равенства: 896—532=364.

Дѣти соединяютъ десятичныя группы искомаго числа по мѣрѣ ихъ полученія: вычтя сотни изъ сотенъ и десятки изъ десятковъ, тотчасъ же складываютъ разность сотенъ съ разностью десятковъ (300 и 60 будетъ 360) и потомъ уже вычитаютъ единицы изъ единицъ.

Здѣсь можно познакомить учениковъ съ названіями чиселъ данныхъ и результата.

— Какъ называется то дѣйствіе, которое мы дѣлаемъ, когда вычитаемъ одно число изъ другого? — Вычитаніе. — Прочитайте то число, которое мы вычитали. Слушайте, дѣти: то число, которое вычитается, называется «вычитаемое число», или просто *вычитаемое*. (Учитель записываетъ этотъ терминъ на классной доскѣ.) Повторите. Уменьшите 15 на 3. Сколько будетъ? Что надо сдѣлать, чтобы 15 уменьшить на 3? Что же дѣлается съ числомъ, когда мы вычитаемъ изъ него другое число? — Оно уменьшается. — Поэтому, то число, изъ котораго вычитаютъ, называется «уменьшаемое число», или просто *уменьшаемое*. (Записываетъ этотъ терминъ.) Повторите Прочитайте уменьшаемое въ нашемъ примѣрѣ. (896—532=364.) У мальчика было 15 копеекъ; изъ нихъ 7 копеекъ онъ истратилъ. Сколько денегъ осталось у мальчика? Что надо сдѣлать, чтобы узнать это? Что же мы узнали, когда изъ 15 вычли 7? — Мы узнали, сколько денегъ осталось у мальчика. — Да, когда мы вычитаемъ, мы узнаемъ, сколько остается; поэтому, то число, которое получается отъ вычитанія, называется *остатокъ*. (Записываетъ терминъ.) Повторите. Прочитайте остатокъ въ нашемъ примѣрѣ. (Указываетъ сдѣланный примѣръ вычитанія трехзначныхъ чиселъ). Отцу 45 лѣтъ, сыну — 12 лѣтъ. На сколько лѣтъ отецъ старше сына? Что надо сдѣлать, чтобы узнать это? Что же мы узнали, когда изъ 45

вычли 12? — Мы узнали, на сколько лѣтъ отецъ старше сына. — Да иначе сказать, мы узнали разницу между ихъ годами, или разность между ихъ годами. Поэтому, то число, которое получается отъ вычитанія, называется еще *разность*. (Записываетъ терминъ.) Повторите. Какъ же назовете вы въ нашемъ примѣрѣ число 364?

Далѣе разсматриваются такіе случаи, въ которыхъ вычитаніе совершается съ раздробленіемъ сотни или десятка.

Учитель пишетъ примѣръ на вычитаніе двузначныхъ чиселъ: 83—57.

— Прочитайте. Какъ станете вычитать?

— Мы разобьемъ 83 на 70 и 13: отъ 70 отнять 50—останется 20; отъ 13 отнять 7 — останется 6; 20 и 6 будетъ 26.

— Что вычитали вы сначала? Что вычитали потомъ? Какъ же разбили вы вычитаемое 57?

— Мы разбили его на 5 десятковъ и 7 единицъ

— А какъ разбили вы уменьшаемое?

— Мы разбили его на 70 и 13.

— Почему не разложили вы уменьшаемое на 8 десятковъ и 3 единицы?

— Потому что 7 изъ 3 вычесть нельзя

Затѣмъ учитель пишетъ примѣръ на вычитаніе трехзначныхъ чиселъ: 628—345.

— Прочитайте. Что сначала будете вычитать? (3 сотни.) Что будете вычитать потомъ? (4 десятка.) Затѣмъ? (5 единицъ.) Какъ же разобьете вы вычитаемое 345? — На 3 сотни, 4 десятка и 5 единицъ. — Сколько сотенъ, десятковъ и единицъ въ уменьшаемомъ? Посмотрите, гдѣ больше десятковъ: въ уменьшаемомъ или вычитаемомъ? Можно ли 4 десятка отнять отъ 2 десятковъ? Что же надо сдѣлать? — Надо одну сотню раздробить въ десятки. — Сколько же сотенъ будетъ тогда въ уменьшаемомъ? — 5 сотенъ. — А сколько десятковъ? — 12 десятковъ. — Скажите, на какія группы надо разложить уменьшаемое?— На 5 сотенъ, 12 десятковъ и 8 единицъ. — А на какія группы разбили вы вычитаемое? — На 3 сотни, 4 десятка и 5 единицъ. — Теперь вычитайте. — Отъ 500 отнять 300 — останется 200; отъ 120 (12 десятковъ) отнять 40 (4 десятка) — останется 80; 200 и 80 будетъ 280; отъ 8 отнять 5 — останется 3; 280 и 3 будетъ 283.

Результатъ записывается послѣ знака равенства: 628—345=283.

Подобнымъ же образомъ выполняется вычитаніе и въ тѣхъ случаяхъ, когда приходится раздроблять десятокъ или и сотню и десятокъ: ученики должны сначала назвать тѣ группы, на которыя надо разбить уменьшаемое (вычитаемое всегда разлагается на десятичныя группы). и потомъ уже вычитать. Примѣры: а) 563—248; уменьшаемое разлагается на 500, 50 и 13; б) 921—687; уменьшаемое разлагается на 800, 110 и 11; в) 705—268; уменьшаемое разлагается на 600, 90 и 15; г) 1000—427; уменьшаемое разлагается на 900, 90 и 10.

Примѣчаніе 1. Тѣмъ ученикамъ, которые затруднялись бы держать въ памяти группы уменьшаемаго, можно позволить записывать ихъ надъ уменьшаемымъ.

Для упражненія въ вычитаніи могутъ служить задачи №№ 48—54 и примѣры №№ 65—84 нашего сборника.

Примѣчаніе 2. Выше мы привели тѣ случаи вычитанія въ предѣлѣ тысячи, которые слѣдуетъ поставить ранѣе общаго случая вычитанія въ этомъ предѣлѣ. Что же касается остальныхъ частныхъ случаевъ, какъ-то вычитанія изъ трехзначнаго числа чиселъ двузначнаго и однозначнаго, мы не считаемъ нужнымъ останавливаться на нихъ особо: вычитаніе выполняется здѣсь примѣненіемъ уже выведеннаго общаго пріема.

Для упражненія въ вычитаніи на счетахъ могутъ служить примѣры №№ 55—60 нашего сборника, назначенные для рѣшенія учениками вмѣстѣ съ учителемъ, и №№ 85—124, которые ученики рѣшаютъ во время самостоятельныхъ занятій.

40. Вычитаніе дробей. Для ознакомленія съ вычитаніемъ дробей служатъ задачи и примѣры нашего сборника подъ №№ 61—69 и №№ 125—127. Вычитаніе дробей раполагается въ такомъ порядкѣ.

Вначалѣ поставлено вычитаніе одинаковыхъ долей.

— Хозяинъ даетъ двумъ лошадямъ $^7/_8$ мѣры овса въ день; одной изъ нихъ онъ даетъ $^3/_8$ мѣры. Сколько овса приходится другой лошади? (Задачи № 61.) Что надо сдѣлать, чтобы узнать это?

— Надо отъ $^7/_8$ отнять $^3/_8$.

— Запишите это.

Является запись $^7/_8 - ^3/_8$

— Положите $^7/_8$ на дробныхъ счетахъ (отмѣтьте на чертежѣ). Отнимите отсюда $^3/_8$. Сколько осталось? Запишите. Чѣмъ можно замѣнить $^4/_8$ (во что можно превратить $^4/_8$?) Запишите. ($^7/_8 - ^3/_8 = ^4/_8 = ^1/_2$.) Сколько же овса приходится другой лошади?

Въ слѣдующей задачѣ (№ 62) уменьшаемымъ служитъ цѣлое съ дробью: $2^3/_4 - ^1/_4 = 2^2/_4 = 2^1/_2$. Далѣе (задача № 63) и уменьшаемое и вычитаемое выражены цѣлыми числами вмѣстѣ съ дробями: $10^5/_8 - 8^3/_8 = 2^2/_8 = 2^1/_4$.

Затѣмъ идетъ вычитаніе дроби изъ цѣлаго числа

— Отъ доски длиною въ 3 аршина отпилили конецъ въ $^5/_8$ аршина. Какой длины получилась доска? (Задача № 64.) Что надо сдѣлать, чтобы узнать это? Запишите. ($3 - ^5/_8$.) Какъ отнимете вы $^5/_8$ отъ 3-хъ?

Если ученики не дадутъ надлежащаго отвѣта, ихъ можно навести на него вычитаніемъ единицъ изъ круглыхъ десятковъ.

— Какъ станете отнимать 6 отъ 80-ти? — Мы разложимъ 80 на 70 и 10 и вычтемъ 6 изъ 10-ти. — Сколько десятковъ въ 80-ти? Что сдѣлали вы съ однимъ изъ этихъ десятковъ? — Мы раздробили одинъ десятокъ въ единицы. — Какъ же станете отнимать $^5/_8$ отъ 3-хъ?

— Мы разобьемъ одну единицу въ восьмыя.

— Какъ же разложимъ мы тогда число 3?

— Мы разложимъ его на 2 и $^8/_8$.

— Вычитайте.

Является запись $3-{}^5/_8=2^8/_8-{}^5/_8=2^3/_8$.

Въ слѣдующей задачѣ (№ 65) изъ цѣлаго числа надо вычесть цѣлое съ дробью: $10-4^1/_2=9^2/_2-4^1/_2=5^1/_2$.

Послѣ этого идетъ вычитаніе разныхъ долей.

— У хозяйки было $^1/_2$ пуда муки; $^1/_8$ пуда она израсходовала. Сколько муки у нея осталось? (Задача № 66.) Что надо сдѣлать, чтобы узнать это? Запишите. ($^1/_2-{}^1/_8$.) Положите $^1/_2$ на дробныхъ счетахъ. Сколько надо отсюда отнять? Не догадаетесь ли, на какой проволокѣ надо положить $^1/_2$, чтобы можно было отнять отъ нея $^1/_8$?— На той проволокѣ, гдѣ восьмыя.— Какъ же положить на этой проволокѣ $^1/_2$?— Надо положить $^4/_8$: это все равно, что $^1/_2$.— Положите. (Ученикъ кладетъ $^4/_8$.) Теперь отнимите $^1/_8$. Сколько осталось? Запишите. ($^1/_2-{}^1/_8=$ $=^4/_8-{}^1/_8=^3/_8$.) Чтобы изъ $^1/_2$ вычесть $^1/_8$, мы положили $^1/_2$ на той проволокѣ, гдѣ находятся восьмыя, положили вмѣсто половины $^4/_8$. Какъ сказать: что сдѣлали мы съ $^1/_2$?—Мы раздробили $^1/_2$ въ восьмыя.—Отъ $^1/_2$ отнимите $^1/_4$. Какъ станете вычитать? — Мы раздробимъ $^1/_2$ въ четверти: $^1/_2-{}^1/_4=^2/_4-{}^1/_4=^1/_4$.—Отъ $^1/_4$ отнимите $^1/_8$. Какъ станете вычитать?

Упражненіе № 67 отличается отъ предыдущаго тѣмъ, что здѣсь, кромѣ одной доли, появляются нѣсколько долей: $^3/_4-{}^5/_8=^6/_8-{}^5/_8=^1/_8$.

Слѣдующія два упражненія содержатъ вычитаніе цѣлаго съ дробью изъ цѣлаго съ дробью, сначала въ тѣхъ случаяхъ, когда дробь уменьшаемаго болѣе дроби вычитаемаго: $4^1/_2-3^3/_8=4^4/_8-3^3/_8=1^1/_8$; потомъ — когда первая меньше послѣдней: $8^1/_2-2^7/_8=8^4/_8-2^7/_8=$ $=7^{12}/_8-2^7/_8=5^5/_8$.

Примѣры №№ 125—127 могутъ быть рѣшены учениками во время самостоятельныхъ занятій.

41. Умноженіе. Въ предѣлѣ тысячи могутъ быть такіе случаи умноженія: а) умноженіе двузначнаго числа на однозначное (46×7) и обратно (6×54), когда произведеніе болѣе ста; б) умноженіе трехзначнаго числа на однозначное и наоборотъ (264×3; 4×132); в) умноженіе двузначнаго числа на двузначное (26×34).

Упражненія въ умноженіи мы располагаемъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

1. Умноженіе круглыхъ сотенъ на однозначное число (№ 70); оно должно предшествовать общему случаю умноженія трехзначнаго числа на однозначное. Здѣсь требуется только распространеніе на сотни таблицы умноженія (въ предѣлѣ десяти); 200×4; 2 повторить 4 раза — будетъ 8; 2 сотни повторить 4 раза, будетъ 8 сотенъ: $200\times4=800$.

2. Умноженіе круглыхъ десятковъ на однозначное число (№ 71): оно должно предшествовать общему случаю умноженія двузначнаго числа на однозначное, оно необходимо и для умноженія числа трехзначнаго. Отысканіе произведенія требуетъ здѣсь распространенія на десятки таблицы умноженія и превращенія десятковъ въ сотни; 30×7; 3 умножить на 7—будетъ 21, 3 десятка умножить на 7—получится 21 десятокъ, что составляетъ 2 сотни и 1 десятокъ, или 210; $30 \times 7 = 210$.

3. Умноженіе однозначнаго числа на круглые десятки (№ 72): оно должно быть разсмотрѣно ранѣе общаго случая умноженія однозначнаго числа на двузначное; оно необходимо и для умноженія однозначнаго числа на трехзначное. Здѣсь надо вспомнить пріемъ умноженія на круглые десятки, выведенный въ § 30 главы IV, и умноженіе числа (двузначнаго) на 10 (конецъ § 36 настоящей главы): для того, чтобы умножить 3 на 40, умножаемъ 3 на 4 и затѣмъ 12 на 10 (или: умножаемъ 3 на 10 и потомъ 30 на 4).

4. Умноженіе однозначнаго числа на круглыя сотни (№ 73): оно должно быть разсмотрѣно ранѣе общаго случая умноженія однозначнаго числа на трехзначное. Это умноженіе можетъ быть сдѣлано по сходству (по аналогіи) съ умноженіемъ на круглые десятки: для того, чтобы умножить 2 на 300 умножаемъ 2 на 3 и потомъ 6 на 100 (умноженіе на 100 — см. конецъ § 36 настоящей главы). Впрочемъ, пріемъ такого умноженія можетъ быть выведенъ здѣсь подобно тому, какъ это сдѣлано въ § 30 главы IV: для того, чтобы набрать 300 двоекъ, мы можемъ взять 100 двоекъ, еще 100 двоекъ и еще 100 двоекъ, т.-е. умножить 2 на 100 и потомъ 200 на 3. Иначе: можемъ соединить 300 двоекъ въ группы по 3 двойки; такихъ группъ будетъ 100; въ этомъ послѣднемъ ученики могутъ убѣдиться, представляя себѣ всѣ 300 двоекъ расположенными въ 3 одинаковыхъ столбца (нѣтъ нужды въ дѣйствительности писать въ каждомъ столбцѣ всѣ 100 двоекъ: достаточно только начать каждый столбецъ и сказать ученикамъ о томъ, сколько въ немъ должно быть двоекъ); для вычисленія каждой группы (суммы двоекъ, находящихся въ одной строкѣ) надо 2 повторить 3 раза, а для отысканія суммы всѣхъ группъ — полученное число 6 умножить на 100.

5. Умноженіе двузначнаго числа на однозначное (№ 74) и обратно (№ 75), когда произведеніе болѣе ста. Пріемы такого умноженія ученикамъ уже извѣстны, выполненіе дѣйствія подготовлено предыдущими упражненіями; 27×6; 20 умножить на 6 — будетъ 120, 7 на 6 — 42: 120 и 42 — будетъ 162; 7×52; 7 умножить на 50 — будетъ 350, 7 на 2 — 14; 350 и 14 — будетъ 364.

Примѣры №№ 128—139, содержащіе приведенные выше случаи умноженія, могутъ быть рѣшены учениками во время самостоятельныхъ занятій.

6. Умноженіе трехзначнаго числа на однозначное. Къ пріему такого умноженія ученики легко переходятъ отъ знакомаго имъ пріема умноженія двухзначнаго числа на однозначное.

Учитель пишетъ на классной доскѣ примѣръ 43×2.

— Прочтите. Сколько получится? Какъ умножали?

— 40 умножить на 2—будетъ 80; 3 умножить на 2 — получится 6; 80 и 6 будетъ 86.

— Изъ сколькихъ десятковъ и единицъ состоитъ число 43? Что умножали вы сначала? Что умножали потомъ?

Затѣмъ дается примѣръ 234×2.

— Прочитайте. Изъ чего состоитъ число 234? Когда мы говоримъ, изъ сколькихъ сотенъ, десятковъ и единицъ состоитъ число, что дѣлаемъ мы съ этимъ числомъ?

— Мы разбиваемъ это число на десятичныя группы: на сотни, десятки и единицы.

— Вотъ вы разбили 234 на десятичныя группы. Какъ же станете умножать его на 2?

— Сначала умножимъ сотни, потомъ десятки и единицы: 200 умножить на 2 — будетъ 400; 30 умножить на 2, получится 60; 400 и 60 будетъ 460; 4 умножить на 2 — получится 8; 460 и 8 будетъ 468.

— Найденное число 468 записывается послѣ знака равенства: 234×2=468.

Для перваго примѣра мы взяли такой случай умноженія, когда дѣйствіе совершается безъ превращенія десятковъ и единицъ. Потомъ выведенный пріемъ примѣняется къ такимъ случаямъ, въ которыхъ произведеніе десятковъ и единицъ болѣе 9-ти: 287×3; 200 умножить на 3 — будетъ 600; 80 на 3 — 240; 600 и 240 будетъ 840; 7 на 3 — 21; 840 и 21 — будетъ 861.

Упражненія въ умноженіи трехзначнаго числа на однозначное помѣщены въ № 76 нашего сборника.

Здѣсь можно сообщить дѣтямъ названія чиселъ данныхъ и искомаго: то число, которое мы множимъ, называется «множимое число», или просто *множимое;* то число, на которое множимъ, — *множитель;* число, которое получается отъ умноженія, — *произведеніе.* Не лишне остановиться нѣсколько на разъясненіи значенія множителя: множитель

показываетъ, сколько разъ множимое берется слагаемымъ. Для этой цѣли могутъ служить упражненія, состоящія въ переходѣ отъ сложенія къ умноженію и обратно. Учитель напишетъ напр. 24+24+24+24+24; ученики прочитаютъ сначала такъ: къ 24-мъ прибавить 24, еще прибавить 24 и т. д.; потомъ: 24 повторить 5 разъ, 24 умножить на 5.— Гдѣ же здѣсь множитель? Какъ найти его?— Надо сосчитать, сколько слагаемыхъ. — Запишите эту строчку короче. Напишите, сколько получится. А какъ назвать каждое изъ слагаемыхъ? — Множимое. — Какъ назвать ихъ сумму? — Произведеніе. Учитель напишетъ напр. 54×7. — Прочитайте. Сколько получится? Запишите. Какъ назовете вы число 54? 7? 378? Какъ написать это безъ знака умноженія? Сколько разъ надо написать число 54? Почему надо написать его 7 разъ? А если бы множитель былъ 9, 13, тогда сколько разъ написали бы вы число 54? Какъ назовете вы теперь это число? — Слагаемое. — Какъ назовете теперь произведеніе 378? — Сумма.

7. Умноженіе двузначнаго числа на двузначное. Общій случай такого умноженія слѣдуетъ подготовить умноженіемъ двузначнаго числа на круглые десятки (№ 77). Ученики уже умножали однозначное число на круглые десятки. Здѣсь надо только примѣнить пріемъ такого умноженія къ двузначному множимому: чтобы умножить 24 на 30, умножаемъ 24 на 3 и потомъ 72 на 10. Ученики уже умножали однозначное число на двузначное, и пріемъ умноженія на такого множителя имъ извѣстенъ: для того, чтобы умножить на 34, умножаемъ сначала на 30, потомъ на 4. Здѣсь этотъ пріемъ примѣняется къ двузначному множимому (№№ 78 и 79): чтобы умножить 26 на 34, умножаемъ 26 сначала на 30, получаемъ 780 (20 на 3—60; 6 на 3—18; 60 и 18—78; 78 на 10 — 780); потомъ на 4, имѣемъ 104; 780 и 104 будетъ 884.

8. Умноженіе однозначнаго числа на трехзначное (№ 80). Пріемъ такого умноженія достаточно подготовленъ умноженіемъ на двузначное число: для того, чтобы умножить какое-нибудь число, напр. на 4, на 23 (для того, чтобы повторить 23 раза число 4, чтобы набрать 23 четверки), мы умножаемъ его на 20 (повторяемъ 20 разъ, беремъ 20 четверокъ), потомъ на 3 (повторяемъ 3 раза, беремъ 3 четверки); чтобы умножить какое-нибудь число, напр. 3, на 327, умножаемъ его на 300 (беремъ 300 троекъ), потомъ на 20 (беремъ 20 троекъ) и затѣмъ на 7 (7 троекъ).

Примѣры №№ 140—155 могутъ быть рѣшены учениками во время самостоятельныхъ занятій.

42. Умноженіе дробей. Умноженіе дробей располагаемъ мы въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) умноженіе дроби и цѣлаго съ дробью на цѣлое число; 2) отысканіе частей числа (цѣлаго), соединяемое также съ повтореніемъ числа нѣсколько разъ.

1) Умноженіе дроби на цѣлое число.

— Лошади даютъ въ день $^3/_8$ мѣры овса. Сколько овса выйдетъ въ недѣлю? (Зад. № 81.) Что надо сдѣлать, чтобы узнать это?

— Надо $^3/_8$ повторить 7 разъ. Надо $^3/_8$ умножить на 7. (Запись $^3/_8 \times 7$.)

— Сколько восьмушекъ овса выходитъ въ день? Сколько восьмушекъ выйдетъ въ недѣлю? Запишите. ($^3/_8 \times 7 = {}^{21}/_8 = 2^5/_8$.)

Мы приводимъ здѣсь учениковъ къ искомому результату, сосредоточивая вниманіе дѣтей на числѣ долей и заставляя смотрѣть на знаменателя какъ на наименованіе (3 восьмушки). Къ тому же самому можно прійти, сводя умноженіе къ знакомому уже дѣтямъ сложенію: умножить $^3/_8$ на 7 значитъ къ $^3/_8$ прибавить $^3/_8$, еще прибавить $^3/_8$ и т. д.: $^3/_8 \times 7 = {}^3/_8 + {}^3/_8 + {}^3/_8 + {}^3/_8 + {}^3/_8 + {}^3/_8 + {}^3/_8$; чтобы сложить эти дроби, мы должны высчитать, сколько всего будетъ восьмыхъ долей; но такъ какъ въ каждомъ слагаемомъ долей поровну, по 3, а всѣхъ слагаемыхъ 7, то мы узнаемъ, сколько будетъ всѣхъ долей, умноживши 3 на 7.

При умноженіи цѣлаго съ дробью на цѣлое число (№ 82) ученики будутъ цѣлое и дробь умножать отдѣльно: $9^3/_4 \times 5 = 45^{15}/_4 = 48^3/_4$.

2) Отысканіе частей числа есть не что иное, какъ умноженіе на дробь: найти $^3/_4$ числа 24 — это все равно, что 24 умножить на $^3/_4$. (Часть I, § 38.) Но въ элементарномъ курсѣ дробей не должно отысканіе частей называть умноженіемъ и, слѣдовательно, въ относящихся сюда записяхъ не надо употреблять знака этого дѣйствія.

Съ отысканіемъ частей цѣлаго числа мы уже раньше познакомили учениковъ (гл. IV, § 32). Здѣсь придется только вспомнить объ немъ.

— Пудъ муки стоитъ 72 копейки. Сколько надо заплатить за $^1/_4$ пуда этой муки? (Задача № 83.) Какъ это узнать?

— Надо 72 раздѣлить на 4 — будетъ 18.

Запись можетъ быть такова: $^1/_4\ 72 = 18$.

— А сколько придется заплатить за $^3/_4$ пуда этой муки? Какъ это узнать?

— Надо 18 умножить на 3—получится 54.

Запись: $^3/_4\ 72 = 54$; она читается: $^3/_4$ 72-хъ ($^3/_4$ числа 72) равны 54.

— Какъ найти $^7/_8$ сорока?

— Сначала надо найти $^1/_8$ сорока: 40 раздѣлить на 8 — будетъ 5; потомъ повторить 5 семь разъ, получится 35; $^7/_8\ 40 = 35$.

Запись: $^1/_8\ 40 = 5$.

$^7/_8\ 40 = 35$.

Въ слѣдующихъ за тѣмъ упражненіяхъ (№№ 84—87) отысканіе частей числа соединяется съ повтореніемъ этого числа нѣсколько разъ (умноженіе на цѣлое съ дробью).

— Хозяйка купила $2^3/_8$ фунта коровьяго масла, по 32 коп. за фунтъ. Сколько заплатила она за масло? Какъ станете рѣшать эту задачу?

— Сначала надо узнать, сколько стоятъ 2 фунта масла. Для этого должно 32 умножить на 2; получится 64. Потомъ узнаемъ, сколько приходится за $^1/_8$ фунта; для этого 32 раздѣлимъ на 8, будетъ 4. Затѣмъ узнаемъ, сколько придется заплатить за $^3/_8$ фунта; 4 умножить на 3— будетъ 12. Потомъ узнаемъ, сколько заплатила хозяйка за все масло: къ 64 прибавить 12, получится 76.

Относящаяся сюда запись, появляющаяся по мѣрѣ рѣшенія задачи, можетъ быть такая:

1) $32\times2=64$; 64 коп.	или:	1) $32\times2=64$; 64 коп.
2) $32:8=4$; 4 коп.		2) $^1/_8\ 32=4$; 4 коп.
3) $4\times3=12$; 12 коп.		3) $^3/_8\ 32=12$; 12 коп.
4) $64+12=76$; 76 коп.		4) $64+12=76$; 76 коп.

Примѣры №№ 156—166 назначены для рѣшенія учениками во время самостоятельныхъ занятій.

43. Дѣленіе. Въ предѣлѣ тысячи могутъ быть слѣдующіе случаи дѣленія:

а) Дѣленіе трехзначнаго числа на однозначное, при чемъ въ частномъ получается число трехзначное (952 : 4) и двузначное (448 : 7). Въ первомъ изъ этихъ примѣровъ мы разлагаемъ дѣлимое на 800, 120 и 32; во второмъ — на 420 и 28. Какъ видимъ, дѣленію трехзначнаго числа на однозначное должны предшествовать такія дѣленія въ предѣлѣ тысячи: дѣленіе круглыхъ сотенъ и дѣленіе круглыхъ десятковъ на однозначное число (800 : 4, 120 : 4, 420 : 7).

б) Дѣленіе трехзначнаго числа на двузначное при однозначномъ частномъ (288 : 36).

в) Дѣленіе трехзначнаго числа на трехзначное (972 : 243).

Въ послѣднихъ двухъ случаяхъ частное угадывается дѣленіемъ десятковъ дѣлимаго на десятки дѣлителя (28 : 3) или сотенъ дѣлимаго на сотни дѣлителя (9 : 2) и затѣмъ провѣряется. Непосредственно передъ такими примѣрами дѣленія слѣдуетъ поставить дѣленіе десятковъ на десятки (270 : 30) и сотенъ на сотни (800 : 200).

г) Дѣленіе трехзначнаго числа на двузначное при двузначномъ частномъ (782 : 23; 945 : 35). Это дѣленіе сводится къ дѣленіямъ двузначаго числа на двузначное и трехзначнаго на двузначное (69 дес. : 23 и 92 : 23; 70 дес. : 35 и 245 : 35).

Мы располагаемъ всѣ случаи дѣленія въ слѣдующемъ порядкѣ:

1) Дѣленіе сотенъ на однозначное число (№ 88). Оно требуетъ распространенія на сотни таблицы дѣленія (въ предѣлѣ десяти): 6 единицъ раздѣлить на 2 равныя части, получатся 3 единицы; 6 сотенъ раздѣлить на 2 равныя части, получатся 3 сотни: 600 : 2 = 300. Но мы знаемъ: сколькимъ единицамъ равна половина числа 600, столько же разъ 2 содержится въ числѣ 600; слѣдовательно, если 600 раздѣлить на двойки, получится 300 (двоекъ); такъ что вообще 600 : 2 = 300.

2) Дѣленіе десятковъ на однозначное число (№ 89). Оно выполняется подобно предыдущему; напр. для раздѣленія 180 на 3 разсуждаемъ: 180 — это 18 десятковъ; 18 раздѣлить на 3 — будетъ 6; 18 десятковъ раздѣлить на 3, получится 6 десятковъ: 180 : 3 = 60.

3) Дѣленіе десятковъ на двузначное число (№ 90). Выполняется оно подобно предыдущему; чтобы раздѣлить 960 на 24, разсуждаемъ: 960 — это 96 десятковъ; 96 раздѣлить на 24 — будетъ 4; 96 десятковъ раздѣлить на 24, получится 4 десятка: 960 : 24 = 40.

№№ 167—174 нашего сборника, относящіеся къ разсмотрѣннымъ случаямъ дѣленія, представляютъ матеріалъ для самостоятельныхъ упражненій.

4) Дѣленіе трехзначнаго числа на однозначное (№ 91). Къ пріему такого дѣленія ученики легко переходятъ отъ знакомаго имъ пріема дѣленія двузначнаго числа на однозначное.

Учитель пишетъ на классной доскѣ примѣръ 86 : 2.

— Прочитайте. Сколько получится? Какъ дѣлили?

— 80 раздѣлить на 2 — будетъ 40; 6 раздѣлить на 2 — получится 3; 40 и 3 будетъ 43.

— Изъ сколькихъ десятковъ и единицъ состоитъ число 86? Что дѣлили вы сначала? Что дѣлили потомъ?

Затѣмъ дается примѣръ 468 : 2.

— Прочитайте. Изъ чего состоитъ число 468? Что дѣлаемъ мы съ числомъ, когда говоримъ, сколько въ немъ сотенъ, десятковъ и единицъ? Вотъ вы разбили 468 на десятичныя группы. Какъ станете дѣлить его на 2?

— Сначала раздѣлимъ сотни, потомъ десятки и единицы: 400 раздѣлить на 2 — будетъ 200; 60 раздѣлить на 2 — получится 30; 200 и 30 — будетъ 230; 8 раздѣлить на 2 — получится 4; 230 и 4 — будетъ 234.

Найденное число 234 записывается послѣ знака равенства: 468 : 2= =234.

Здѣсь можно сообщить дѣтямъ названія чиселъ данныхъ и искомаго: то число, которое мы дѣлимъ, называется «дѣлимое число», или просто *дѣлимое*; то число, на которое мы дѣлимъ, — *дѣлитель*.—Что мы узнаемъ, когда раздѣлимъ 468 на 2? — Мы узнаемъ половину числа 468.— А если бы мы раздѣлили 468 на 3, что тогда нашли бы?— Тогда нашли бы третью часть числа 468.—Число, которое получается отъ дѣленія, есть часть дѣлимаго (половина, третья часть и т. д.); поэтому оно называется *частное*. — Что еще узнаемъ мы, когда раздѣлимъ 468 на 2?—Еще узнаемъ мы, сколько разъ 2 содержится въ числѣ 468.— Что же еще показываетъ частное? — Оно показываетъ еще, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ. Затѣмъ дается примѣръ, въ родѣ 968 : 3, для того, чтобы напомнить ученикамъ о томъ, что при дѣленіи иногда получается *остатокъ*.

Мы разсмотрѣли дѣленіе трехзначнаго числа на однозначное, когда дѣлимое приходится разбивать на десятичныя группы, безъ раздробленія сотенъ и десятковъ. Подолѣе слѣдуетъ остановиться на дѣленіи, требующемъ раздробленія сотенъ и десятковъ. Къ нему также надо подойти отъ соотвѣтствующаго случая дѣленія двузначнаго числа на однозначное.

— 87 раздѣлите на 3. Сколько получится? Какъ дѣлили?

— Мы разложили 87 на двѣ группы: 60 и 27; 60 раздѣлить на 3 — будетъ 20; 27 раздѣлить на 3 — получится 9; 20 и 9 будетъ 29.

— Почему разбили вы 87 на 60 и 27, и не на 80 и 7?

— Потому что 8 десятковъ не дѣлятся на 3: изъ нихъ — самое большее — на 3 дѣлятся 6 десятковъ[1]); остается 2 десятка; ихъ надо раздробить въ единицы; всего будетъ 27 единицъ.

Учитель пишетъ на классной доскѣ 741 : 3.

— Прочитайте. Какъ разобьете вы число 741 для того, чтобы раздѣлить его на 3? Какая будетъ первая группа? (6 сотенъ, 600.) Почему? Что же сдѣлаете вы съ седьмой сотней? Сколько будетъ тогда всѣхъ десятковъ? Изъ 14 десятковъ — самое большее — сколько десятковъ раздѣлятся на 3? Какая же будетъ вторая группа? (12 десятковъ, 120.) А третья? (21.) Какъ составилась третья группа? Повторите, на какія группы разбили вы дѣлимое. Теперь дѣлите. — 600 раздѣлить на 3 — получится 200; 120 раздѣлить на 3 — будетъ 40; 200 и 40 будетъ 240; 21 раздѣлить на 3 — получится 7; 240 и 7 будетъ 247.

Найденное частное записывается послѣ знака равенства: 741 : 3= =247.

Еще примѣръ — 376 : 8.

— Какъ разобьете вы число 376 для того, чтобы раздѣлить его на 8? Получится ли въ частномъ хоть одна сотня? Почему нѣтъ? — Потому что въ дѣлимомъ только 3 сотни.— Да, для того, чтобы въ каждой части

---

[1]) Въ такихъ случаяхъ, какъ 52 : 2, 64 : 4, 75 : 5, на вопросъ: для чего разложили вы дѣлимое на 40 и 12, на 40 и 24, на 50 и 25, отвѣтъ можетъ быть таковъ: для того, чтобы сразу получить всѣ единицы (частнаго).

получилась хоть одна сотня, надо, чтобы въ дѣлимомъ ихъ было, по крайней мѣрѣ, 8. Что же сдѣлаете вы съ 3 сотнями? Сколько будетъ всѣхъ десятковъ въ дѣлимомъ? Изъ 37 десятковъ — самое большее — сколько десятковъ дѣлится на 8? Какая же будетъ первая группа? (32 десятка, 320.) А вторая? (56.)

На первыхъ порахъ можно надписывать надъ дѣлимымъ тѣ группы, на которыя оно разбивается. То же самое можно и впослѣдствіи позволить тѣмъ ученикамъ, для которыхъ оказалось бы труднымъ держать эти группы въ памяти.

5) Дѣленіе трехзначнаго числа на двузначное при однозначномъ частномъ (№ 93). Оно подготовляется дѣленіемъ десятковъ на десятки (№ 92), которое требуетъ лишь распространенія на десятки таблицы дѣленія: 3 содержится въ 24 8 разъ; 3 десятка содержатся въ 24 десяткахъ тоже 8 разъ: 240 : 30 = 8[1]).

(Здѣсь же, за одно, можно разсмотрѣть и тѣ случаи, когда частное будетъ двузначное число: 68 раздѣлить на 4, получится 17; слѣдовательно, 680 : 40 = 17; 100 раздѣлить на 4 — будетъ 25; 100 десятковъ раздѣлить на 4 десятка, будетъ тоже 25; слѣдовательно, 1000 : 40 = 25).

Приступая къ дѣленію трехзначнаго числа на двузначное, можно сначала заставить учениковъ найти частное вычитаніемъ и умноженіемъ, какъ они уже дѣлали это при дѣленіи двузначнаго числа на двузначное (гл. IV, § 31); чтобы узнать, сколько фунтовъ выйдетъ изъ 288 лотовъ, зная, что въ фунтѣ 32 лота, ученики отнимаютъ по 32 отъ 288 и получаемыхъ остатковъ до тѣхъ поръ, пока ничего не останется, и считаютъ, сколько разъ отнимали; или набираютъ по 32 (повторяютъ 32 нѣсколько разъ), пока не получится 288.

Указавъ на то, что отыскивать частное этими пріемами долго, учитель наводитъ дѣтей на угадываніе цифры частнаго, взявши для этого уже знакомый дѣтямъ случай дѣленія двузначнаго числа на двузначное.

— Раздѣлите 87 на 29. Какъ прикинуть, сколько разъ 29 содержится въ 87?

---

[1]) Если бъ мы хотѣли отдѣльно сдѣлать выводъ примѣнительно къ дѣленію на равныя части, то могли бы разсуждать такъ: для того, чтобы раздѣлить 240 на 30 равныхъ частей, раздѣлимъ 240 на 3 равныя части, а полученное число 80 раздѣлимъ на 10 равныхъ частей (или сначала на 10, потомъ на 3).

— Надо прикинуть, сколько разъ 2 десятка содержатся въ 8 десяткахъ: 4 раза. 29 умножить на 4 — будетъ 116; 4 раза — много; возьмемъ 3; 29 умножить на 3 — будетъ 87; 29 содержится въ 87-ми 3 раза.

— Вы прикидывали, сколько разъ десятки дѣлителя содержатся въ десяткахъ дѣлимаго (задавались десятками дѣлителя въ десяткахъ дѣлимаго). Сколько десятковъ въ 32-хъ? Сколько всѣхъ десятковъ въ числѣ 288, если сотни раздробить въ десятки? Какъ же узнать, сколько разъ 32 содержатся въ 288?

— Надо прикинуть, сколько разъ 3 десятка содержатся въ 28 десяткахъ (надо задаться 3 десятками въ 28 десяткахъ): 9 разъ; 32 умножить на 9, получится 288: 288 раздѣлить на 32 — будетъ 9.

Если въ дѣлителѣ много единицъ, напр., если дѣлитель будетъ 29, то онъ ближе подходитъ не къ 2 десяткамъ, а къ 3 десяткамъ, и мы скорѣе найдемъ частное, если зададимся въ десяткахъ дѣлимаго 3 десятками; полученное число будетъ или искомое частное, или меньше его, тогда какъ въ первомъ случаѣ оно будетъ или искомое частное, или же больше его.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ — чаще всего это бываетъ тогда, когда дѣлителемъ служитъ число второго десятка, напр. 16 — первоначальную цифру частнаго, найденную тѣмъ или инымъ пріемомъ, приходится измѣнять (понижать или повышать) не одинъ разъ. Мы совѣтовали бы пріучить дѣтей возможно быстро умножать (въ умѣ) числа второго десятка на каждое однозначное число, при чемъ было бы весьма желательно, чтобы ученики знали на память, по крайней мѣрѣ, тѣ изъ этихъ произведеній, которыя заключаются въ предѣлѣ сотни, напр. $13 \times 6 = 78$, $14 \times 7 = 98$ и т. д.; въ своемъ мѣстѣ мы привели упражненія, ведущія къ этой послѣдней цѣли. Учитель можетъ достигнуть этого, удѣляя въ теченіе нѣкотораго времени по нѣскольку минутъ отъ каждаго урока на упражненія въ такомъ умноженіи. Разъ это сдѣлано, ученики въ соотвѣтствующихъ случаяхъ дѣленія могутъ находить частное такъ: пусть надо 128 раздѣлить на 16; зная на память, что 6 разъ 16—96, ученикъ отниметъ 96 отъ 128 и раздѣлитъ 32 на 16; искомое частное $6+2=8$. Еще примѣръ: 136 раздѣлить на 17; 5 разъ 17—85; остается 51; 51 раздѣлить на 17 — будетъ 3; 5 и 3 — всего 8.

6) Дѣленіе трехзначнаго числа на трехзначное (№ 95). Оно подготовляется дѣленіемъ круглыхъ сотенъ (№ 94), которое требуетъ лишь распространенія на сотни таблицы дѣленія (въ предѣлѣ десяти): 3 содержится въ 9-ти

3 раза, 3 сотни содержатся въ 9 сотняхъ тоже 3 раза: 900 : 300 = 3[1]).

При дѣленіи трехзначнаго числа на трехзначное ученики, подобно тому, какъ они дѣлали это въ предыдущемъ случаѣ, станутъ угадывать частное дѣленіемъ сотенъ дѣлимаго на сотни дѣлителя; 952 : 238 — 2 сотни содержатся въ 9 сотняхъ 4 раза; посмотримъ, не будетъ ли и нашъ дѣлитель содержаться въ дѣлимомъ также 4 раза; для этого умножимъ 238 на 4 и полученное произведеніе сравнимъ съ дѣлимымъ.

Мы совѣтовали бы нѣсколько видоизмѣнить пріемъ такого дѣленія: пріучить дѣтей задаваться не одной, но двумя цифрами дѣлителя. Такъ, чтобы раздѣлить 952 на 238, пусть ученики соображаютъ: въ дѣлителѣ 23 десятка, въ дѣлимомъ 95 десятковъ; узнаемъ, сколько разъ 23 содержится въ 95: 2 въ 9-ти содержится 4 раза; посмотримъ, содержится ли 23 въ 95-ти тоже 4 раза: 23 × 4 = 92; 23 десятка содержатся въ 95-ти десяткахъ 4 раза; теперь посмотримъ, будетъ ли 238 въ 952 содержаться 4 раза; 23 десятка мы уже умножали на 4; получилось 92 десятка, или 920; умножимъ теперь 8 на 4, будетъ 32; 920 и 32 — 952.

Какъ видимъ изъ приведеннаго примѣра, дѣло сводится опять къ тому, что мы задаемся старшей цифрой дѣлителя (2) въ старшей цифрѣ дѣлимаго (9); различіе состоитъ лишь въ томъ, что мы дѣлаемъ сначала предварительную повѣрку испытуемой цифры (4), умножая на нее лишь двѣ старшія цифры дѣлителя (23). Такая предварительная повѣрка имѣетъ практическое значеніе при дѣленіи многозначныхъ чиселъ, почему мы и считаемъ полезнымъ пріучить къ ней дѣтей возможно ранѣе: эта повѣрка часто укажетъ намъ непригодность испытуемой цифры, избавляя отъ необходимости умножать на нее (письменно) всего дѣлителя. Она сохраняетъ это значеніе и въ предѣлѣ тысячи, несмотря на устное выполненіе дѣйствій: пусть, напр., надо раздѣлить 936 на 246; задаваясь только одной старшей цифрой дѣлителя, ученики станутъ провѣрять найденную цифру 4, умножая на нее всего дѣлителя: 200 на 4 — 800; 40 на 4 — 160; 800 да 160 — 960; 6 на 4 — 24; 960 да 24 — 984; быть можетъ, нѣкоторые ученики и не станутъ умножать

[1]) Если бъ мы хотѣли отдѣльно сдѣлать выводъ примѣнительно къ дѣленію на части, то могли бы раздѣлить 900 на 3 равныя части, а полученное число 300 на 100 равныхъ частей (или въ обратномъ порядкѣ).

единицъ дѣлителя, замѣтивши, что уже произведеніе его сотенъ и десятковъ на 4 превышаетъ дѣлимое; но въ большинствѣ случаевъ ученики доведутъ умноженіе до конца; причина этого заключается въ томъ, что дѣтямъ трудно въ одно и то же время дѣлать два дѣла: и умножать дѣлителя на испытуемую цифру, и сравнивать съ дѣлимымъ получаемое произведеніе. Между тѣмъ, привыкнувъ задаваться двумя старшими цифрами дѣлителя, ученики прежде всего умножатъ на 4 его сотни и десятки ($24 \times 4 = 96$) и, сравнивъ полученное произведеніе съ соотвѣтственной частью дѣлимаго (93), увидятъ, что испытуемая цифра сильна.

Кромѣ того, если дѣти знаютъ на память заключающіяся въ предѣлѣ сотни произведенія чиселъ второго десятка, то они, задаваясь двумя цифрами, весьма скоро найдутъ частное въ тѣхъ случаяхъ, когда двѣ старшія цифры дѣлителя изображаютъ число второго десятка, какъ, напр., при дѣленіи 865 на 173.

7) Дѣленіе трехзначнаго числа на двузначное при двузначномъ частномъ (№ 96). Оно приводится къ дѣленію двузначнаго числа на двузначное и трехзначнаго на двузначное — случай 5. Изложимъ процессъ такого дѣленія. Пусть надо раздѣлить 782 на 23; въ частномъ ни одной сотни не получится; раздробляемъ 7 сотенъ въ десятки, всѣхъ десятковъ будетъ въ дѣлимомъ 78; 78 десятковъ раздѣлить на 23 — получится 3 десятка, и 9 десятковъ останутся нераздѣленными; раздробляемъ ихъ въ единицы, всѣхъ единицъ въ дѣлимомъ будетъ 92; 92 раздѣлить на 23 — получится 4; 3 десятка и 4 единицы — будетъ 34. Считаемъ полезнымъ требовать отъ учениковъ, чтобы они называли и на первыхъ порахъ записывали надъ дѣлимымъ тѣ группы, на которыя дѣлимое разложено, въ данномъ случаѣ группы 69 десятковъ и 92 единицы. Еще примѣръ: 952 раздѣлить на 17; на 17 дѣлятся 85 десятковъ, которые и составятъ первую группу; вторая группа будетъ 102; 85 десятковъ раздѣлить на 17—получится 5 десятковъ, 102 раздѣлить на 17—будетъ 6; 50 и 6 — 56.

Примѣры №№ 175—210 могутъ быть рѣшены учениками во время самостоятельныхъ занятій.

44. Дѣленіе дробей. Дѣленіе дробей располагаемъ мы въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) дѣленіе дроби и цѣлаго

съ дробью на цѣлое число; 2) отысканіе цѣлаго по его части; 3) дѣленіе по содержанію цѣлыхъ чиселъ (въ случаѣ дробнаго частнаго), дробей и цѣлыхъ съ дробями.

1) Дѣленіе дроби и цѣлаго съ дробью на цѣлое число. Такъ какъ мы разсматриваемъ здѣсь только половины, четверти и восьмыя, то, кромѣ дѣленія, выполняемаго дѣленіемъ числителя ($21^7/_8 : 5 = 20^{15}/_8 : 5 = 4^3/_8$), здѣсь можетъ имѣть мѣсто только дѣленіе на 2 и на 4, выполняемое умноженіемъ знаменателя (раздробленіемъ долей).

— Мать раздѣлила $^1/_2$ пирога между двумя сыновьями поровну. Какую часть пирога получилъ каждый сынъ? (Зад. № 97.) Что надо сдѣлать, чтобы узнать это?

— Надо $^1/_2$ раздѣлить на 2 равныя части, пополамъ.

— Положите $^1/_2$ на дробныхъ счетахъ: положите ее на той проволокѣ, гдѣ можно было бы раздѣлить ее пополамъ. На какой это проволокѣ? Раздѣлите. Что получилось? (Запись $^1/_2 : 2 = ^1/_4$).

Вмѣсто дробныхъ счетовъ можетъ служить чертежъ.

— Двумъ лошадямъ даютъ въ день $^3/_4$ мѣры овса, обѣимъ поровну. По скольку приходится каждой? (№ 100). Что надо сдѣлать, чтобы узнать это? Какъ раздѣлите вы $^3/_4$ пополамъ?

— $^1/_4$ раздѣлить пополамъ — будетъ $^1/_8$; $^3/_4$ раздѣлить пополамъ, получится $^3/_8$. (Запись $^3/_4 : 2 = ^3/_8$).

При дѣленіи цѣлаго съ дробью ученики будутъ дѣлить порознь цѣлое и дробь. Сначала долженъ быть разсмотрѣнъ такой случай, когда цѣлое дѣлится безъ остатка (№ 101. $6^1/_2 : 2 = 3^1/_4$; $12^3/_4 : 2 = 6^3/_8$). Затѣмъ тотъ случай, когда отъ дѣленія цѣлаго числа получается остатокъ (№ 102); здѣсь, кромѣ дѣленія, приходится дѣлать и сложеніе дробей: $9^1/_2 : 4 = 2^1/_4 + ^1/_8 = 2^2/_8 + ^1/_8 = 2^3/_8$.

№№ 211—213 назначены для рѣшенія во время самостоятельныхъ занятій.

2) Отысканіе цѣлаго по его части. Это есть не что иное, какъ дѣленіе на дробь: найти число, $^3/_4$ котораго составляютъ 12, это все равно, что 12 раздѣлить на $^3/_4$ (часть I, § 38). Но въ элементарномъ курсѣ дробей не должно отысканіе цѣлаго по части называть дѣленіемъ и, слѣдовательно, въ относящихся сюда записяхъ не надо употреблять знака дѣленія.

— $^3/_4$ аршина бархату стоятъ 6 руб. Сколько стоитъ аршинъ? (Зад. № 104.)

При рѣшеніи такихъ задачъ ученики должны разсуждать: $^3/_4$ арш. стоятъ 6 руб.; $^1/_4$ арш. стóитъ въ 3 раза меньше (потому что $^1/_4$ втрое меньше, чѣмъ $^3/_4$); чтобы узнать, сколько стоитъ $^1/_4$ арш., надо 6 раздѣлить на 3, будетъ 2; $^1/_4$ арш. стóитъ 2 руб., а (цѣлый) аршинъ стоитъ

въ 4 раза дороже (потому что въ аршинѣ — въ единицѣ — четыре четверти).

Запись рѣшенія подобныхъ задачъ можетъ быть такая:

$^3/_4$ арш. — 6 руб. (это запись условія задачи).

1) $6:3=2$; $^1/_4$ арш. — 2 руб.

2) $2\times4=8$; 1 арш. — 8 руб.

Приведемъ еще рѣшеніе задачи № 108:

— Хозяйка купила $7^5/_8$ фунта рыбы и заплатила за нее 1 р. 22 к. Что стоитъ фунтъ?

Прежде всего узнаемъ, сколько восьмыхъ въ $7^5/_8$ (раздробляемъ $7^5/_8$ въ восьмыя доли): $7^5/_8=^{61}/_8$. Далѣе задача рѣшается попрежнему.

$7^5/_8$ ф.—1 р. 22 к.

1) $^{61}/_8$ ф.—1 р. 22 к.

2) $122:61=2$; $^1/_8$ ф.—2 к.

3) $2\times8=16$; 1 ф. — 16 к.

Записи, подобныя указаннымъ, ученики могутъ дѣлать и при рѣшеніи примѣровъ №№ 214 и 215 (во время самостоятельныхъ занятій):

$^3/_4$—252.

1) $252:3=84$; $^1/_4$—84.

2) $84\times4=336$; $^4/_4$—336.

3) Дѣленіе по содержанію. Для выполненія этого дѣйствія раздробляемъ дѣлимое и дѣлителя въ одинаковыя доли. Такъ, чтобы узнать, сколько разъ $2^5/_8$ содержится въ $47^1/_4$, раздробляемъ то и другое число въ восьмыя доли: $47^1/_4=^{189}/_4=^{378}/_8$; $2^5/_8=^{21}/_8$; $^{21}/_8$ содержится въ $^{378}/_8$ столько разъ, сколько разъ 21 содержится въ 378, т.-е. 18 разъ. Приступая къ упражненіямъ въ такомъ дѣленіи, не лишне повторить обращеніе цѣлаго, дроби и цѣлаго съ дробью въ назначенныя доли: въ половины, четверти, восьмыя (№№ 115—117).

Задачи №№ 118—120 содержатъ случаи дѣленія цѣлыхъ чиселъ. Задачи эти могутъ быть рѣшены такъ.

— Въ мѣрѣ 8 гарнцевъ. Какую часть мѣры составляютъ 5 гарнцевъ?

— Одинъ гарнецъ составляетъ $^1/_8$ мѣры, а 5 гарнцевъ—$^5/_8$ мѣры.

— Торговецъ продаетъ муку по 4 коп. за фунтъ. Сколько муки можно купить у него на 27 коп.?

— На 27 коп. можно купить столько фунтовъ муки, сколько разъ 4 содержится въ 27-ми, т.-е. 6 фунт.; за эти 6 фунтовъ придется заплатить 24 коп.; остается еще 3 коп.; узнаемъ, сколько муки можно купить на 3 коп.: на 1 коп. придется $^1/_4$ фунта, а на 3 коп. — $^3/_4$ фунта; значитъ, на 27 коп. можно купить $6^3/_4$ фунта муки.

Далѣе слѣдуютъ задачи (№№ 121—127), въ которыхъ дѣлителемъ является дробь и цѣлое съ дробью, дѣлимымъ служитъ цѣлое число,

дробь и цѣлое съ дробью. При рѣшеніи этихъ задачъ считаемъ возможнымъ ввести записи, употребляя для нихъ знакъ дѣленія.

— Работница выкашиваетъ въ день $^3/_8$ десятины. Сколько надо работницъ, чтобы выкосить въ день 9 десятинъ? Не могутъ ли сдѣлать это 2 работницы? Почему нѣтъ? — Потому что 2 работницы выкосятъ только $^6/_8$, или $^3/_4$ десятины.—Не сдѣлаютъ ли это 3 работницы? Почему нѣтъ? Сколько же надо работницъ: какъ это сказать? — Работницъ надо столько, сколько разъ $^3/_8$ десятины содержатся въ 9-ти десятинахъ; столько, во сколько разъ 9 десятинъ больше, чѣмъ $^3/_8$ десятины.—Во сколько разъ единица больше, чѣмъ $^1/_8$? Почему?— Потому что въ единицѣ восемь восьмыхъ. — Когда вы говорите, что въ единицѣ восемь восьмыхъ, что тогда дѣлаете вы съ единицей?— Мы раздробляемъ единицу въ восьмыя доли. — Не догадаетесь ли, какъ узнать, во сколько разъ 9 единицъ больше, чѣмъ $^3/_8$?—Надо 9 единицъ раздробить въ восьмыя доли; получится $^{72}/_8$.—Если $^{72}/_8$ мы разложимъ на $^3/_8$: $^{72}/_8 = ^3/_8 + ^3/_8 + ^3/_8 + ^3/_8 + \ldots$, сколько разъ придется намъ написать $^3/_8$? Какъ это узнать?—Надо 72 раздѣлить на 3, получится 24. — Сколько разъ $^3/_8$ содержится въ $^{72}/_8$? Сколько же надо работницъ, чтобы выкосить 9 десятинъ? Когда мы узнаёмъ, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, то какое дѣйствіе мы дѣлаемъ? какимъ знакомъ его обозначаемъ? Чтобы рѣшить нашу задачу, надо было узнать, сколько разъ $^3/_8$ содержится въ 9-ти. Какъ это записать? 9 : $^3/_8$.—Повторите, какъ мы вычисляли.—Мы раздробили 9 единицъ въ восьмыя доли, получили $^{72}/_8$; $^3/_8$ содержатся въ $^{72}/_8$ столько разъ, сколько 3 содержится въ 72; чтобы узнать это, надо 72 раздѣлить на 3; будетъ 24.—Запись 9 : $^3/_8 = ^{72}/_8$: $^3/_8 = 24$. Подобныя же записи ученики могутъ дѣлать во время самостоятельныхъ занятій при рѣшеніи примѣровъ №№ 216—218.

45. Сокращенныя вычисленія. Частные пріемы вычисленія, какъ мы уже говорили выше, имѣютъ извѣстное образовательное и практическое значеніе: содѣйствуя уясненію свойствъ ариѳметическихъ дѣйствій и черезъ это сознательности вычисленія, они изощряютъ наблюдательность и смѣтливость учащихся, заставляя ихъ всматриваться въ данныя числа съ цѣлію подмѣтить такія особенности ихъ, которыя бы позволили возможно быстро найти результатъ. Эти пріемы особенно умѣстны при устныхъ вычисленіяхъ въ такомъ предѣлѣ, какъ тысяча, почему мы и считаемъ полезнымъ познакомить съ ними учениковъ послѣ того, какъ пройдены обычные, или нормальные, пріемы выполненія дѣйствій въ этомъ предѣлѣ: раньше этого — въ предѣлѣ сотни — практическое значеніе этихъ пріемовъ сравнительно невелико; кромѣ того, частные пріемы могутъ имѣть мѣсто лишь послѣ основательнаго усвоенія пріемовъ нор-

мальныхъ. Впрочемъ, съ нѣкоторыми изъ этихъ пріемовъ ученики отчасти уже знакомы. Изъ пріемовъ сокращеннаго вычисленія (часть I, гл. VII) считаемъ нужнымъ показать ученикамъ: 1) пріемъ округленія чиселъ при сложеніи, вычитаніи и умноженіи, 2) пріемъ умноженія и дѣленія на 5 и 25 и 3) пріемъ разложенія множителя и дѣлителя на сомножителей.

1) *Округленіе чиселъ.*

Написавъ на классной доскѣ такія числа, какъ 64, 50, 257, 600, учитель спроситъ учениковъ, изъ чего (изъ какихъ десятичныхъ группъ) состоитъ каждое написанное число, и условится съ учениками называть *круглыми* тѣ числа, которыя состоятъ изъ единицъ одного только разряда: изъ однихъ десятковъ (50), изъ однѣхъ сотенъ (600). Послѣ этого дается рядъ чиселъ, напр. 256, 714, 29, 400, 611, 80, 598, 217, 793, и дѣти должны указать между ними круглыя числа, а потомъ тѣ изъ некруглыхъ, которымъ немного недостаетъ до круглыхъ: 29, 598, 793 (зад. №№ 128 и 129). Затѣмъ учитель сообщаетъ дѣтямъ выраженіе *округлить* число.— Сколько недостаетъ числу 598 до (ближайшаго) круглаго числа? Когда мы прибавимъ 2 къ числу 598, то мы получимъ круглое число 600; изъ числа 598 мы сдѣлали круглое число 600; скажемъ такъ: мы *округлили* число 598. Слѣдуютъ упражненія: ученики округляютъ числа, которыя даетъ имъ учитель (№ 130), а потомъ сами придумываютъ числа, близкія къ круглымъ (которымъ немного недостаетъ до круглыхъ), и округляютъ ихъ (№ 131).

Для вывода пріема округленія чиселъ при сложеніи можетъ быть дана задача въ родѣ № 132.

— Купецъ купилъ на фабрикѣ два куска сукна: за одинъ кусокъ заплатилъ онъ 236 руб., за другой 200 руб. Сколько заплатилъ онъ за оба куска? Какъ это узнать? (236+200=436). Другой разъ купилъ онъ также два куска сукна; за одинъ кусокъ заплатилъ онъ попрежнему 236 руб., а за другой 198 руб. Какъ узнать, сколько заплатилъ онъ за оба куска?

— Надо 236 и 198 сложить.

Выполняется сложеніе обычнымъ пріемомъ; 236+198=434.

— Нельзя ли какъ-нибудь иначе узнать, сколько заплатилъ купецъ второй разъ, если мы уже знаемъ, сколько заплатилъ онъ въ первый разъ?

Быть можетъ, ученики догадаются. Въ противномъ случаѣ учитель наведетъ ихъ на желаемый отвѣтъ, заставивъ сравнить слагаемыя обѣихъ суммъ.

— Сколько платилъ купецъ за одинъ кусокъ сукна въ первый и второй разъ? (По 236 р.). Сколько заплатилъ онъ за другой кусокъ въ первый и второй разъ? (200 р. и 198 р.). Сообразите: который разъ за всю покупку отдалъ онъ денегъ меньше? Почему? На сколько меньше

заплатилъ онъ во второй разъ? Сколько заплатилъ онъ въ первый разъ? Первый разъ заплатилъ онъ 436 р., а второй разъ — на 2 р. меньше. Какъ же узнать, сколько заплатилъ онъ во второй разъ?—Надо отъ 436 отнять 2, получится 434. — Для того, чтобы узнать, сколько денегъ заплачено во второй разъ, надо къ 236 прибавить 198. Скажите же: какъ можно къ 236 прибавить 198?— Прибавить 200 и потомъ отнять 2.— Объясните, почему можно такъ прибавить число 198? — Когда мы прибавимъ 200, то прибавимъ лишку 2; этотъ лишекъ надо потомъ отнять.— Какъ легче прибавить 198: прибавить 100, потомъ 90 и 8, или прибавить 200 и отнять 2?— Легче: прибавить 200 и отнять 2.— Да, такъ легче, потому что 200 состоитъ только изъ сотенъ, а 198—изъ сотни, десятковъ и единицъ.

Здѣсь можно напомнить ученикамъ, что подобный пріемъ округленія они уже примѣняли, когда дѣлали сложеніе на счетахъ.

Слѣдуютъ упражненія въ сложеніи, выполняемомъ при помощи округленія слагаемыхъ: округляется, попрежнему, второе слагаемое, т.-е. придаваемое число (№ 133), первое слагаемое (№ 134), то и другое вмѣстѣ (№ 135). Округленіе перваго слагаемаго (и обоихъ вмѣстѣ), послѣ выше сдѣланнаго разъясненія, не можетъ затруднить дѣтей: для того, чтобы къ 297 прибавить 624 (чтобы сложить 297 и 624), мы къ 300 прибавимъ 624 (сложимъ 300 и 624); но когда мы взяли 300 вмѣсто 297, то взяли 3 лишку; этотъ лишекъ надо отнять отъ полученной суммы.

Округленіе вычитаемаго можетъ быть сдѣлано на задачѣ въ родѣ № 136.

— Имѣется 625 руб. такими деньгами: 6 сотенныхъ бумажекъ и одна 25-рублевая; изъ этихъ денегъ надо отдать 298 руб.; какъ это сдѣлать? — Отдать 300 руб. (3 сотенныхъ бумажки) и взять 2 руб. сдачи. — Какъ же можно вычесть число 298? — Можно вычесть 300 и къ полученному остатку прибавить 2. — Почему надо къ полученному числу прибавить 2? — Потому что, когда вмѣсто 298 мы вычли 300, то мы отняли лишнихъ 2 единицы, которыхъ отнимать не надо, которыя должны остаться; поэтому 2 единицы надо вернуть назадъ.

Можно напомнить ученикамъ, что подобный пріемъ округленія они уже употребляли, дѣлая вычитаніе на счетахъ.

Слѣдуютъ упражненія (№ 137).

Здѣсь же считаемъ полезнымъ показать дѣтямъ такой пріемъ вычитанія, съ удобствомъ примѣнимый въ тѣхъ случаяхъ, когда обычный пріемъ требуетъ раздробленія крупныхъ единицъ въ мелкія (болѣе трудные случаи вычитанія): пусть надо отъ 635-ти отнять 47; отнимемъ сначала столько, чтобы остались круглыя сотни, т.-е. 35; затѣмъ узнаемъ, сколько еще осталось отнять, для чего отнимаемъ 35 отъ 47-ми (это вычитаніе совершается безъ раздробленія); наконецъ вычтемъ 12 изъ 600, т.-е. собственно изъ 100; имѣемъ 588. Какъ видимъ, этотъ пріемъ требуетъ умѣнья быстро вычитать двузначное число изъ 100. (См. конецъ § 37 настоящей главы.) Соотвѣтствующія упражненія помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ № 138.

Округленіе множимаго можетъ быть сдѣлано на задачѣ № 139.

— Торговецъ продалъ покупателю 6 пудовъ муки по 98 коп. за пудъ. Какъ узнать, сколько денегъ долженъ получить торговецъ за эту муку? — Надо 98 умножить на 6. (Выполняется умноженіе обычнымъ пріемомъ.) — Торговецъ вычислялъ это такъ: онъ клалъ (считалъ) пудъ муки по 1 рублю (это сколько копеекъ?). Сколько придется тогда за 6 пудовъ? Сколько лишку накинулъ торговецъ при такомъ счетѣ на пудъ? Сколько лишку на 6 пудовъ? Что надо сдѣлать съ этимъ лишкомъ? — Его надо отнять отъ 600 (скинуть съ 600); получится 588; за муку надо получить 588 коп., или 5 руб. 88 коп. — Какъ же можно 98 умножить на 6? — 98 можно округлить, и умножить 100 на 6, будетъ 600; потомъ отъ 600 отнять 12. — Почему надо отнять 12? — Когда мы округлили 98, то взяли 2 лишку; этотъ лишекъ повторили 6 разъ; всего лишку получилось 12.

Слѣдуютъ упражненія (№ 140).

Для округленія множителя можетъ служить задача № 141.

— Хозяйка купила 9 фунтовъ масла по 34 коп. за фунтъ. Какъ узнать сколько заплатила она за масло? — Надо 34 умножить на 9. (Выполняется умноженіе обычнымъ пріемомъ.) — Какъ можно вычислить иначе? Что проще: найти цѣну 9-ти фунтовъ или цѣну 10-ти фунтовъ? Почему? Сколько стоятъ 10 фунтовъ масла? Какъ теперь можно найти цѣну 9-ти фунтовъ? — Отъ 340 отнять 34, получится 306; 9 фунтовъ масла стоятъ 306 коп., или 3 р. 6 к. — Какъ же можно 34 умножить на 9. — Можно 34 умножить на 10 и потомъ отнять 34. — Почему надо потомъ отнять 34? — Потому что, когда мы умножили 34 на 10, то мы взяли число 34 лишній разъ. — Какъ можно вычислить, сколько стоятъ 8 фунтовъ масла? Какъ можно 34 умножить на 8?

Слѣдуютъ упражненія (№ 142).

Округленіе множимаго и множителя мы уже указывали ранѣе, при составленіи таблицы умноженія. (Гл. IV, § 30).

Въ примѣрахъ №№ 219 и 220 многія вычисленія (сложенія, вычитанія и умноженія) могутъ быть сдѣланы при помощи округленія чиселъ.

---

2) Умноженіе и дѣленіе на 5 и 25.

— Мальчикъ разложилъ орѣхи на 5 кучекъ, по 86 орѣховъ въ каждой кучкѣ. Какъ узнать, сколько всѣхъ орѣховъ разложилъ онъ? (Зад. 143).

— Надо 86 умножить на 5.

Выполняется умноженіе обычнымъ пріемомъ.

— Потомъ каждую кучку раздѣлилъ онъ на 2 равныя части. По скольку орѣховъ стало въ каждой новой кучкѣ? Какъ это узнать? (86 : 2=43). Сколько вышло такихъ кучекъ? — 10 кучекъ: было 5 кучекъ, изъ каждой прежней сдѣлано 2 новыхъ. — Какъ теперь узнать, сколько всѣхъ орѣховъ разложено? — Надо 43 умножить на 10. — Столько ли должно получиться, сколько отъ умноженія 86-ти на 5? Почему? — Потому всѣхъ орѣховъ было столько же: разложены были

тѣ же самые орѣхи. — Какъ же можно умножить 86 на 5? — Можно 86 раздѣлить на 2, а то, что̀ получится, умножить на 10. — Вѣрно: мы беремъ числа, которыя вдвое меньше прежнихъ, за то беремъ этихъ чиселъ вдвое больше, чѣмъ прежде; должно получиться столько же.

Слѣдуютъ упражненія (№ 144). Если множимымъ будетъ число нечетное, напр. 73, то отдѣляемъ отъ него единицу, которую умножаемъ особо; 73×5: разлагаемъ 73 на 72 и 1; умножаемъ 72 по предыдущему, т.-е. дѣлимъ 72 пополамъ и множимъ 36 на 10; имѣемъ 360; повторяемъ единицу 5 разъ и, придавая къ 360, получимъ 365. Или же дѣлимъ 73 на 2, выражая частное въ видѣ цѣлаго съ дробью $36^1/_2$; умножая $36^1/_2$ на 10 имѣемъ: $36^1/_2 \times 10 = 360^{10}/_2 = 365$.

Подобнымъ же образомъ можетъ быть выведенъ пріемъ умноженія на 25. (Зад. №№ 145 и 146).

При дѣленіи на 5 ученики могутъ разсуждать такъ: раздѣлить напр. 320 на 5 значитъ узнать, сколько разъ 5 содержится въ 320, или узнать, сколько пятковъ въ 320; въ числѣ 320 десятковъ 32 (чтобы узнать это, надо 320 раздѣлить на 10), а пятковъ будетъ вдвое больше, т.-е. 64; для того, чтобы раздѣлить 320 на 5, можно раздѣлить 320 на 10, а то, что получится, умножить на 2. (Зад. №№ 147 и 148).

Подобнымъ же образомъ можетъ быть выполнено дѣленіе на 25. (Зад. №№ 149 и 150). Для того, чтобы раздѣлить напр. 700 на 25 (чтобы узнать, сколько четвертаковъ въ 700 копейкахъ), дѣти разсуждаютъ: 700 — это 7 сотенъ (700 коп. — это 7 рублей); въ одной сотнѣ 25 содержится 4 раза (въ одномъ рублѣ 4 четвертака), а въ 7 сотняхъ содержится въ 7 разъ больше, т.-е. 28 разъ (въ 7-ми рубляхъ четвертаковъ 7 разъ по 4).

Если дѣлимое не состоитъ изъ круглыхъ десятковъ (при дѣленіи на 5) или изъ круглыхъ сотенъ (при дѣленіи на 25), то единицы его или десятки вмѣстѣ съ единицами должны быть раздѣлены особо. Примѣръ: 875 раздѣлить на 25; въ одной сотнѣ 25 содержится 4 раза, въ 8-ми сотняхъ — въ 8 разъ больше (8 разъ по 4), т.-е. 32 раза; да въ 75-ти — 3 раза; всего 35 разъ

Примѣры №№ 221—224 могутъ служить для самостоятельныхъ упражненій въ умноженіи и дѣленіи на 5 и 25.

3) Разложеніе множителя и дѣлителя на сомножителей.

— Умножьте 17 на 6. Что значитъ умножить 17 на 6?

— 17 умножить на 6 — значитъ 17 повторить, взять (слагаемымъ), 6 разъ.

Учитель пишетъ $17+17+17+17+17+17$ и говоритъ:

— Будемъ набирать эти числа попарно. (Подчеркиваетъ или обчерчиваетъ каждую пару.) Сколько выйдетъ такихъ группъ (паръ)? — Такихъ группъ выйдетъ 3. — Какъ узнать, чему равна каждая группа? — Къ 17-ти прибавить 17 — будетъ 34. — Какъ узнать это другимъ дѣйствіемъ? — 17 умножить на 2 — получится 34. — Такихъ группъ, какъ вы сказали, три. Что же теперь надо сдѣлать? — 34 умножить на 3 — будетъ 102. — Итакъ, 17 умножить на 6 — сколько

получится? Какъ мы сейчасъ умножили 17 на 6? — Сначала 17 умножили на 2, получилось 34; потомъ 34 умножили на 3, стало 102. — А если мы будемъ набирать 17 не по парѣ, а по тройкѣ, тогда сколько выйдетъ такихъ группъ? (Подчеркиваетъ или обчерчиваетъ эти группы.) Какъ узнать, чему равна каждая группа? — 17 умножить на 3, будетъ 51. — А сколько такихъ группъ? Что же теперь надо сдѣлать? — 51 умножить на 2, получится 102. — Какъ мы умножали сейчасъ 17 на 6? — Сначала 17 умножили на 3, потомъ 51 умножили на 2. — Вотъ видите: чтобы умножить какое-нибудь число на 6, можно умножить это число на 2; а то, что получится, умножить на 3; или сначала умножить на 3, а потомъ на 2.

Пріемъ разложенія множителя на сомножителей уже примѣнялся учениками при умноженіи на круглые десятки и круглыя сотни, на что слѣдуетъ указать дѣтямъ.

— Умножьте 14 на 3. Теперь помножьте 42 на 7. Кто скажетъ, сколько разъ повторили мы число 14? Провѣрьте: умножьте 14 на 21 обыкновеннымъ способомъ.

— Мальчикъ читалъ книгу: въ часъ прочитывалъ онъ по 12 страницъ, каждый день читалъ по 3 часа и окончилъ чтеніе въ 5 дней. Какъ узнать, сколько страницъ въ этой книгѣ? (Задача № 151.)—Сначала надо узнать, сколько страницъ читалъ онъ въ день: $12 \times 3 = 36$; потомъ узнаемъ, сколько страницъ прочиталъ онъ въ 5 дней: $36 \times 5 = 180$.— Какъ можно узнать это иначе? — Сначала узнать, сколько часовъ читалъ мальчикъ книгу: $3 \times 5 = 15$; потомъ узнать, сколько страницъ прочиталъ онъ въ 15 часовъ: $12 \times 15 = 180$.—Чтобы рѣшить эту задачу, мы сейчасъ умножили 12 на 15; и прежде мы тоже умножили 12 на 15, но только какъ умножали? — Мы умножили 12 на 3, потомъ 36 на 5.— Какъ же можно умножить какое-нибудь число на 15?

Слѣдуютъ упражненія (№№ 152 и 153).

Разложеніе множителя на сомножителей сводитъ умноженіе на данное число къ умноженіямъ на другія, меньшія числа. Это бываетъ на практикѣ удобно въ тѣхъ случаяхъ, когда умноженіе хотя на одного изъ сомножителей можетъ быть сдѣлано на память или какимъ-либо сокращеннымъ путемъ. Примѣры. 1) 25 умножить на 12; $25 \times 4 = 100$, $100 \times 3 = 300$; 2) 23×27; умножаемъ 23 на 9, округляя множителя; $23 \times 10 = 230$; $230 - 23 = 207$; потомъ множимъ 207 на 3; имѣемъ 621.

Разложеніе дѣлителя на множителей удобно можетъ быть разъяснено при помощи нитки, которая дѣлится (разрѣзается) на 4 равныя части, на 6, на 8 равныхъ частей (№№ 154—156). Этотъ пріемъ уже былъ показанъ ученикамъ при составленіи таблицы дѣленія (гл. IV, § 31).

Примѣры нашего сборника №№ 225—228 служатъ для упражненія въ умноженіи и дѣленіи при помощи разложенія множителя и дѣлителя на сомножителей.

46. Задачи и примѣры на всѣ дѣйствія. Рѣшеніе задачъ и численныхъ примѣровъ въ предѣлѣ тысячи носитъ

такой же характеръ, какъ и въ предѣлѣ первой сотни (гл. IV, § 33). Въ этихъ задачахъ и примѣрахъ ученики, отъ времени до времени, будутъ встрѣчаться съ уже знакомыми дѣйствіями надъ дробями.

Въ концѣ этого отдѣла мы помѣстили нѣкоторыя изъ типическихъ задачъ, а именно: 1) такъ наз. задачи на тройное правило (большею частію на вычисленіе стоимости) (№№ 207—215 и №№ 243—245); 2) на проценты (№№ 216—235 и №№ 246—247); 3) на соразмѣрное дѣленіе (№№ 236—241); сюда же могутъ быть отнесены и задачи №№ 242—248, которыя отличаются отъ предыдущихъ тѣмъ, что, вмѣсто дѣленія на части, рѣшаются дѣленіемъ по содержанію, и еще тѣмъ, что послѣдній вопросъ въ нихъ иногда отсутствуетъ. Такъ напр. задача № 242 будетъ задачей на соразмѣрное дѣленіе, если поставить вопросъ: сколько снопо́въ нажала мать, и сколько сноповъ нажала дочь?

Указанія о рѣшеніи типическихъ задачъ помѣщены ниже (гл. VI, § 54).

ГЛАВА VI.

Числа любой величины.

47. Нумерація. Нумерація до тысячи, или нумерація чиселъ перваго класса, лежитъ въ основѣ нумераціи чиселъ любой величины: числа второго и третьяго класса носятъ тѣ же названія, что и числа перваго класса, лишь съ присоединеніемъ словъ „тысяча“, „милліонъ“: триста сорокъ четыре, триста сорокъ четыре тысячи, триста сорокъ четыре милліона; числа второго и третьяго класса пишутся такъ же, какъ и числа перваго класса, только обозначенія эти сопровождаются одной или двумя тройками нулей: 704, 704 000, 704 000 000. Зная хорошо нумерацію до тысячи, ученики легко усвоятъ и нумерацію чиселъ любой величины.

Примѣчаніе. Какъ мы уже говорили (введеніе, § 6), подъ числами любой величины мы разумѣемъ здѣсь числа не выше первыхъ трехъ классовъ; но и такія числа, которыя содержатъ сотни милліоновъ, могутъ имѣть мѣсто лишь при изученіи нумераціи: въ вычисленія же едва ли нужно часто вводить даже десятки милліоновъ и простые милліоны.

При обученіи устной нумераціи въ предѣлѣ сотни и тысячи мы употребляли, какъ наглядныя пособія, палочки, пучки по десяти и связки по сотнѣ палочекъ или кубики, бруски и доски ариѳметическаго ящика. Эти пособія даютъ наглядное представленіе о сравнительной величинѣ счетныхъ единицъ: простой единицы, десятка и сотни. Пользоваться съ тою же цѣлію палочками за предѣломъ тысячи крайне неудобно и притомъ безполезно: едва ли можно вызвать сколько-нибудь отчетливое представленіе о величинѣ напр. десятка тысячъ сравнительно съ простой единицей. Но дѣти уже имѣютъ представленіе о сравнительной величинѣ какихъ бы то ни было трехъ сосѣднихъ единицъ: если вообразить себѣ милліонъ въ видѣ кубика, то десятокъ милліоновъ явится въ формѣ бруска, сотня милліоновъ — въ видѣ доски.

За предѣломъ тысячи нагляднымъ пособіемъ при изученіи нумераціи могутъ служить счеты, которыми мы пользовались и раньше, при ознакомленіи съ письменной нумераціей.

Спросивши у дѣтей, какія счетныя единицы они знаютъ (простую единицу, десятокъ и сотню), и на какихъ проволокахъ счетовъ кладутся эти единицы, учитель вызываетъ нѣсколькихъ учениковъ, по очереди, къ классным счетамъ и заставляетъ ихъ провести счетъ единицами, десятками и сотнями. Это упражненіе имѣетъ цѣлью напомнить дѣтямъ, относительно уже знакомыхъ имъ единицъ, что каждыя десять единицъ составляютъ одну новую единицу, и этимъ подготовить учениковъ къ тому же выводу для единицъ послѣдующихъ.

Кладя по шарику на нижней проволокѣ, ученикъ считаетъ: одна единица, двѣ, три,... десять единицъ.

— Чѣмъ можно замѣнить десять шариковъ первой проволоки? Замѣни. Что же означаетъ шарикъ второй проволоки? Считай десятками.

Кладя по шарику на второй проволокѣ, ученикъ считаетъ: одинъ десятокъ, или десять; два десятка, или двадцать,... десять десятковъ.

— Чѣмъ можно замѣнить десять шариковъ второй проволоки? Замѣни. Что же означаетъ шарикъ третьей проволоки? Считай сотнями.

Кладя по шарику на третьей проволокѣ, ученикъ считаетъ: одна сотня, или сто; двѣ сотни, или двѣсти,... десять сотенъ.

— Чѣмъ можно замѣнить десять шариковъ третьей проволоки? Замѣни. Что же означаетъ шарикъ четвертой проволоки? Тысяча есть тоже счетная единица: тысячами считаютъ такъ же, какъ и простыми единицами. Считай тысячами.

Кладя по шарику на четвертой проволокѣ, ученикъ считаетъ: одна тысяча, двѣ тысячи,... десять тысячъ.

— Чѣмъ можно замѣнить десять шариковъ четвертой проволоки? Замѣни. Что же означаетъ шарикъ пятой проволоки? Десять тысячъ, или десятокъ тысячъ, есть также счетная единица: ихъ считаютъ какъ десятки.

Выполняется, попрежнему, счетъ десятками тысячъ: одинъ десятокъ тысячъ, или десять тысячъ; два десятка тысячъ, или двадцать тысячъ,... десять десятковъ тысячъ.

— Чѣмъ можно замѣнить десять шариковъ пятой проволоки? Замѣни. Какъ называются десять десятковъ? Какъ назвать десять десятковъ тысячъ? Что же означаетъ шарикъ шестой проволоки? Сто тысячъ, или сотня тысячъ, есть также счетная единица: ихъ считаютъ какъ сотни.

Ученикъ производитъ счетъ сотнями тысячъ: одна сотня тысячъ, или сто тысячъ; двѣ сотни тысячъ, или двѣсти тысячъ,... десять сотенъ тысячъ.

— Чѣмъ можно замѣнить десять шариковъ шестой проволоки? Замѣни. Какъ называются десять сотенъ? Какъ назовете вы десять сотенъ тысячъ? — Тысяча тысячъ. — Тысяча тысячъ наз. *милліонъ*. Что же означаетъ шарикъ седьмой проволоки? Милліонъ есть также счетная единица: милліоны считаютъ какъ простыя единицы.

Затѣмъ, подобно предыдущему, учитель знакомитъ учениковъ съ единицами: десятокъ милліоновъ и сотня милліоновъ.

— Назовите теперь счетныя единицы, которыя вы знаете. Вспомните, простая единица называется единицей перваго разряда. А десятокъ? Сотня? Единицей какого разряда будетъ тысяча? Десятокъ тысячъ? и т. д.

Нумера разрядовъ могутъ быть записаны на рамкѣ классныхъ счетовъ противъ соотвѣтственныхъ проволокъ.

— Раздѣлимъ счеты на отдѣленія, или *классы*, по три проволоки въ каждомъ. (Отмѣчаетъ эти отдѣленія мѣломъ на рамкѣ классныхъ счетовъ.) Какія единицы попадутъ въ первый классъ? Во второй? Въ третій? Вотъ видите: въ каждомъ классѣ есть свои единицы, десятки и сотни. Въ первомъ классѣ единицами будутъ простыя единицы. А во второмъ? Въ третьемъ?

— Будемъ называть нижнюю проволоку каждаго класса первою проволокою въ этомъ классѣ. На которой же проволокѣ въ каждомъ классѣ кладутся единицы этого класса? — На первой. — А десятки? Сотни?

Затѣмъ учитель кладетъ на счетахъ число перваго класса, напр. 357.

— Прочитайте положенное число. Въ какомъ классѣ оно положено?

Послѣ этого учитель кладетъ число одного второго класса, напр. 357 тысячъ.

— Въ какомъ классѣ положено это число? Прочитаемъ его. Что означаютъ 3 шарика шестой проволоки? — Три сотни тысячъ, или триста тысячъ. — Что означаютъ 5 шариковъ пятой проволоки? — Пять десятковъ тысячъ, или пятьдесятъ тысячъ. — Что означаютъ 7 шариковъ четвертой проволоки? — Семь тысячъ. — Въ этомъ числѣ триста тысячъ, да пятьдесятъ тысячъ, да семь тысячъ. Сколько тутъ всѣхъ

тысячъ? — Триста пятьдесятъ семь тысячъ. — Вотъ видите: если число положено во второмъ классѣ, то его надо читать такъ, какъ будто оно было въ первомъ классѣ. (Закрываетъ три нижнія проволоки.) Читайте. — Триста пятьдесятъ семь. — И потомъ прибавить слово «тысячъ».

Слѣдуютъ упражненія. Учитель кладетъ на счетахъ, а ученики читаютъ числа: 5 и 5 тысячъ, 36 и 36 тысячъ, 70 и 70 тысячъ, 264 и 264 тысячи, 803 и 803 тысячи, 250 и 250 тысячи, 600 и 600 тысячъ. Обратно: учитель диктуетъ такія числа, ученики кладутъ ихъ на счетахъ. При этомъ учитель спрашиваетъ: на какихъ проволокахъ въ каждомъ классѣ положено данное число, на что дѣти должны отвѣчать такъ: число 250 положено на третьей и второй проволокѣ въ первомъ классѣ; число 250 тысячъ положено на третьей и второй проволокѣ во второмъ классѣ.

Далѣе учитель кладетъ на счетахъ число одного третьяго класса, напр. 357 милліоновъ.

— Въ какомъ классѣ положено это число? Прочитаемъ его. Что означаютъ 3 шарика девятой проволоки? — Три сотни милліоновъ, или триста милліоновъ. — Что означаютъ 5 шариковъ восьмой проволоки? — Пять десятковъ милліоновъ, или пятьдесятъ милліоновъ. — Что означаютъ 7 шариковъ седьмой проволоки? — Семь милліоновъ. — Сколько всѣхъ милліоновъ въ этомъ числѣ? — Триста пятьдесятъ семь милліоновъ. — Вотъ видите: если число положено въ третьемъ классѣ, то его надо читать, какъ будто оно было въ первомъ классѣ. (Закрываетъ 6 нижнихъ проволокъ.) Читайте. — Триста пятьдесятъ семь. — И прибавить слово «милліоновъ».

Слѣдуютъ упражненія. Учитель кладетъ на счетахъ, а ученики читаютъ числа: 7, 7 тысячъ, 7 милліоновъ; 53, 53 тысячи, 53 милліона; 40, 40 тысячъ, 40 милліоновъ; 281, 281 тысяча, 281 милліонъ; 502, 502 тысячи, 502 милліона; 670, 670 тысячъ, 670 милліоновъ; 900, 900 тысячъ, 900 милліоновъ. Обратно: учитель диктуетъ, ученики кладутъ такія числа на счетахъ. При этомъ учитель спрашиваетъ, на какихъ проволокахъ въ каждомъ классѣ положено данное число.

Послѣ этого, уже не прибѣгая къ счетамъ, учитель заставляетъ дѣтей называть числа, давая ихъ въ такой формѣ: 8 единицъ второго класса (ученики должны сказать: восемь тысячъ), 510 единицъ третьяго класса и т. п. (Годъ третій нашего сборника: нумерація, № 5.)

Затѣмъ можно перейти къ письму чиселъ, состоящихъ изъ единицъ одного только класса.

Положите на счетахъ число двѣсти семьдесятъ. Напишите это число. На первой проволокѣ не положено шариковъ: что это означаетъ? — Въ числѣ нѣтъ единицъ. — Какой знакъ написанъ въ первомъ мѣстѣ (справа)? Положите число восемьсотъ. Напишите его. На первой и второй проволокахъ не положено шариковъ: что это значитъ? Какіе знаки написаны на первомъ и второмъ мѣстѣ? Положите на счетахъ триста пятьдесятъ семь тысячъ. Я напишу это число. (Пишетъ 357 тысячъ.) На первой, второй и третьей проволокахъ не положено шариковъ: что это означаетъ? Кто догадается, какъ можно обозначить это

число, не писавши слова «тысячъ»: что можно написать вмѣсто этого слова? — Вмѣсто этого слова можно написать три нуля. (Учитель стираетъ слово «тысячъ» и пишетъ вмѣсто него три нуля: 357 000.) — Къ какому классу принадлежитъ это число? Есть ли тутъ единицы перваго класса? Чѣмъ обозначенъ первый классъ? Цифры 357 означаютъ единицы второго класса, а три нуля стоятъ на мѣстахъ единицъ перваго класса; поэтому я сдѣлалъ небольшой промежутокъ между цифрами 357 и 000. Сколько шариковъ положено во второмъ классѣ на первой проволокѣ? Что означаютъ эти семь шариковъ? Какая цифра написана во второмъ классѣ на первомъ мѣстѣ? Что означаетъ эта цифра? Сколько шариковъ положено во второмъ классѣ на второй проволокѣ? на третьей? Что означаютъ эти шарики? Какая цифра написана въ этомъ классѣ на второмъ мѣстѣ? на третьемъ? Что означаютъ эти цифры.

Слѣдуютъ упражненія. Ученики кладутъ на счетахъ и затѣмъ пишутъ числа: 1 000, 9 000; 42 000, 10 000, 80 000; 543 000, 206 000, 450 000, 100 000, 700 000. Здѣсь, какъ и прежде, не лишне спрашивать, на какихъ проволокахъ во второмъ классѣ положено данное число, и потомъ: на какихъ мѣстахъ въ этомъ классѣ написаны соотвѣтствующія цифры. Обратно, ученики читаютъ такія числа (съ классной доски или изъ задачника) и кладутъ на счетахъ. (№№ 6 и 7.)

— Положите на счетахъ триста пятьдесятъ семь милліоновъ. Я напишу это число. (Пишетъ 357 милліоновъ.) Положены ли шарики на проволокахъ второго класса? перваго? Что это означаетъ? — Въ этомъ числѣ нѣтъ единицъ второго и перваго класса. — Какъ можно обозначить это число, не писавши слова «милліоновъ»: что надо поставить на мѣстахъ второго класса и перваго класса? — По три нуля.

Учитель стираетъ слово «милліоновъ» и пишетъ вмѣсто него шесть нулей: 357 000 000, обративъ вниманіе учениковъ на промежутки, отдѣляющіе классы одинъ отъ другого.

Слѣдуютъ упражненія, подобныя предыдущимъ (№№ 8 и 9). (Самостоятельная работа: №№ 1—4 на стран. 2.)

Далѣе идетъ нумерація чиселъ, состоящихъ изъ единицъ двухъ первыхъ классовъ.

Учитель кладетъ на счетахъ, напр., число 576.

— Прочитайте число, которое я положилъ. Напишите его. (Кладетъ еще 2 тысячи.) Сколько я положилъ еще? Прочитайте теперь все положенное число. — Двѣ тысячи пятьсотъ семьдесятъ шесть. — На какой проволокѣ кладутся тысячи? На какомъ мѣстѣ надо писать тысячи? Припишите цифру тысячъ. Прочитайте написанное число.

Упражненія: ученики кладутъ на счетахъ и затѣмъ пишутъ числа: 4384, 7608, 1570, 3800, 2067, 5020, 7009; здѣсь надо особенно остановиться на тѣхъ случаяхъ, когда въ числѣ нѣтъ сотенъ или сотенъ и десятковъ, спрашивая учениковъ, на какихъ проволокахъ не положено шариковъ, и что надо писать на соотвѣтствующихъ мѣстахъ; обратно: ученики читаютъ такія числа и кладутъ ихъ на счетахъ. (№№ 10 и 11.)

Далѣе идутъ такіе примѣры, гдѣ появляются десятки тысячъ (№№ 12 и 13) и сотни тысячъ (№№ 14 и 15). Десятки и сотни тысячъ можно ввести такъ же, какъ это сдѣлано нами для тысячъ: учитель обозначаетъ на счетахъ, напр., число 6587, ученики читаютъ его и пишутъ; затѣмъ учитель кладетъ на счетахъ еще 4 десятка тысячъ, ученики читаютъ все положенное число, а потомъ пишутъ его. Особенное вниманіе должно быть обращено на тѣ случаи, когда второй классъ оканчивается, а первый начинается нулями.

Для самостоятельныхъ упражненій въ нумераціи чиселъ двухъ первыхъ классовъ могутъ служить примѣры №№ 5—8 (стран. 3—4).

Для перехода къ нумераціи чиселъ, состоящихъ изъ трехъ классовъ, считаемъ полезнымъ поупряжнять учениковъ въ письмѣ чиселъ перваго класса тремя цифрами.

Учитель пишетъ, напр., число 287.

— Прочитайте. Сколькими цифрами, или знаками, написано это число? Какъ, поэтому, можно назвать его? — Его можно назвать трехзначнымъ числомъ. Учитель пишетъ, напр., число 95. Сколькими цифрами написано это число? Какъ назовете его. — Двузначнымъ числомъ. — Скажите такія числа, которыя пишутся одной цифрою. Какъ они называются? — Они называются однозначными. Учитель пишетъ, напр., число 57. Читайте. Теперь я слѣва напишу нуль (057). На какомъ мѣстѣ поставилъ я нуль? Что пишется на третьемъ мѣстѣ? Что же означаетъ этотъ нуль? — Онъ означаетъ, что сотенъ нѣтъ. — А были ли сотни раньше? Измѣнилось ли число отъ того, что мы слѣва написали нуль? Прочитайте написанное число. Число 57 двузначное, а число 057 — какое? Вы видите, что вмѣсто двузначнаго числа можно написать трехзначное. 4 — число однозначное; нельзя ли написать число четыре тремя цифрами? Какъ это сдѣлать? Напишите. (004.) Число восемьдесятъ напишите тремя цифрами.

Упражненія: ученики пишутъ тремя цифрами числа: 86, 15, 11, 40, 10; 8, 5, 1

Послѣ этого можно перейти къ нумераціи чиселъ, состоящихъ изъ трехъ классовъ.

— Какія счетныя единицы находятся въ первомъ классѣ? во второмъ? въ третьемъ? Когда мы обозначаемъ числа на счетахъ, сколько проволокъ будетъ въ каждомъ классѣ? Когда мы пишемъ числа, сколькимъ цифрамъ должны быть мѣста въ каждомъ классѣ?

Затѣмъ учитель пишетъ число 753 948-216.

— Укажите тѣ цифры, которыя написаны въ первомъ классѣ? во второмъ? въ третьемъ? Прочитайте третій классъ. — Семьсотъ пятьдесятъ три.— Чего это семьсотъ пятьдесятъ три? — Семьсотъ пятьдесятъ три милліона. — Читайте слѣдующій классъ. — Девятьсотъ сорокъ восемь тысячъ. — Читайте младшій классъ. — 216 единицъ. — Назовите теперь все число.— 753 милліона 948 тысячъ 216 единицъ.—Слово «единицъ», обыкновенно, не произносится. Прочитайте еще разъ это число, не говоря слова «единицъ». Положите теперь это число на счетахъ.

Потомъ надо брать такіе примѣры, когда старшіе классы оканчиваются, младшіе начинаются нулями: 320 040 007.

— Изъ сколькихъ классовъ состоитъ написанное число? Сколькими цифрами написано число, находящееся въ каждомъ классѣ? Читайте старшій классъ. — Триста двадцать милліоновъ. — Читайте слѣдующій классъ. — Сорокъ тысячъ. — Читайте младшій классъ. — Назовите теперь все число. Положите это число на счетахъ.

Полезно провести соотвѣтствіе между занятыми проволоками и значащими цифрами, между пустыми проволоками и нулями. — На какой проволокѣ во второмъ классѣ положены четыре шарика? Что они означаютъ? На какомъ мѣстѣ во второмъ классѣ написана цифра 4? Что она означаетъ? На какихъ проволокахъ во второмъ классѣ не положено шариковъ? Что это значитъ? Какіе знаки написаны во второмъ классѣ на третьемъ и первомъ мѣстѣ?

Далѣе учитель пишетъ число, не оставляя промежутковъ между классами: 864060130.

— Когда я писалъ вамъ числа раньше, то дѣлалъ промежутки между классами. Теперь я написалъ число безъ этихъ промежутковъ. Прочитаемъ его. Сколько цифръ должно быть въ первомъ классѣ? Отдѣлимъ эти цифры запятою. Сколько цифръ надо отдѣлить для второго класса? Въ какомъ классѣ будутъ цифры 864? Теперь читайте. Прочитайте еще такое число: 045087002. (Ученикъ, вызванный къ классной доскѣ, разбиваетъ число на классы запятыми; затѣмъ число читается.) Сколькими цифрами написано число каждаго класса? Прочитайте старшій классъ. — Сорокъ пять милліоновъ. — Что означаетъ нуль, стоящій слѣва въ этомъ классѣ? — Онъ означаетъ, что здѣсь нѣтъ сотенъ милліоновъ. — Этотъ нуль я сотру (стираетъ). Читайте теперь старшій классъ. Читайте все число. Попрежнему ли прочитали вы это число или какъ-нибудь иначе? Вотъ видите: нули, которые стоятъ налѣво въ старшемъ классѣ (впереди всего числа), можно и не писать. Прочитайте такое число: 6000020. Сколько цифръ написано здѣсь въ старшемъ классѣ? Сколько же цифръ можетъ быть въ старшемъ классѣ? — Три цифры, двѣ цифры, одна цифра. — Прочитайте такое число: 124075386. Вы видѣли, что можно не писать нулей слѣва въ старшемъ классѣ, т.-е. впереди всего числа. Выбросимъ нуль и въ этомъ примѣрѣ. (Пишетъ снова тѣ же цифры, кромѣ нуля)[1]). Прочитайте написанное теперь число. То же ли это число, что̀ и раньше было, или нѣтъ? Останется ли прежнимъ число, если не писать нулей въ срединѣ его? Не догадаетесь ли, почему измѣнилось число въ нашемъ примѣрѣ? Что означала цифра 6 прежде, и что означаетъ она теперь? Что означала и означаетъ цифра 8? 3? 5? 7? Вотъ видите: тѣ цифры, которыя стояли направо отъ пропущеннаго нуля, и теперь означаютъ то же самое, что означали онѣ прежде. Что означала раньше цифра 4, и что означаетъ она теперь? Что означала и означаетъ цифра 2? цифра 1? Видите: цифры, которыя стояли влѣво отъ пропущеннаго нуля, означаютъ теперь уже не то, что означали онѣ раньше, потому

---

[1]) Пишетъ число 12475386 подъ числомъ 124075386 такъ, чтобы цифры одноименныхъ разрядовъ были въ одномъ столбцѣ (единицы подъ единицами и т. д.).

что, пропустивши нуль, мы подвинули каждую изъ этихъ цифръ вправо на одно мѣсто; напр. цифра 4 была раньше на седьмомъ мѣстѣ, а теперь на какомъ мѣстѣ написана она? Итакъ, нулей можно не писать только впереди всего числа: только въ старшемъ классѣ можетъ быть три цифры, двѣ цифры и одна цифра; въ остальныхъ же классахъ должно быть по три цифры; поэтому, когда мы разбиваемъ число на классы (запятыми), то идемъ отъ правой руки къ лѣвой; слѣва начать мы не можемъ, потому что не знаемъ, сколько цифръ надо отдѣлить для старшаго класса.

Послѣ чтенія чиселъ идетъ письмо ихъ.

Учитель кладетъ на счетахъ, напр., число 73 040 008.

— Прочитайте число, которое я положилъ на счетахъ. Теперь пишите его. Читайте число, положенное въ третьемъ классѣ. Напишите его. Читайте число, положенное во второмъ классѣ. (Сорокъ.) Напишите его тремя цифрами, оставивши небольшой промежутокъ между классами. Читайте число, положенное въ первомъ классѣ. Напишите его тремя цифрами.

Здѣсь опять можно провести соотвѣтствіе между занятыми проволоками и значащими цифрами, между пустыми проволоками и нулями.

Потомъ, уже не прибѣгая къ счетамъ, учитель диктуетъ числа, ученики пишутъ ихъ.

Для упражненія въ нумераціи чиселъ, содержащихъ третій классъ, могутъ служить примѣры нашего сборника №№ 16—19 (на урокахъ съ учителемъ) и №№ 9—11 (во время самостоятельныхъ занятій).

Когда дѣти научатся читать и писать числа, слѣдуетъ сдѣлать нѣсколько упражненій 1) въ разложеніи числа на десятичныя группы и 2) обратно: въ составленіи числа по даннымъ десятичнымъ группамъ его.

Написавши число, напр., 27 085 306, учитель говоритъ:

— Разбейте это число на десятичныя группы: скажите, сколько въ немъ единицъ каждаго разряда; начинайте съ разряда высшаго.

— 2 десятка милліоновъ, 7 милліоновъ, 8 десятковъ тысячъ, 5 тысячъ, 3 сотни и 6 единицъ.

— Назовите число, которое состоитъ изъ 1 десятка милліоновъ, 6 сотенъ тысячъ, 4 десятковъ тысячъ, 5 десятковъ и 2 единицъ. (Эти группы учитель записываетъ на классной доскѣ, или же ученики читаютъ ихъ по книжкѣ.)

Соотвѣтствующія упражненія помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 20 и 21. Упражненія №№ 22 и 23 отличаются отъ предыдущихъ тѣмъ, что здѣсь счетная единица называется нумеромъ ея разряда: число 5 380 706 состоитъ изъ 5 единицъ VII разряда, 3 единицъ VI разряда и т. д.

Къ изученію нумераціи мы присоединяемъ упражненія, состоящія въ томъ, что данное число раздробляется въ десятки, сотни и т. д. (8630 = 863 десятка, 75900 = 759 сотенъ) или разлагается на такія двѣ группы, изъ которыхъ первая

выражена въ десяткахъ, сотняхъ и т. д. (1386=138 десятковъ+6 единицъ; 29567=295 сотенъ+67). Для этого служатъ примѣры №№ 24—30 нашего сборника.

— Сколько десятковъ въ сотнѣ? въ 5 сотняхъ? Сколько десятковъ въ тысячѣ? въ 3 тысячахъ? Число 5800 обратите въ десятки (№ 24).

— Въ тысячѣ — 100 десятковъ, въ 5 тысячахъ — 500 десятковъ; въ сотнѣ—10 десятковъ, въ 8 сотняхъ—80 десятковъ; 5800=580 десятковъ.

— Число 8 364 разбейте на двѣ группы, изъ которыхъ первая содержитъ всѣ его десятки.

— Въ тысячѣ — 100 десятковъ, въ 8 тысячахъ — 800 десятковъ; въ сотнѣ — 10 десятковъ, въ 3 сотняхъ — 30 десятковъ; всѣхъ десятковъ будетъ 800, да 30, да 6—836; 8 364=836 дес.+4 ед.

— Какъ вообще разбить число на 2 группы, изъ которыхъ первая содержитъ всѣ десятки числа? (№ 26).

— Надо отдѣлить (запятою) послѣднюю цифру: число, которое стоитъ налѣво отъ послѣдней цифры (налѣво отъ запятой), показываетъ, сколько будетъ всѣхъ десятковъ; послѣдняя цифра означаетъ единицы.

Въ №№ 27—30 производится раздробленіе въ сотни, тысячи и десятки тысячъ.

Эти упражненія могутъ повести къ дѣленію на единицу съ нулями.

— Сколько всѣхъ десятковъ въ числѣ 63 820? (№ 31). Какое дѣйствіе надо сдѣлать, чтобы узнать это? — Надо 63 820 раздѣлить на 10.—Сколько же получится? Какъ раздѣлить число на 10?—Надо откинуть послѣднюю цифру

№№ 32 и 33 содержатъ дѣленіе на 100, на 1000, на 10000.

Обратныя упражненія состоятъ въ томъ, что числу, выраженному въ видѣ группы десятковъ, сотенъ и т. д., дается общепринятое названіе 1 387 дес.=13 870, 2 685 дес.+9=26 859 (№№ 34 и 35).

— Сколько сотенъ въ 10 десяткахъ? въ 40 десяткахъ? Сколько тысячъ въ 100 десяткахъ? въ 600 десяткахъ? Число 380 десятковъ назовите по-иному, какъ называютъ числа обыкновенно.

— 100 десятковъ составляютъ тысячу; 300 десятковъ — 3 тысячи; 10 десятковъ составляютъ сотню, 80 десятковъ —8 сотенъ; 3 тысячи и 8 сотенъ — 3800

Подобныя упражненія могутъ вести къ пріему умноженія на 10 (№ 36)

— Сколько единицъ въ 785 десяткахъ? Какое дѣйствіе надо сдѣлать, чтобы узнать это? — Надо 10 умножить на 785. — Сколько получится? — 7 850. — А если 785 умножить на 10, тогда сколько будетъ? Столько же: 785×10=7850.—Сравните множимое и полученное произведеніе. Какъ письменно умножить какое-нибудь число на 10?

№№ 37—39 содержатъ соотвѣтствующія упражненія по отношенію къ сотнѣ; № 40—умноженіе на 1000 и на 10000, выполнямое по аналогіи съ умноженіемъ на 10 и 100

№№ 12—27 могутъ быть рѣшены учениками во время самостоятельныхъ занятій.

Мы заставляли учениковъ обращать (раздроблять и превращать) единицы различныхъ разрядовъ непосредственно въ единицы назначеннаго разряда. Этимъ мы имѣемъ въ виду достигнуть того, чтобы дѣти освоились съ отношеніемъ различныхъ счетныхъ единицъ.

Тѣ же самыя преобразованія проще могутъ быть выполнены постепеннымъ обращеніемъ въ единицы смежнаго разряда. Тогда надо начать съ умноженія и дѣленія на 10 (а вмѣстѣ съ тѣмъ и вообще на единицу съ нулями).

Зная отношеніе смежныхъ единицъ, ученики легко поймутъ, что если единицу какого-либо разряда умножить на 10, то получится единица слѣдующаго высшаго разряда (сотню тысячъ умножить на 10 — будетъ милліонъ); а если единицу какого-нибудь разряда раздѣлить на 10, то получится единица слѣдующаго низшаго разряда (сотню тысячъ раздѣлить на 10 — будетъ десятокъ тысячъ); если умножить или раздѣлить на 10 нѣсколько единицъ какого-нибудь разряда, то получится столько же единицъ высшаго или низшаго разряда (3 сотни тысячъ умножить на 10 — будетъ 3 милліона, 3 сотни тысячъ раздѣлить на 10 — будетъ 3 десятка тысячъ).

Для того чтобы умножить какое-либо число, напр. 5 387, на 10, надо умножить на 10 каждую десятичную группу его: 5 тысячъ умножить на 10—будетъ 5 десятковъ тысячъ, 3 сотни обратятся въ 3 тысячи, что̀ вмѣстѣ съ прежнимъ составитъ 53 тысячи; 8 десятковъ дадутъ 8 сотенъ, 7 единицъ — 7 десятковъ, которые вмѣстѣ съ сотнями составятъ 870; всего будемъ имѣть 53 870. Сдѣлавъ этотъ выводъ, можно указать и письменный (внѣшній) пріемъ умноженія на 10: приписываніе нуля съ правой стороны, отъ чего каждая цифра подвигается влѣво на одно мѣсто и означаетъ число въ 10 разъ большее, чѣмъ означала она прежде. Для того чтобы умножить какое-нибудь число на 100, можно умножить его на 10 (приписать нуль), а то, что получится, умножить еще разъ на 10 (приписать еще нуль); всего приписать два нуля. Для умноженія на тысячу можно умножить на 100 (приписать два нуля), а результатъ на 10 (приписать еще нуль), т.-е. всего приписать три нуля и т. д.

Для того чтобы раздѣлить число, напр. 73 286, на 10, надо раздѣлить на 10 каждую десятичную группу его: 7 десятковъ тысячъ раздѣлить на 10 — получится 7 тысячъ, 3 тысячи обратятся въ 3 сотни, 2 сотни — въ 2 десятка, 8 десятковъ — въ 8 единицъ, а 6 единицъ будутъ въ остаткѣ; получимъ 7 328 и въ остаткѣ 6. Затѣмъ можно указать внѣшній пріемъ: отбросить послѣднюю цифру; число безъ послѣдней цифры будетъ частное, послѣдняя цифра — остатокъ. Дѣленіе на 100 можетъ быть выполнено двукратнымъ дѣленіемъ на 10: для того чтобы раздѣлить 67 800 на 100, раздѣлимъ это число на 10, имѣемъ 6 780; полученное число еще разъ раздѣлимъ на 10, будемъ имѣть 678. Если дѣлимое не оканчивается двумя нулями, напр. если дѣлимымъ будетъ число 15 379, то послѣднія двѣ цифры его будутъ изображать остатокъ. Такимъ образомъ, чтобы раздѣлить какое-нибудь число на 100, надо отбросить двѣ послѣднія цифры его: число безъ двухъ цифръ будетъ частное, отброшенныя цифры — оста-

токъ. Для раздѣленія на тысячу можно раздѣлить на 100, а результатъ на 10 и т. д.

Умѣя умножать и дѣлить на десять, ученики легко будутъ выполнять приведенныя выше преобразованія чиселъ. Примѣры: 1) Число 81247 разбить на двѣ группы, изъ которыхъ первая содержитъ всѣ десятки числа. Раздробляя 81 тыс. въ сотни и потомъ 812 сот. въ десятки, имѣемъ 8124 дес. и 7 ед. Или такъ. Чтобы узнать, сколько всѣхъ десятковъ въ этомъ числѣ, раздѣлимъ его на 10—8124,7; 81247 = 8124 дес. + +7 ед. 2) Назвать и написать только цифрами число, которое состоитъ изъ 512 сотенъ и 8 единицъ. Превращая 512 сот. въ тысячи, имѣемъ 51 тыс. 2 сот. и 8 ед., т.-е. 51 208. Или такъ. Узнаемъ, сколько единицъ въ 512 сотняхъ; для этого 512 умножимъ на 100 (сотенъ 512, а единицъ не 512, а въ 100 разъ больше), получимъ 51200; прибавимъ сюда 8, имѣемъ 51208.

48. Дроби. Послѣ изученія нумераціи чиселъ любой величины считаемъ умѣстнымъ познакомить учениковъ съ наиболѣе употребительными долями, кромѣ знакомыхъ уже дѣтямъ половинъ, четвертей и восьмыхъ, а именно съ долями $^1/_3$, $^1/_6$, $^1/_{12}$, $^1/_{24}$ и затѣмъ $^1/_5$, $^1/_{10}$ и $^1/_{20}$. Упражненія съ этими дробями совершенно подобны тѣмъ, которыя были приведены раньше; поэтому мы здѣсь только перечисляемъ ихъ, указывая на соотвѣтственныя упражненія съ половинами, четвертями и восьмыми. Это будутъ:

1) Нахожденіе частей единицы (происхожденіе дроби отъ дѣленія единицы) (№№ 41—50, стран. 9 и 10; №№ 63—70, стран. 14). Дѣленіе на равныя части нѣсколькихъ единицъ (происхожденіе дробей отъ дѣленія нѣсколькихъ единицъ); составъ полнаго частнаго (№№ 51—53, стран. 10; №№ 71 и 72, стран. 14 и 15). Самостоятельныя упражненія (№№ 28—34, стран. 10; №№ 44—49, стран. 15). См. главу IV, § 32.

2) Образованіе цѣлыхъ изъ частей единицы и выраженіе цѣлыхъ въ доляхъ единицы (№№ 54—57, стран. 11; №№ 73—76, стран. 15). Сравненіе долей и выраженіе однѣхъ долей въ другихъ доляхъ (№№ 58—62, стран. 11—13; №№ 77 — 80, стран. 16). Самостоятельныя упражненія (№№ 35—43, стран. 13 и 14; №№ 50—56, стран. 16 и 17). См. главу IV, § 34.

Дѣйствія надъ этими дробями помѣщены ниже, послѣ соотвѣтствующихъ дѣйствій надъ цѣлыми числами.

49. Сложеніе. Прежде чѣмъ выводить правило письменнаго сложенія, не лишне сдѣлать нѣсколько упражненій въ сложеніи на счетахъ. Сложеніе на счетахъ можно на-

чать ранѣе письменнаго сложенія по той причинѣ, что первое болѣе послѣдняго соотвѣтствуетъ устному пріему выполненія этого дѣйствія (на счетахъ, какъ и при устномъ сложеніи, дѣйствіе начинается съ высшихъ разрядовъ). Слагаемыя могутъ быть записаны въ строку; въ ту же строку запишется и сумма, послѣ того какъ она найдена на счетахъ. Здѣсь получитъ полное развитіе уже знакомая ученикамъ основная мысль правила сложенія: складывать числа по разрядамъ (складывать единицы одноименныхъ разрядовъ).

Правило письменнаго сложенія легко можетъ быть выведено изъ знакомаго уже ученикамъ пріема устнаго выполненія этого дѣйствія: надо только обратить вниманіе учениковъ на слѣдующее: 1) большія числа складывать въ умѣ трудно потому, что не легко держать въ памяти десятичныя группы получаемой суммы, такъ какъ группъ этихъ много; поэтому сложеніе большихъ чиселъ будемъ производить письменно, т.-е записывать десятичныя группы суммы по мѣрѣ ихъ полученія (см. введеніе, § 9); 2) писать большія слагаемыя въ строку неудобно: трудно отыскивать одинаковые разряды; всего лучше писать такія числа одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы были подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д.: тогда одинаковые разряды слагаемыхъ будутъ написаны очень близко другъ къ другу; 3) письменное сложеніе удобнѣе начинать съ низшихъ разрядовъ, нежели съ высшихъ, такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ уже написанныя цифры часто придется замѣнять другими (зачеркивая или стирая ихъ), тогда какъ въ первомъ случаѣ всякая записанная цифра будетъ уже окончательной.

Приведемъ примѣрный ходъ относящагося сюда урока[1]).

Учитель пишетъ 254 + 532.

— Читайте. Какъ станете складывать?

— Мы разобьемъ эти числа на сотни, десятки и единицы; сначала сложимъ сотни, потомъ десятки, затѣмъ единицы.

Ученики выполняютъ устно сложеніе; когда вся сумма названа, учитель записываетъ ее послѣ знака равенства. Затѣмъ онъ пишетъ на классной доскѣ 2 135 627 + 5 452 251.

— Читайте. Какъ станете складывать эти числа?

---

[1]) Прежде всего не лишне сдѣлать нѣсколько примѣровъ на сложеніе круглыхъ тысячъ, десятковъ тысячъ и т. д., т.-е. распространить на эти единицы таблицу сложенія (№ 81).

— Мы разобьемъ эти числа на десятичныя группы. (Называютъ десятичныя группы обоихъ слагаемыхъ.) Сначала сложимъ милліоны, потомъ сотни тысячъ и т. д.

— Попробуйте сдѣлать сложеніе.

Ученики затрудняются.

— Почему въ прежнемъ примѣрѣ вы скоро сдѣлали сложеніе, а здѣсь затрудняетесь? Что легче сложить: 2 сотни съ 5 сотнями или 2 милліона съ 5 милліонами? — Все равно. — Такъ что же васъ затрудняетъ? — Здѣсь получится много десятичныхъ группъ, трудно ихъ запомнить.

— Это вѣрно. Поэтому давайте дѣлать сложеніе *письменно*, то-есть какъ только найдемъ какую-нибудь десятичную группу суммы, сейчасъ же ее и запишемъ. Начинайте складывать, я буду писать. — 2 милліона и 5 милліоновъ — будетъ 7 милліоновъ. (Учитель записываетъ цифру 7 послѣ знака равенства.) — Сколько еще цифръ должно быть потомъ написано направо отъ этой цифры? На какомъ мѣстѣ будетъ тогда стоять цифра 7? Продолжайте сложеніе. — 1 сотня тысячъ и 4 сотни тысячъ — будетъ 5 сотенъ тысячъ. — Гдѣ надо написать цифру 5? Сколько еще цифръ будетъ потомъ написано вправо отъ этой цифры? На какомъ мѣстѣ будетъ стоять цифра 5?

Такъ идетъ сложеніе до конца.

Написавши затѣмъ еще примѣръ на сложеніе 432 521 218 + 25 138 651, учитель говоритъ ученикамъ, что большія числа писать при сложеніи въ строку неудобно: трудно отыскивать одинаковые разряды, потому что они далеко другъ отъ друга, и можно ошибиться: сложить, напр., цифру, означающую десятки милліоновъ, съ цифрою милліоновъ; поэтому слагаемыя пишутъ такъ, чтобы одинаковые разряды были близко другъ къ другу, а для этого подписываютъ числа одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы были подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д. Пишетъ первое слагаемое и спрашиваетъ, откуда надо начать писать второе слагаемое. — Его надо написать такъ, чтобы цифра 2 (дес. мил.) пришлась подъ цифрой 3 (дес. мил.) — Для того, чтобы показать, говоритъ учитель, что надъ этими числами надо произвести сложеніе, ставятъ знакъ + налѣво отъ слагаемыхъ (въ срединѣ); внизу проводятъ черту, подъ нею пишутъ сумму:

$$\begin{array}{r} 432\,521\,218 \\ +\ \ 25\,138\,651 \\ \hline \end{array}$$

Ученики выполняютъ сложеніе попрежнему, т.-е. начиная съ высшихъ разрядовъ. Затѣмъ учитель спрашиваетъ, нельзя ли начать сложеніе съ низшаго разряда, съ единицъ, и, получивъ утвердительный отвѣтъ, заставляетъ учениковъ переписать слагаемыя и снова сдѣлать сложеніе, начиная съ простыхъ единицъ; полученная сумма сравнивается съ прежнею: одна и та же.

До сихъ поръ мы брали такіе примѣры, когда отъ сложенія одинаковыхъ разрядовъ получается въ суммѣ не болѣе 9. Затѣмъ учитель даетъ такой примѣръ, въ которомъ сумма нѣкоторыхъ разрядовъ превышаетъ 9: 57 386 + 29 653.

— Подпишите эти числа одно подъ другимъ, поставьте знакъ, проведите черту. Начните сложеніе съ высшихъ разрядовъ.

— 5 дес. тысячъ и 2 дес. тысячъ — будетъ 7 дес. тысячъ.

— Запишите цифру 7. Продолжайте.

— 7 тыс. и 9 тыс. — будетъ 16 тысячъ.

— Что составляютъ 16 тысячъ? Сколько же будетъ въ суммѣ десятковъ тысячъ? Написанную цифру 7 надо переправить на цифру 8: цифру 7 надо стереть и написать вмѣсто нея 8; или же зачеркнемъ ее и напишемъ подъ нею цифру 8.

Такъ идетъ сложеніе до конца.

— Перепишите данныя числа. Начните теперь сложеніе съ низшихъ разрядовъ.

— 6 и 3 — будетъ 9 (записывается цифра 9). 8 дес. и 5 дес. — 13 десятковъ.

— Что составляютъ 13 десятковъ?

— 13 десятковъ составляютъ 1 сотню и 3 десятка.

— Запишите цифру 3 подъ десятками, а 1 сотню запомните (держите въ умѣ) или напишите цифру 1 наверху, надъ сотнями.

Такъ идетъ сложеніе до конца.

— Когда мы производимъ дѣйствіе письменно, то съ какихъ разрядовъ удобнѣе начинать сложеніе? Почему удобнѣе начинать съ низшихъ разрядовъ? — Если начинать съ высшихъ разрядовъ, то приходится переправлять цифры (зачеркивать, стирать); а если начинать съ низшихъ разрядовъ, то не приходится переправлять цифръ.

Слѣдуютъ упражненія въ письменномъ сложеніи сначала двухъ чиселъ, потомъ трехъ и вообще нѣсколькихъ чиселъ. (№№ 82—84 и №№ 57—70)[1]).

Послѣ сложенія цѣлыхъ чиселъ мы помѣщаемъ сложеніе упомянутыхъ въ предыдущемъ § дробей (№№ 85—87 и №№ 71—77). См. главу V, § 38.

Здѣсь, какъ и раньше, имѣютъ мѣсто лишь такіе случаи сложенія разныхъ долей, когда однѣ изъ этихъ долей могутъ быть выражены въ другихъ, напр. сложеніе $^2/_5$ и $^3/_{10}$. Единственное исключеніе представляетъ сложеніе $^1/_2$ и $^1/_3$ (задача № 86), если только учитель пожелаетъ на немъ остановиться. Здѣсь надо объяснить ученикамъ, что $^1/_2$ нельзя раздробить въ трети, а потому должно и $^1/_2$ и $^1/_3$ обратить въ новыя, одинаковыя, доли. Эти доли легко могутъ быть

---

[1]) Здѣсь учитель можетъ показать дѣтямъ способъ повѣрки сложенія сложеніемъ: вновь сложить данныя числа, но въ иномъ порядкѣ (переписавши или не переписывая ихъ). Или же разбить слагаемыя на группы, соединяя ихъ по два, по три; вычислить каждую группу и полученныя суммы сложить въ одну. Повѣрка состоитъ въ сравненіи результатовъ, найденныхъ различными путями.

найдены: $^1/_2$ можно раздробить прежде всего въ четверти, потомъ, по порядку, въ шестыя доли (въ пятыя доли раздробить ее нельзя); $^1/_3$ раздробляется въ шестыя доли. Итакъ, $^1/_2$ и $^1/_3$ можно раздробить въ шестыя доли. Можно здѣсь прибѣгнуть и къ помощи дробныхъ счетовъ: ученики должны смекнуть, на какой проволокѣ можно положить и $^1/_2$ и $^1/_3$.

50. Вычитаніе. Такъ же, какъ и при сложеніи, и по той же причинѣ, ранѣе вывода правила письменнаго вычитанія можно поупражнять учениковъ въ вычитаніи на счетахъ.

Правило письменнаго вычитанія можетъ быть выведено подобно тому, какъ это сдѣлано для правила сложенія.

Прежде всего не лишне сдѣлать нѣсколько примѣровъ на вычитаніе круглыхъ тысячъ, десятковъ тысячъ и т. д., т.-е. распространить на эти единицы таблицу вычитанія (№ 88).

Затѣмъ учитель даетъ примѣръ на вычитаніе чиселъ первой тысячи: 736 — 524 и спрашиваетъ учениковъ, какъ станутъ они дѣлать вычитаніе?

— Мы разобьемъ эти числа на десятичныя группы: на сотни, десятки и единицы; сначала вычтемъ сотни изъ сотенъ, потомъ десятки изъ десятковъ и единицы изъ единицъ.

Вычитаніе выполняется устно, результатъ записывается послѣ знака равенства.

Затѣмъ берется примѣръ съ многозначными числами: 8 643 927 — —6 211 715. Ученики говорятъ, что данныя числа надо разбить на десятичныя группы (называютъ эти группы) и вычитать: милліоны изъ милліоновъ, сотни тысячъ изъ сотенъ тысячъ и т. д. Сдѣлать вычитаніе въ умѣ здѣсь трудно, потому что будетъ много десятичныхъ группъ, и запомнить ихъ не легко; надо вычитать письменно, т.-е. узнавши, сколько получится милліоновъ, сотенъ тысячъ и т. д., сейчасъ же ихъ и записывать. Писать большія числа въ строку неудобно, потому что одинаковые разряды находятся при этомъ далеко другъ отъ друга, ихъ трудно отыскивать; лучше всего подписать одно число подъ другимъ (вычитаемое подъ уменьшаемымъ) такъ, чтобы одинаковые разряды приходились въ одномъ столбцѣ: тогда они будутъ очень близко другъ къ другу. Дѣлается запись съ надлежащей постановкой знака вычитанія и чертой, проведенной подъ вычитаемымъ. Ученики выполняютъ дѣйствіе, начиная съ высшихъ разрядовъ. Затѣмъ данныя числа переписываются, и ученики еще разъ производятъ вычитаніе, начиная съ разрядовъ низшихъ. Результаты сравниваются: получилось то же.

Остается указать дѣтямъ на удобство начинать вычитаніе съ низшихъ разрядовъ. Для этого учитель даетъ такой примѣръ на вычитаніе, въ которомъ уменьшаемое содержитъ въ нѣкоторыхъ разрядахъ меньше единицъ, нежели вычитаемое: 82 549 — 53 876.

Написавъ данныя числа одно подъ другимъ, поставивъ знакъ и проведя черту, ученики выполняютъ вычитаніе, начиная съ высшихъ разрядовъ.

— Отъ 8 дес. тыс. отнять 5 дес. тыс. — останется 3 дес. тысячъ.

— Запишите, гдѣ надо, цифру 3. Продолжайте вычитаніе.

— Отъ 2 тыс. нельзя отнять 3 тысячи.

— Когда отъ числа 82 549 отняли вы 5 дес. тысячъ, какое число осталось?

— Осталось 32 549.

—Сколько всѣхъ тысячъ въ этомъ числѣ? Можно ли отъ 32-хъ тысячъ отнять 3 тысячи? Какъ отъ 32-хъ отнять 3? — Надо разбить 32 на 20 и 12.

— Значитъ въ остаткѣ будетъ не 3, а только 2 десятка тысячъ. Зачеркните цифру 3 и напишите подъ нею 2. Одинъ десятокъ тысячъ мы раздробили въ тысячи. Изъ сколькихъ тысячъ будете теперь вычитать 3 тысячи? — 3 тысячи вычитаемъ изъ 12 тысячъ, получится 9 тысячъ. (Записывается цифра 9).

Такъ идетъ вычитаніе до конца.

— Перепишите данныя числа. Начните вычитаніе съ низшихъ разрядовъ.

— Отъ 9 отнять 6 — останется 3. (Записывается цифра 3). Изъ 4-хъ десятковъ нельзя вычесть 7 десятковъ.

— Какъ стали бы вы вычитать 7 изъ 54: вѣдь 7 изъ 4 вычесть нельзя?

— Мы разбили бы 54 на 40 и 14.

— Стало-быть, вы берете одинъ десятокъ и раздробляете его въ единицы. Какъ же станете вычитать 7 десятковъ?

— Мы возьмемъ одну сотню и раздробимъ ее въ десятки.

— Сколько сотенъ будетъ тогда въ уменьшаемомъ? Чтобы не забыть этого, поставимъ точку надъ цифрой 5; точка эта будетъ означать, что сотенъ въ уменьшаемомъ не 5, а 4: одну сотню взяли, или — какъ говорятъ — *заняли*. Раздробимъ сотню въ десятки; сколько десятковъ будетъ въ уменьшаемомъ? Вычитайте. — Изъ 14 дес. вычесть 7 дес. — останется 7 дес. (записывается цифра 7).

Такъ идетъ вычитаніе до конца.

— Когда мы производимъ дѣйствіе письменно, то съ какихъ разрядовъ удобнѣе начинать вычитаніе? Почему?

Слѣдуютъ упражненія въ письменномъ вычитаніи (№№ 89 и 90 и №№ 79—87)[1]).

---

[1]) Здѣсь учитель можетъ показать дѣтямъ способы повѣрки вычитанія: сложеніемъ и вычитаніемъ. Въ первомъ случаѣ надо вычитаемое сложить съ разностью, или остаткомъ (не переписывая этихъ чиселъ), и полученную сумму сравнить съ уменьшаемымъ. Во второмъ — изъ уменьшаемаго вычесть разность и результатъ сравнить съ вычитаемымъ. Выводы эти удобно сдѣлать на задачѣ.— Торговецъ купилъ партію чаю и партію сахару, всего на 3910 руб.; за чай заплатилъ онъ 2545 руб. Сколько заплатилъ онъ за сахаръ? Отв. 1365 руб. Провѣримъ. Если мы сложимъ 2545 и 1365, что узнаемъ этимъ? Какое число должны получить въ суммѣ? Если

Послѣ вычитанія цѣлыхъ чиселъ мы помѣщаемъ вычитаніе дробей (№№ 91—93 и №№ 88—93). См. главу V, § 40.

51. Умноженіе. Умноженіе чиселъ любой величины располагается въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) умноженіе на однозначное число; 2) умноженіе на единицу съ нулями; 3) умноженіе на многозначное число.

1. Умноженіе на однозначное число.

Прежде всего ученики могутъ сдѣлать нѣсколько примѣровъ на умноженіе круглыхъ тысячъ, десятковъ тысячъ и т. д. (№ 94). Это умноженіе требуетъ только распространенія таблицы умноженія на различныя счетныя единицы.

Пріемъ письменнаго умноженія на однозначное число выводится изъ устнаго пріема такого умноженія.

Учитель даетъ примѣръ на умноженіе въ предѣлѣ тысячи: 326 × 3.

— Какъ станете умножать? — Мы разобьемъ 326 на десятичныя группы: 3 сотни, 2 десятка и 6 единицъ; сначала умножимъ сотни, потомъ десятки и затѣмъ единицы.

Умноженіе выполняется устно, произведеніе записывается послѣ знака равенства.

Слѣдуетъ примѣръ: 12 684 × 6.

— Какъ станете умножать? — Мы разобьемъ множимое на десятичныя группы (называютъ ихъ); сначала умножимъ десятки тысячъ, потомъ тысячи и т. д.

— Такъ же ли легко сдѣлать здѣсь умноженіе въ умѣ, какъ и умноженіе 326 на 3? — Почему здѣсь это труднѣе? — Много получится группъ, трудно ихъ запомнить. — Какъ же легче сдѣлать умноженіе? — Легче — письменно: умножить десятки тысячъ и сейчасъ же записать, сколько получится; умножить тысячи и записать...

— Умножайте, я стану записывать.

— 1 дес. тыс. умножить на 6 — будетъ 6 дес. тысячъ.

Учитель пишетъ 6 послѣ знака равенства и спрашиваетъ:

— Что означаетъ цифра 6? — 6 десятковъ тысячъ. — Сколько цифръ должно быть еще написано направо отъ цифры 6? Продолжайте умноженіе.

— 2 тыс. умножить на 6 — получится 12 тысячъ.

— Что составляютъ 12 тысячъ? Сколько же будетъ въ произведеніи десятковъ тысячъ? (Зачеркиваетъ цифру десятковъ тысячъ 6 и пишетъ подъ нею цифру 7). Какую цифру надо написать на слѣдующемъ мѣстѣ? — Цифру тысячъ 2.

отъ 3910 отнимемъ 1365, что этимъ узнаемъ? Сколько должно получиться въ остаткѣ? Здѣсь же можетъ быть указанъ способъ повѣрки сложенія вычитаніемъ: изъ полной суммы вычесть сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ и полученный остатокъ сравнить съ суммою остальныхъ слагаемыхъ.

Такъ идетъ умноженіе до конца.

— Съ какихъ разрядовъ начинали мы сейчасъ умноженіе? Нельзя ли начать съ низшихъ разрядовъ? (Переписываетъ данныя числа). Начинайте.

— 4 умножить на 6 — будетъ 24.

— Что составятъ 24 ед.? — 24 ед. составятъ 2 дес. и 4 ед. — Полученныя 4 ед. мы запишемъ (пишемъ 4 послѣ знака равенства, отступая отъ него настолько, чтобы потомъ все произведеніе могло быть помѣщено послѣ знака равенства), а 2 десятка запомнимъ (замѣтимъ въ умѣ) или напишемъ на сторонѣ. Продолжайте.

— 8 дес. умножить на 6 — получится 48 десятковъ.

— А сколько десятковъ получилось отъ умноженія единицъ (сколько десятковъ замѣчено въ умѣ или на сторонѣ)? Сколько будетъ всѣхъ десятковъ? Что составляютъ они? Значитъ, всѣ десятки уйдутъ въ сотни, десятковъ не будетъ; напишемъ на ихъ мѣстѣ нуль, а 5 сот. замѣтимъ.

Такъ идетъ умноженіе до конца.

— Такое ли получилось произведеніе, какъ и прежде? Съ какихъ разрядовъ удобнѣе начинать умноженіе? Почему?

Затѣмъ учитель объясняетъ дѣтямъ, что при письменномъ умноженіи располагать вычисленіе въ строку — неудобно: не подгадаешь, гдѣ поставить первую цифру произведенія (цифру единицъ); часто пишутъ множителя подъ единицами множимаго, знакъ умноженія ставятъ налѣво отъ множителя; внизу проводятъ черту; подъ нею и пишутъ произведеніе такъ, чтобы единицы его были подъ единицами множимаго, десятки — подъ десятками и т. д. Такъ писать удобнѣе еще и потому, что цифры множимаго будутъ нѣсколько ближе къ множителю.

Слѣдуютъ упражненія (№ 95).

Въ тѣхъ случаяхъ, когда во множимомъ нѣтъ единицъ нѣкоторыхъ разрядовъ, какъ напр. при умноженіи 380 006×7, учитель не допускаетъ учениковъ говорить: нуль повторить 7 разъ, нуль умножить на 7, — будетъ нуль (будетъ ничего, какъ иногда выражаются дѣти). Въ этихъ случаяхъ ученики должны разсуждать: 6 умножить на 7, будетъ 42; 2 ед. запишемъ, 4 дес. замѣтимъ; десятковъ во множимомъ нѣтъ; значитъ, въ произведеніи будутъ только тѣ 4 дес., которые получились отъ умноженія единицъ; пишемъ 4; сотенъ и тысячъ нѣтъ во множимомъ, не будетъ ихъ и въ произведеніи; пишемъ два нуля и т.д.

Примѣчаніе. На первыхъ порахъ, производя письменно умноженіе (это относится и къ другимъ дѣйствіямъ), ученики называютъ ту группу, которую множатъ: 8 десятковъ умножить на 6, будетъ 48 десятковъ, или 4 сотни и 8 десятковъ. Впослѣдствіи, когда вычисленіе пріобрѣтетъ болѣе механическій характеръ и будетъ совершаться со значительною быстротою, названія группамъ уже не даются: шестью восемь — 48 (все равно, какія бы группы ни умножались), 8 писать, 4 замѣчать. Тутъ возможно допустить и такія выраженія, какъ «шестью нуль — нуль».

Умноженіе многозначнаго числа на однозначное заключаемъ разсмотрѣніемъ того случая, когда множимое оканчивается нулями.

Учитель пишетъ примѣръ 236 700 × 4.

— Прочитайте. Раздробите все множимое въ сотни и прочитайте снова.

— 2 367 сотенъ умножить на 4.

— Умножимъ 2 367 на 4.

$$\begin{array}{r} 2\,367 \\ \times\ 4 \\ \hline 9\,468. \end{array}$$

Выполняется умноженіе. Является запись:

— 2 367 умножить на 4 — сколько будетъ? Но намъ надо умножить на 4 не 2 367 единицъ, а 2 367 сотенъ Сколько же тогда получится?— Получится 9 468 сотенъ.

Учитель приписываетъ ко множимому и произведенію названіе сотенъ:

$$\begin{array}{r} 2\,367 \text{ сотенъ} \\ \times\ 4 \\ \hline 9\,468 \text{ сотенъ.} \end{array}$$

— Мы обозначили, что во множимомъ и въ произведеніи у насъ сотни; для этого мы написали слово «сотенъ». Какъ можно обозначить это иначе?

— Приписать по два нуля.

Учитель стираетъ слово «сотенъ» и пишетъ по два нуля:

$$\begin{array}{r} 236\,700 \\ \times 4 \\ \hline 946\,800 \end{array}$$

— Вотъ видите: если множимое оканчивается нулями, то множителя слѣдуетъ подписать такъ, чтобы нули эти остались вправо отъ него, и умножать на него число безъ нулей (не обращая вниманія на нули); нули эти надо приписать, или — какъ иногда говорятъ — *снести*, къ полученному произведенію.

Слѣдуютъ упражненія, и въ числѣ ихъ такія, когда послѣдняя цифра произведенія (до снесенія нулей) есть нуль, какъ напр. при умноженіи 4 750 000 × 4 (№ 96).

№№ 94—100 могутъ быть рѣшены учениками во время самостоятельныхъ занятій.

2. Умноженіе на единицу съ нулями: на 10, 100, 1000 и т. д.

Пріемъ такого умноженія былъ выясненъ при изученіи нумераціи; здѣсь надо только возобновить его въ памяти учениковъ.

3. Умноженіе на значащую цифру съ нулями.

Пріемъ умноженія на круглые десятки и сотни былъ выведенъ при изученіи умноженія въ предѣлѣ первой сотни и тысячи (глава IV, § 30; глава V, § 41). Считаемъ нелишнимъ напомнить ученикамъ этотъ выводъ.

Учитель пишетъ 5 432 × 30 и спрашиваетъ:

— Что значитъ 5 432 умножить на 30? Если мы не умѣемъ умножать на 30, какимъ другимъ дѣйствіемъ могли бы мы вычислить это? — Сложеніемъ. — Сколько разъ мы должны были бы написать число 5 432? А если эти 30 слагаемыхъ мы соединимъ въ группы, по 3 слагае-

мыхъ въ каждой, сколько будетъ такихъ группъ? Мы умѣемъ умножать на однозначное число: какъ же вычислимъ мы каждую группу? — 5 432 умножимъ на 3. (Выполняется умноженіе.) — А сколько такихъ группъ? Что же надо теперь сдѣлать? — Надо 16 296 умножить на 10. — На 10 мы умножать умѣемъ; какъ это сдѣлать письменно? — Надо съ правой стороны приписать нуль. — Какъ же умножить 5 432 на 30? — Надо 5 432 умножить на 3; а то, что получится, умножить на 10. — Какъ умножили бы вы 5 432 на 400? — Мы умножили бы 5 432 на 4; а то, что получится, умножили бы на 100. — Почему это такъ? — Умножить 5 432 на 400 — значитъ 5 432 повторить 400 разъ. Если эти 400 чиселъ соединить въ группы, по 4 числа въ каждой, то выйдетъ 100 такихъ группъ. Чтобы вычислить каждую группу, надо 5 432 умножить на 4; а чтобы узнать, сколько будетъ всего, надо то, что получится, умножить на 100. (Все это ученики могутъ высказать по вопросамъ учителя.)

Затѣмъ учитель объясняетъ ученикамъ, что такъ какъ при умноженіи на однозначное число пишутъ множителя подъ единицами множимаго, то и здѣсь слѣдуетъ писать множителя (400) такъ, чтобы значащая цифра (4) была подъ единицами множимаго, а нули оставались бы вправо отъ него; потомъ надо сдѣлать умноженіе на значащую цифру (4) и къ полученному произведенію приписать (снести) нули:

$$\begin{array}{r} 5\,432 \\ \times 400 \\ \hline 2\,172\,800. \end{array}$$

Умноженіе на значащую цифру съ нулями можно заключить такими примѣрами, въ которыхъ и множимое оканчивается нулями.

Чтобы умножить 1 357 000 на 600, надо 1 357 000 умножить на 6, а то, что получится, умножить на 100. А для того, чтобы умножить 1 357 000 на 6, умножаемъ 1 357 на 6, полученное произведеніе — на 1 000. Такъ какъ, кромѣ умноженія на 1 000 и на 100, дѣло сводится къ умноженію 1 357 на 6, то мы напишемъ множителя такъ, чтобы его значащая цифра 6 приходилась подъ первой (справа) значащей цифрой множимаго 7:

$$\begin{array}{r} 1357000 \\ \times\ 600 \\ \hline 814200000 \end{array}$$

Умножимъ 1 357 на 6, имѣемъ 8 142; но такъ какъ во множимомъ 1 357 тысячъ, то и полученное число 8 142 означаетъ тысячи: приписываемъ къ нему справа три нуля. Теперь мы умножили данное число на 6; остается полученное число умножить на 100, для чего приписываемъ къ нему справа еще два нуля. Итакъ, умноживъ 1 357 на 6, мы приписываемъ къ произведенію 8 142 столько нулей, сколько ихъ во множимомъ и во множителѣ вмѣстѣ.

Упражненія въ умноженіи на единицу съ нулями и на значащую цифру съ нулями помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 97—99 и №№ 101—107.

4. Умноженіе на многозначное число. При вычисленіяхъ въ предѣлѣ сотни и тысячи ученики уже умножали на дву-

значное и трехзначное число и знаютъ, что въ этихъ случаяхъ надо умножать множимое на каждую десятичную группу множителя. Напомнивъ объ этомъ, учитель выводитъ правило письменнаго умноженія многозначныхъ чиселъ.

Пишется примѣръ 24×32.

— Что значитъ 24 умножить на 32?—Умножить 24 на 32 значитъ 24 взять, повторить, 32 раза.—Какъ число 24 возьмете вы 32 раза?—Мы возьмемъ 24 сначала 30 разъ, потомъ 2 раза.—Какъ станете умножать 24 на 30?—Умножимъ 24 на 3, будетъ 72; 72 на 10, получится 720.—Докончите умноженіе.—24 умножить на 2, будетъ 48; 720 и 48—768.

Затѣмъ учитель даетъ примѣръ 5 347×364.

— Умножимъ 5 347 на 364. Какъ это сдѣлать?—Надо умножить 5 347 на 300, потомъ на 60, потомъ на 4; все, что получится, сложить.—Мы уже умѣемъ умножать на сотни, на десятки и на единицы; будемъ умножать.

Ученики, вызванные по очереди къ классной доскѣ, выполняютъ дѣйствіе. Являются записи:

$$\begin{array}{r} 5\,347 \\ \times\ 300 \\ \hline 1\,604\,100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,347 \\ \times\ 60 \\ \hline 320\,820 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,347 \\ \times\ 4 \\ \hline 21\,388 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,604\,100 \\ +\ 320\,820 \\ 21\,388 \\ \hline 1\,946\,308. \end{array}$$

— Вмѣсто того, чтобы писать вычисленіе въ четырехъ разныхъ мѣстахъ, запишемъ его въ одномъ мѣстѣ. Напишемъ множимое (учитель пишетъ на классной доскѣ, ученики могутъ писать на грифельныхъ доскахъ или въ тетрадяхъ), а подъ нимъ множителя такъ, чтобы единицы его были подъ единицами множимаго; десятки будутъ подъ десятками и сотни подъ сотнями. Проведемъ внизу множителя черту, налѣво поставимъ знакъ умноженія. На что множили вы сначала число 5 347? Какъ умножить его на 300? Станемъ умножать на 3. Умножайте.

— 7 умножить на 3, будетъ 21—1 единица и 2 десятка.

— Но вѣдь потомъ намъ придется умножить полученное число на 100; во что же тогда обратится единица?—Она обратится въ сотню.—Поэтому мы запишемъ цифру 1 подъ сотнями. Продолжайте.

— 4 умножить на 3, будетъ 12; 12 да 2—14: 1 сотня и 4 десятка.

— Во что обратятся эти 4 десятка послѣ умноженія на 100? Гдѣ надо написать цифру 4?

Такъ идетъ умноженіе до конца. Является запись:

$$\begin{array}{r} 5\,347 \\ \times\ 364 \\ \hline 1\,604\,100 \\ +\ 320\,820 \\ 21\,388 \\ \hline 1\,946\,308. \end{array}$$

— Когда умножили мы 5 347 на 3, сколько тогда получилось?— Получилось 16 041. — Что потомъ сдѣлали мы съ этимъ числомъ? Какъ умножили его на 100? Если мы не припишемъ этихъ двухъ нулей, но напишемъ число 16 041 такъ, чтобы послѣдняя цифра его приходилась подъ сотнями (подъ сотнями множимаго или множителя и надъ сотнями остальныхъ слагаемыхъ-произведеній), произойдетъ ли отъ этого ошибка при сложеніи? Значитъ, нулей этихъ можно и не писать (нули стираются). Когда умножили мы 5 347 на 6, какое число получилось? Что потомъ сдѣлали мы съ этимъ числомъ? Нельзя ли не писать и этого нуля? (нуль стирается). Гдѣ должна быть написана послѣдняя цифра числа 32 082? — Подъ десятками. — Значитъ, второе слагаемое надо писать подъ первымъ, отступая на одно мѣсто вправо. А какъ написано третье слагаемое подъ вторымъ? — Отступя вправо на одно мѣсто. — Почему такъ? — Потому что послѣдняя цифра его означаетъ единицы.

— Что значитъ 5 347 умножить на 364? — Это значитъ 5 347 взять, повторить, 364 раза. — Какъ взяли мы это число 364 раза? — Мы взяли его сначала 300 разъ (умножили на 300), потомъ 60 разъ (умножили на 60) и затѣмъ 4 раза (умножили на 4). — Нельзя ли сначала умножить на 4, потомъ на 60 и послѣ того на 300? Будемъ такъ умножать.

Данныя числа переписываются. Ученики начинаютъ умноженіе.

— 7 умножить на 4, будетъ 28, 2 десятка и 8 единицъ; 8 писать, 2 дес. замѣчать. — Гдѣ надо записать цифру 8? — Ее надо записать подъ единицами.

Продолжается и заканчивается умноженіе на 4.

— Теперь на что будемъ умножать? Умножайте. — 7 умножить на 6, будетъ 42; 2 писать, 4 замѣчать. — То число, которое получимъ отъ умноженія на 6, придется еще умножить на 10. Что же означаетъ цифра 2? Гдѣ записать ее?

Продолжается и доканчивается умноженіе на десятки.

— Теперь на что будете умножать? Умножайте.

— Трижды 7 — 21; 1 писать, 2 замѣчать. — То число, которое получимъ отъ умноженія на 3, придется еще умножить на 100. Что же означаетъ цифра 1? Гдѣ написать ее?

Продолжается и доканчивается умноженіе на сотни.

— Что надо сдѣлать съ полученными тремя числами? Складывайте.

Является запись:

$$\begin{array}{r} 5347 \\ \times\ 364 \\ \hline 21388 \\ +\ 32082 \\ 16041 \\ \hline 1946308. \end{array}$$

— Какъ называется то число, которое получается отъ умноженія? Прочитайте произведеніе, полученное отъ умноженія данныхъ чиселъ. А какъ получилось число 21 388? Значитъ, это число есть также произведеніе. Второе и третье число будутъ тоже произведеніями.

Каждое изъ этихъ (трехъ) чиселъ составляетъ часть всего (полнаго) произведенія; поэтому числа эти называются *частными произведеніями*, или *неполными произведеніями*. Обыкновенно умножаютъ многозначныя числа такъ, какъ мы сейчасъ это сдѣлали: сначала умножаютъ на единицы множителя. Какъ надо писать первое неполное произведеніе? — Такъ, чтобы единицы его были подъ единицами множимаго (или множителя). — На что умножаютъ потомъ? Какъ пишутъ второе неполное произведеніе подъ первымъ? — Такъ, чтобы единицы второго произведенія были подъ десятками перваго, т.-е. отступя на одно мѣсто влѣво.—На что умножаютъ потомъ? И т. д.

Въ числѣ упражненій учитель приводитъ такіе примѣры, въ которыхъ нѣкоторыя неполныя произведенія оканчиваются нулями, и такіе, въ которыхъ множитель имѣетъ нули въ срединѣ:

```
  1925        6539
×  823      × 3004
-------     -------
  5775       26156
+ 3850     + 19617
 15400     --------
-------    19643156
 1584275
```

Въ послѣднемъ случаѣ, составляя второе неполное произведеніе, ученики должны разсуждать: трижды 9 — 27; 7 надо писать, 2 замѣчать; мы умножили 9 ед. на 3 тысячи, и получилось 27 тысячъ; цифра 7 означаетъ тысячи, ее надо писать подъ тысячами.

Затѣмъ надо разсмотрѣть умноженіе чиселъ, оканчивающихся нулями.

Ученики уже умножали: число, оканчивающееся нулями, на однозначное число (236 700 × 4); число безъ нулей въ концѣ на значащую цифру съ нулями (5 432 × 400); число, оканчивающееся нулями, на значащую цифру съ нулями (1 357 000 × 600). Здѣсь надо только распространить уже извѣстные ученикамъ пріемы на тѣ случаи, когда множитель есть число многозначное: безъ нулей и съ нулями на концѣ.

а) 63 700 умножить на 256. Ученики читаютъ множимое, раздробляя всѣ разряды въ сотни: 637 сотенъ.

```
  637 сотенъ.                                  63700
 ×256                                        ×  256
 -----                                       -------
  3822          Слово «сотенъ» замѣняется      3822
 +3185          двумя нулями.                +3185
 1274                                         1274
 ------                                      --------
 163072 сотенъ.                              16307200.
```

б) 1 254 умножить на 32 600. Ученики уже знаютъ, что для умноженія, напр., на 700 надо умножить множимое на 7, а то, что получится, умножить на 100: приписать два нуля. Прочитавъ множителя 32 600 какъ 326 сотенъ, они скажутъ, что 1 254 надо умножить на 326, а полученное произведеніе на 100.

```
   1254
 × 32600
 -------
   7524
 + 2508
  3762
 --------
 40880400.
```

в) 34 700 умножить на 2 510. Читается: множимое — 347 сотенъ, множитель — 251 десятокъ. Чтобы умножить 347 сотенъ на какое-нибудь число, надо умножить на него 347 и потомъ приписать два нуля; а чтобы умножить на 251 десятокъ, надо умножить на 251 и потомъ приписать нуль. Итакъ, множимъ 347 на 251 и къ полученному произведенію приписываемъ три нуля (два и одинъ).

```
   34700
 × 2510
 ------
     347
+ 1735
   694
 --------
 87097000.
```

Упражненія въ умноженіи многозначныхъ чиселъ помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 100—103 и №№ 108—137 [1]).

Послѣ умноженія цѣлыхъ чиселъ мы помѣщаемъ умноженіе дробей (№№ 104—107 и №№ 138—149). См. главу V, § 42.

52. Дѣленіе. Дѣленіе чиселъ любой величины располагаемъ мы въ такомъ порядкѣ: 1) дѣленіе многозначнаго числа на однозначное; 2) дѣленіе многозначнаго числа на многозначное при однозначномъ частномъ; 3) дѣленіе многозначныхъ чиселъ — общій случай.

1. Дѣленіе многозначнаго числа на однозначное.

Прежде всего ученики могутъ сдѣлать нѣсколько примѣровъ на дѣленіе круглыхъ сотенъ, тысячъ и т. д. (5 400 : 9; 63 000 : 7; № 108). Это дѣленіе требуетъ только распространенія таблицы дѣленія на различныя счетныя единицы.

Пріемъ письменнаго дѣленія на однозначное число выводится изъ устнаго пріема такого дѣленія.

Учитель даетъ примѣръ на дѣленіе въ предѣлѣ тысячи: 824 : 2.

— Какъ станете дѣлить? — Мы разобьемъ дѣлимое на 8 сотенъ, 2 десятка и 4 единицы; сначала раздѣлимъ сотни, потомъ десятки и затѣмъ единицы.

Еще примѣръ 936 : 4.

— Мы разобьемъ дѣлимое на 8 сотенъ, 12 десятковъ и 16 единицъ; сначала раздѣлимъ 8 сотенъ, потомъ 12 десятковъ и затѣмъ 16 единицъ.

---

[1]) Здѣсь можетъ быть показанъ способъ повѣрки умноженія посредствомъ умноженія: сдѣлать множимое множителемъ и обратно, вновь полученное произведеніе сравнить съ прежнимъ.

Дѣленіе выполняется устно; частное записывается послѣ знака равенства.

Слѣдуетъ примѣръ 763 542 : 3.

— Какъ станете дѣлить? — Мы разобьемъ дѣлимое на группы: 6 сотенъ тысячъ, 15 десятковъ тысячъ, 12 тысячъ, 15 сотенъ, 3 десятка и 12 единицъ. — Попробуйте раздѣлить въ умѣ.— Что затрудняетъ васъ? — Много группъ: трудно запомнить. — Какъ же легче сдѣлать дѣленіе? — Легче сдѣлать письменно. — Дѣлите, я буду записывать. — 6 сотенъ тысячъ раздѣлить на 3, получится 2 сотни тысячъ. (Учитель пишетъ цифру 2 послѣ знака равенства.) 15 десятковъ тысячъ раздѣлить на 3, будетъ 5 десятковъ тысячъ. (Записывается цифра 5.)

Такъ идетъ дѣленіе до конца.

Мы полагаемъ возможнымъ требовать отъ учениковъ, чтобы они выполняли дѣленіе на однозначное число такъ, какъ сейчасъ изложено, обходясь безъ всякихъ другихъ записей. Однако, съ цѣлью подготовки къ дѣленію на многозначное число, учитель можетъ и здѣсь показать дѣтямъ тѣ записи, которыя дѣлаются при отысканіи числа раздѣленныхъ единицъ и нахожденіи остатка. Вмѣстѣ съ тѣмъ можетъ быть показанъ и другой знакъ дѣленія, |__, который образуютъ двѣ черты: между дѣлимымъ и дѣлителемъ проводится стоячая черта (сверху внизъ), подъ дѣлителемъ — черта лежачая (слѣва направо); внизу этой черты пишется частное[1]).

Приводимъ примѣръ.

```
 479 451 | 7
-42      |------
 ---      68 493
  59
 -56
  ---
   34
  -28
   ---
    65
   -63
    ---
     21
    -21
     ---
      0
```

Старшій разрядъ дѣлимаго — сотни тысячъ; въ частномъ сотенъ тысячъ не получится: для того, чтобы въ частномъ получилась хоть одна сотня тысячъ, въ дѣлимомъ ихъ должно быть, по крайней мѣрѣ, 7. Раздробляемъ 4 сотни тысячъ въ десятки тысячъ и, придавая 7 дес. тысячъ, имѣемъ 47 десятковъ тысячъ; 47 раздѣлить на 7 — будетъ 6. Чтобы узнать, сколько десятковъ тысячъ раздѣлено, умножимъ 6 на 7: въ каждую часть мы положили по 6-ти десятковъ тысячъ, а всѣхъ частей 7; раздѣлено 42 дес. тысячъ. Чтобы опредѣлить, сколько десятковъ тысячъ осталось нераздѣленными, вычитаемъ 42 дес. тысячъ изъ 47 дес. тысячъ, для чего подписываемъ 42 подъ 47. Оставшіеся 5 дес. тысячъ раздробляемъ въ тысячи, имѣемъ 50 тысячъ; кромѣ того, въ дѣлимомъ есть еще 9 тысячъ, такъ что всѣхъ тысячъ будетъ 59; чтобы узнать число тысячъ, надо, какъ видно, къ остатку 5 приписать слѣдующую цифру дѣлимаго 9, или — какъ говорятъ — надо къ остатку *снести* слѣдующую цифру. И т. д.

---

[1]) Такой знакъ дѣленія удобнѣе прежняго при дѣленіи на многозначное число, когда дѣлителя приходится письменно умножать на цифры частнаго: множитель, находясь внизу множимаго, будетъ ближе къ его цифрамъ.

Запись можетъ быть сокращена, если мы станемъ писать только остатки.

```
479 451 | 7
 59     | 68 493.
  34
   65
    21
     0
```

Упражненія въ дѣленіи на однозначное число помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 109—111 и №№ 150—155.

Въ числѣ примѣровъ, рѣшенныхъ съ учителемъ, должны быть такіе, когда а) въ частномъ не будетъ единицъ нѣкоторыхъ промежуточныхъ разрядовъ (722 112 : 3; въ № 110); б) дѣлимое оканчивается нулями, но число, изображенное значащими цифрами, не дѣлится нацѣло на дѣлителя (1 889 000 : 8; въ № 110); в) дѣлимое оканчивается нулями, и число, изображенное значащими цифрами его, дѣлится на дѣлителя (№ 111).

2. Дѣленіе многозначнаго числа на многозначное при однозначномъ частномъ. Этотъ случай дѣленія можно начать дѣленіемъ другъ на друга круглыхъ сотенъ, тысячъ и т. д. (№ 112); такое дѣленіе требуетъ лишь распространенія таблицы дѣленія на различныя счетныя единицы: чтобы раздѣлить 2 800 на 400, разсуждаемъ: 4 сотни содержатся въ 28-ми сотняхъ столько же разъ, сколько 4 содержится въ 28-ми.

Переходя затѣмъ къ общему случаю дѣленія многозначнаго числа на многозначное при однозначномъ частномъ, надо прежде всего научить дѣтей узнавать, будетъ ли частное однозначное или нѣтъ. Чтобы узнать это, должно дѣлителя умножить (въ умѣ) на 10 и полученное произведеніе сравнить съ дѣлимымъ: если удесятеренный дѣлитель больше дѣлимаго, то дѣлитель содержится въ дѣлимомъ менѣе 10-ти разъ, и частное будетъ однозначное. Такъ, при дѣленіи 30 736 на 3 684 получится однозначное частное, потому что удесятеренный дѣлитель 36 840 больше дѣлимаго. Примѣнивъ этотъ пріемъ распознаванія однозначнаго частнаго къ нѣсколькимъ примѣрамъ въ родѣ слѣдующихъ:

9 432 : 2 358	44 618 : 6 374.
79 794 : 26 598	157 461 : 52 487.
985 962 : 328 654.	5 015 214 : 835 869,

учитель укажетъ дѣтямъ внѣшній признакъ однозначнаго частнаго: частное бываетъ однозначное: 1) когда въ дѣлимомъ и дѣлителѣ поровну цифръ (первый столбецъ примѣровъ), и 2) когда въ дѣлимомъ на одну цифру больше, чѣмъ въ дѣлителѣ (второй столбецъ). Въ первомъ случаѣ

старшій разрядъ дѣлимаго содержитъ больше единицъ, нежели старшій разрядъ дѣлителя: старшая цифра дѣлимаго больше старшей цифры дѣлителя; если старшія цифры одинаковы (85 637 : 81 748), то вторая цифра дѣлимаго больше второй цифры дѣлителя и т. д. Во второмъ случаѣ старшая цифра дѣлимаго менѣе старшей цифры дѣлителя; если же эти цифры одинаковы (7 133 886 : 792 654), то сказанное относится ко вторымъ цифрамъ и т. д.

Для отысканія частнаго мы совѣтуемъ пріучить дѣтей задаваться не одной, но двумя старшими цифрами дѣлителя въ соотвѣтствующей части дѣлимаго (см. главу V, § 43).

Примѣры.

1) 69 734 | 34 867. Узнаемъ, сколько разъ 34 тыс. содержатся въ 69 т.; для этого дѣлимъ 6 на 3, имѣемъ 2; умножаемъ (устно) 34 на 2, получаемъ 68. Итакъ, 34 тыс. содержатся 2 раза въ 69 тыс. Теперь дѣлаемъ окончательное испытаніе цифры 2, умножая на нее письменно всего дѣлителя.

2) 401 576 | 57 368. Задаемся числомъ 57 въ числѣ 401. Для этого дѣлимъ 40 на 5, имѣемъ 8; умножаемъ (устно) 57 на 8, получаемъ 456; слѣдовательно, 57 не содержится 8-ми разъ въ 401. Пробуемъ 7: умножаемъ (въ умѣ) 57 на 7, имѣемъ 399—меньше 401. Дѣлаемъ окончательное испытаніе цифры 7, умножая письменно на нее всего дѣлителя.

3) 89 765 | 17 953. Двѣ старшія цифры дѣлителя представляютъ собою число второго десятка (17). Если мы знаемъ на память произведенія такихъ чиселъ, заключенныя, по крайней мѣрѣ, въ предѣлѣ сотни (глава V, § 43), то мы сразу раздѣлимъ 89 на 17 (такъ какъ помнимъ, что 85 есть 5 разъ 17) и затѣмъ дѣлаемъ окончательное испытаніе цифры 5, умножая на нее письменно всего дѣлителя.

4) 120 824 | 15 832. Двѣ старшія цифры дѣлителя — число второго десятка 15. Зная, что въ числахъ, не превышающихъ сотню, 15 содержится не болѣе 6-ти разъ (90 есть 6 разъ 15), умножаемъ въ умѣ 15 на 7, потомъ на 8, имѣемъ 120. (Или такъ: разлагаемъ 120 на 90 и 30 и дѣлимъ на 15 эти числа.) Испытываемъ цифру 8.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда произведеніе двухъ старшихъ цифръ дѣлителя на испытуемую цифру частнаго очень мало

отличается отъ соотвѣтствующей части дѣлимаго (будучи меньше ея) или равно ей, какъ это имѣетъ мѣсто въ послѣднемъ примѣрѣ: $15 \times 8 = 120$, желательно пріучить дѣтей, раньше письменной повѣрки, захватывать еще третью цифру дѣлителя, умножая ее на испытуемое частное и придавая полученное число къ произведенію двухъ старшихъ цифръ. Такъ, въ послѣднемъ примѣрѣ умножаемъ 8 сотенъ на 8, получаемъ 64 сотни, или 6 тыс. и 4 сотни; придавая 6 тысячъ къ 120 тыс. ($15 \times 8 = 120$), имѣемъ 126 тыс. Отсюда видимъ, что испытуемая цифра 8 сильна, беремъ 7 и дѣлаемъ окончательную повѣрку.

Соотвѣтствующія упражненія помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 113—115 и №№ 156—161. Въ числѣ примѣровъ, рѣшенныхъ при учителѣ, должны быть и такіе, когда дѣленіе совершается съ остаткомъ (№ 115). Подобныя дѣленія съ остаткомъ будутъ постоянно имѣть мѣсто въ общемъ случаѣ дѣленія многозначныхъ чиселъ.

3. Дѣленіе многозначныхъ чиселъ — общій случай. Дѣленіе многозначныхъ чиселъ въ общемъ случаѣ сводится къ ряду дѣленій многозначнаго числа на многозначное при однозначномъ частномъ и такимъ образомъ вполнѣ подготовлено разсмотрѣнными двумя случаями дѣленія.

Начать слѣдуетъ съ примѣра болѣе легкаго дѣленія на двузначное число. Для того, чтобы выполнить приведенное дѣленіе, ученики при помощи вопросовъ учителя разсуждаютъ такъ. Старшій разрядъ дѣлимаго — сотни тысячъ; въ частномъ сотенъ тысячъ не будетъ:

```
 313 776 | 48
-288     |  6 537
  257
 -240
   177
  -144
    336
   -336
      0
```

для того, чтобы въ частномъ получилась хотя одна сотня тысячъ, въ дѣлимомъ ихъ должно быть по крайней мѣрѣ 48. Раздробляя сотни тысячъ въ десятки тысячъ, имѣемъ всего 31 дес. тысячъ; десятковъ тысячъ въ частномъ не будетъ по той же причинѣ, по какой нѣтъ и сотенъ тысячъ: десятковъ тысячъ въ дѣлимомъ меньше 48. Раздробляемъ 31 дес. тыс. въ тысячи и имѣемъ въ дѣлимомъ всего 313 тысячъ; тысячи въ частномъ получатся (и это будетъ старшій разрядъ его), такъ какъ въ дѣлимомъ ихъ больше 48. Дѣлимъ 313 на 48; 31 раздѣлить на 4, будетъ 7; 7 разъ по 48—336; 7 много: беремъ 6; 6 разъ 48—288; пишемъ цифру частнаго 6. Мы раздѣлили на 48 не всѣ 313 тыс., а только 288 тыс. (въ каждой части по 6 тыс., всѣхъ частей 48; стало-быть, во всѣхъ частяхъ будетъ 6×48, или — все равно,— 48×6, т.-е. 288 тысячъ). Узнаемъ, сколько тысячъ остались нераздѣленными: вычитаемъ 288 изъ 313, для чего

подписываемъ 288 подъ 313; имѣемъ въ остаткѣ 25 тысячъ. Раздробляемъ оставшіяся 25 тысячъ въ сотни, получаемъ 250 сотенъ; въ дѣлимомъ есть еще 7 сотенъ, такъ что всѣхъ сотенъ будетъ 257; чтобы узнать число всѣхъ сотенъ, надо, какъ видимъ, къ остатку 25 приписать, или *снести*, слѣдующую цифру частнаго 7. Такъ идетъ дѣленіе до конца.

Послѣ дѣленія на двузначное число учитель переходитъ къ дѣленію на число многозначное. Разсуждая попрежнему, ученики соображаютъ, что въ частномъ не будетъ сот., дес. и единицъ милліоновъ, сотенъ тысячъ; высшій разрядъ частнаго — десятки тысячъ. Тутъ учитель можетъ сказать дѣтямъ, что всякій разъ такъ узнавать старшій разрядъ частнаго—долго. Легко понять, что, разсуждая попрежнему, мы раздробляемъ разряды дѣлимаго до тѣхъ поръ, пока не получимъ число, которое не меньше дѣлителя, въ которомъ дѣлитель содержится нѣсколько, но не болѣе 9, разъ (случай 2-й). Поэтому поступаемъ такъ: отдѣляемъ (запятою или мысленно) въ дѣлимомъ слѣва такое число, въ которомъ дѣлитель содержался бы менѣе 10 разъ; такое число, какъ мы уже знаемъ, имѣетъ или столько цифръ, сколько ихъ въ дѣлителѣ, или на одну цифру больше; мы можемъ сначала отдѣлить столько цифръ, сколько ихъ въ дѣлителѣ, т.-е. 4; но такъ какъ число 1 396 меньше дѣлителя, то отдѣляемъ еще одну цифру и имѣемъ число 13 969; это число означаетъ десятки тысячъ; слѣдовательно, старшимъ разрядомъ частнаго будутъ десятки тысячъ. Дѣленіе 13 969 на 4 586 выполняется такъ, какъ объяснено выше (случай 2-й). По раздѣленіи десятковъ тысячъ получимъ въ остаткѣ 211 дес. тыс.; раздробляя ихъ въ тысячи и придавая 8 тыс. (снеся къ остатку слѣдующую цифру), имѣемъ 2 118 тысячъ; но такъ какъ число тысячъ 2 118 меньше дѣлителя, то тысячъ въ частномъ не будетъ: ставимъ на ихъ мѣстѣ нуль. Раздробляемъ 2 118 тыс. въ сотни и придаемъ 7 сотенъ, т.-е. сносимъ слѣдующую цифру дѣлимаго; дѣлимъ 21 187 сот. и т. д.

```
 139698732 |4586
-13758     |-----
 ---------  30462
  21187
 -18344
  -------
   28433
  -27516
   -------
    9172
   -9172
   -------
      0
```

Упражненія въ дѣленіи многозначныхъ чиселъ помѣщены въ нашемъ сборникѣ подъ №№ 116—118 и №№ 162—173 [1]).

---

[1]) Здѣсь учитель можетъ сообщить дѣтямъ способы повѣрки дѣленія: умноженіемъ и дѣленіемъ. Въ первомъ случаѣ надо частное умножить на дѣлителя (или обратно) и сравнить съ дѣлимымъ полученное произведеніе или полученное произведеніе, сложенное съ остаткомъ, когда онъ есть. Во второмъ случаѣ надо дѣлимое раздѣлить на частное и результатъ сравнить съ дѣлителемъ; если дѣленіе было съ остаткомъ, то остатокъ должно вычесть изъ дѣлимаго и затѣмъ поступать попрежнему. Выводы эти удобно сдѣлать на задачѣ.—87 500 штукъ кирпичу сложены въ клѣтки, по 250 штукъ въ каждой. Во сколько клѣтокъ сложены кирпичи? Отвѣтъ. 350 клѣтокъ. Провѣримъ. Что узнаемъ мы, если 250 умножимъ на 350?

Въ числѣ примѣровъ, рѣшенныхъ съ учителемъ, должны быть такіе, когда дѣлимое, а затѣмъ дѣлимое и дѣлитель, оканчиваются нулями. Здѣсь можно различить три случая.

а) Нулями оканчивается только дѣлимое, при чемъ число, изображенное значащими цифрами, не дѣлится на дѣлителя: 3 354 000 | 5 375. Этотъ случай ничѣмъ особеннымъ не отличается отъ общаго случая.

б) Нулями оканчивается только дѣлимое, при чемъ число, изображенное значащими цифрами (или значащими цифрами съ нѣсколькими изъ этихъ нулей) дѣлится на дѣлителя. Снеся къ остатку 182 слѣдующую цифру дѣлимаго, получимъ число 1 828, которое безъ остатка дѣлится на дѣлителя, давая въ частномъ 4. Эта цифра 4 означаетъ сотни, такъ какъ получилось отъ дѣленія 1 828 сотенъ. Десятковъ и единицъ въ частномъ не будетъ: на ихъ мѣстахъ ставимъ нули.

```
 2 924 800 | 457
-2 742     |-----
 -------   | 6 400
   1 828
 - 1 828
 -------
       0
```

в) И дѣлимое и дѣлитель оканчиваются нулями: 729 00 0 | 16 200. Въ такихъ случаяхъ часто отбрасываютъ (зачеркиваютъ) поровну нулей въ дѣлимомъ и дѣлителѣ. Разъяснить это можно такъ. Дѣлитель представляетъ собою 162 сотни, а дѣлимое — 7 290 сотенъ. Раздѣливши 7 290 на 162, мы узнаемъ, что 162 въ 7 290 содержится 45 разъ. Но сколько разъ 162 содержится въ 7 290, столько же разъ 162 сотни, или 16 200, содержатся въ 7 290 сотняхъ, или въ числѣ 729 000. Однако лучше не пользоваться указаннымъ сокращеніемъ, и при дѣленіи такихъ чиселъ поступать такъ же, какъ въ общемъ случаѣ. Дѣло въ томъ, что если дѣленіе совершается съ остаткомъ, то зачеркнутые нули дѣлимаго должны быть снесены къ остатку. Разъясненіе этого дается дѣтямъ не легко и скоро забывается ими. Равнымъ образомъ излишне указывать возможное упрощеніе въ томъ случаѣ, когда нулями оканчивается только дѣлитель (дѣленіе съ остаткомъ), какъ, напр., при дѣленіи 156 389 | 3 700.

```
 729 000 | 16 200
-648 00  |-------
 -------  |  45
   81 000
 - 81 000
 --------
        0
```

Послѣ дѣленія цѣлыхъ чиселъ мы помѣщаемъ дѣленіе дробей (№№ 119—122; №№ 174—181; №№ 123—127; №№ 182 и 183; №№ 128—131; №№ 184—187). (См. гл. V, § 44.)

53. О рѣшеніи задачъ. Задачи на числа любой величины, какъ и прежде, должны быть преимущественно задачи чисто ариѳметическія, а преобладающій пріемъ рѣшенія — синтезъ. (См. введеніе, § 7.)

Какое число должны получить въ произведеніи? Что узнаемъ мы, если 87 500 раздѣлить на 350? Сколько должно получиться въ частномъ?

Здѣсь же можетъ быть показанъ способъ повѣрки умноженія дѣленіемъ: раздѣлить произведеніе на множителя и результатъ сравнить съ множимымъ (раздѣлить на множимое и сравнить съ множителемъ).

Скажемъ нѣсколько словъ о расположеніи записей при рѣшеніи задачъ.

Раньше, въ предѣлѣ сотни и тысячи, когда всѣ дѣйствія ученики выполняли устно, рѣшеніе задачи записывалось строчками. Въ задачахъ съ числами любой величины многія вычисленія производятся письменно. Но и здѣсь, послѣ письменнаго вычисленія, полезно заставлять учениковъ переписывать произведенныя дѣйствія въ строки. Приводимъ примѣръ.

Задача № 155. Купецъ купилъ у помѣщика землю за 93 750 руб., по 125 руб. за десятину; часть этой земли онъ оставилъ себѣ, а прочую землю продалъ за 71 250 руб., при чемъ продавалъ десятину на 25 руб. дороже, чѣмъ покупалъ самъ. На сколько больше десятинъ купецъ продалъ, нежели оставилъ себѣ?

Если задача взята изъ сборника, который имѣется у дѣтей на рукахъ, то текстъ задачи писать, конечно, не надо. Равнымъ образомъ можно обойтись и безъ записи числовыхъ данныхъ, такъ какъ на разсматриваемой ступени обученія ученики уже вполнѣ свободно владѣютъ книгой въ смыслѣ чтенія. Достаточно ограничиться выпиской №, подъ которымъ помѣщена задача въ сборникѣ.

Рѣшеніе.

1) $\begin{array}{r|l} 93750 & 125 \\ \underline{-875} & \overline{750} \\ 625 & \\ \underline{-625} & \end{array}$

2) $125+25=150$

3) $\begin{array}{r|l} 71250 & 150 \\ \underline{-600} & \overline{475} \\ 1125 & \\ \underline{-1050} & \\ 750 & \\ \underline{-750} & \end{array}$

4) $\begin{array}{r} 750 \\ \underline{-475} \\ 275 \end{array}$

5) $475-275=\underline{\underline{200}}$

Надо требовать отъ дѣтей, чтобы наиболѣе простыя вычисленія они выполняли въ умѣ (все, что можешь сдѣлать устно, дѣлай устно). Относящіяся сюда записи могутъ быть сразу строчныя (запись 2-го и 5-го дѣйствія; то же можетъ быть сдѣлано и для 4-го).

Эти вычисленія переписываются затѣмъ въ строки; въ концѣ каждой строчки еще разъ помѣщается результатъ съ соотвѣтствующимъ наименованіемъ. (См. гл. IV, § 33.)

1) 93 750 : 125 = 750; 750 дес.
2) 125 + 25 = 150; 150 руб.
3) 71 250 : 150 = 475; 475 дес.
4) 750 — 475; 275 дес.
5) 475 — 275 = 200; 200 дес.

Время, потребное на такую переписку, мы считаемъ затраченнымъ съ пользою, такъ какъ этимъ самымъ дѣлается обзоръ выполненныхъ вычисленій (повтореніе хода рѣшенія задачи), и дѣти пріучаются къ возможно большему порядку въ расположеніи послѣдовательныхъ дѣйствій.

Примѣчаніе. При письменномъ умноженіи удобнѣе большее число брать множимымъ, меньшее — множителемъ, нежели наоборотъ; напр. удобнѣе 2 789 умножить на 6, нежели 6 на 2 789. Поэтому можно позволить ученикамъ (которымъ уже знакомо свойство перемѣстительности умноженія) при письменномъ выполненіи дѣйствія умножать большее число на меньшее и тогда, когда это слѣдовало бы наоборотъ; но при переписываніи вычисленія въ строку надо требовать отъ дѣтей, чтобы они ставили на первомъ мѣстѣ то число, которое служитъ множимымъ по смыслу вопроса. Такъ, напр., вычисляя письменно цѣну 2 789 чт. ржи, одна четверть которой стоитъ 6 р., ученики могутъ 2 789 умножить на 6; строчная же запись должна быть такова: 6 × 2 789 = 16 734; 16 734 р.

Отъ времени до времени, какъ на урокахъ съ учителемъ, такъ и на самостоятельныхъ занятіяхъ, ученики записываютъ вопросы тѣхъ простыхъ задачъ, на которыя разлагается задача сложная. Вопросы эти, составленные возможно складно и кратко, вносятся въ строчную запись рѣшенія, которая приметъ тогда слѣдующій видъ.

1) Ск. десятинъ земли купилъ купецъ у помѣщика?
93 750 : 125 = 750; 750 дес.
2) Почемъ продавалъ купецъ десятину земли?
125 + 25 = 150; 150 руб.
3) Ск. десятинъ земли онъ продалъ?
71 250 : 150 = 475; 475 дес.
4) Ск. десятинъ онъ оставилъ себѣ?
750 — 475 = 275; 275 дес.
5) На сколько десятинъ больше купецъ продалъ, нежели оставилъ себѣ?
475 — 275 = 200; 200 дес.

Примѣчаніе. Мы полагаемъ, что отъ учениковъ начальной школы не слѣдуетъ требовать такъ называемаго письменнаго *объясненія*, т.-е. письменнаго изложенія хода рѣшенія задачи въ такой, напр., формѣ: «Сначала надо узнать, сколько десятинъ земли купилъ купецъ у помѣщика. Для этого должно 93 750 раздѣлить на 125, потому что земли куплено столько десятинъ, сколько разъ 125 руб. содержится въ 92 750 р. и т. д.» Не отрицая того, что упражненія подобнаго рода могутъ содѣйствовать развитію въ дѣтяхъ умѣнья болѣе или менѣе толково и связно излагать свои мысли, мы думаемъ, что время, отведенное на эти упражненія отъ уроковъ ариѳметики, собственно для ариѳметики будетъ потеряно.

54. Типическія задачи и способы ихъ рѣшенія. Въ отдѣлѣ задачъ на всѣ дѣйствія мы помѣщаемъ сначала чисто ариѳметическія задачи, не имѣющія опредѣленно выраженнаго типа (№№ 132—181). Затѣмъ приводимъ наиболѣе часто встрѣчающіяся типическія задачи (№№ 182—234), изъ которыхъ однѣ могутъ быть отнесены къ задачамъ чисто ариѳметическимъ, другія — къ болѣе простымъ задачамъ алгебраическаго характера. Типическія задачи помѣщены въ сборникѣ каждыя двѣ подъ одинаковыми нумерами: одна изъ нихъ рѣшается учениками вмѣстѣ съ учителемъ, другая — самостоятельно; такія задачи рѣшаются однимъ и тѣмъ же способомъ.

Перечислимъ приведенные типы задачъ и способы ихъ рѣшенія [1]).

I типъ. Задачи съ пропорціональными величинами, или такъ наз. *задачи на тройное правило* (№№ 182—191).

1) *Способъ приведенія къ единицѣ.*

— 15 кусковъ сукна стоятъ 2 355 р. Сколько надо заплатить за 23 такихъ же куска сукна? (Зад. № 182.)

Узнаемъ цѣну *одного* куска, для чего дѣлимъ 2 355 на 15; затѣмъ находимъ стоимость 23 кусковъ, умноживъ 157 на 23.

— 24 работника выполняютъ нѣкоторую работу въ 60 дней. Во сколько дней исполнятъ эту работу 45 такихъ же работниковъ? (Зад. № 185).

Узнаемъ, во сколько дней могъ бы сдѣлать эту работу одинъ работникъ, для чего умножаемъ 60 на 24; затѣмъ находимъ время исполненія работы 45 работниками, раздѣливши 1 440 на 45.

---

[1]) Относящуюся сюда терминологію сообщать ученикамъ — излишне.

Первая изъ этихъ задачъ содержитъ величины прямо пропорціональныя: количество товара и стоимость его; вторая — величины обратно пропорціональныя: число рабочихъ и время работы.

2) *Способъ приведенія къ общему дѣлителю.* Предыдущимъ способомъ мы переходимъ отъ даннаго къ искомому черезъ единицу: отъ цѣны 15 кусковъ сукна переходимъ къ стоимости 23 кусковъ черезъ цѣну одного куска; отъ времени выполненія работы 24 рабочими переходимъ ко времени выполненія той же работы 45 рабочими черезъ время исполненія работы однимъ рабочимъ. Иногда этотъ переходъ можетъ быть сдѣланъ и не черезъ единицу, а нѣкоторое другое число. Пусть, напр., требуется найти цѣну 20 кусковъ сукна, зная, что 15 кусковъ его стоять 2 355 р. Числа 15 и 20 имѣютъ общаго дѣлителя 5, черезъ котораго здѣсь и можно перейти отъ 15 къ 20: узнаемъ цѣну 5 кусковъ сукна, для чего дѣлимъ 2 355 на 3 (такъ какъ 5 кусковъ стоятъ въ 3 раза меньше, чѣмъ 15 кусковъ); затѣмъ находимъ цѣну 20 кусковъ, умноживъ полученное число 785 на 4 (такъ какъ 20 кусковъ стоятъ въ 4 раза больше, чѣмъ 5 кусковъ). Во второй изъ приведенныхъ задачъ можно перейти отъ 24 къ 45 черезъ общаго дѣлителя этихъ чиселъ 3: для исполненія работы 3 работникамъ надо времени въ 8 разъ больше, нежели 24-мъ, т.-е. 480 дней ($60 \times 8 = 480$); 45 рабочимъ потребуется времени въ 15 разъ меньше, нежели 3-мъ, т.-е. 32 дня ($480 : 15 = 32$).

Должно замѣтить, что способъ приведенія къ общему дѣлителю для учениковъ начальной школы слишкомъ труденъ, почему мы и не считаемъ нужнымъ указывать его дѣтямъ. Не помѣщаемъ мы и такихъ задачъ, которыя могутъ быть рѣшены только этимъ способомъ[1]).

3) *Способъ обратнаго приведенія къ единицѣ.*

— Поѣздъ ж. д. проходитъ 435 верстъ въ 15 часовъ. Во сколько времени пройдетъ онъ 667 верстъ, двигаясь съ тою же скоростью? (Зад. № 184.)

---

[1]) Мы разумѣемъ рѣшеніе задачи въ цѣлыхъ числахъ, такъ какъ ученики знакомы только съ нѣкоторыми, наиболѣе употребительными, дробями.

Узнаемъ путь, проходимый поѣздомъ въ *одинъ* часъ, для чего дѣлимъ 435 на 15. Затѣмъ дѣленіемъ (по содержанію) 667 на 29 находимъ время прохожденія 667 верстъ.

Обращаемъ вниманіе на отличіе этого способа отъ способа 1-го, почему разсматриваемый пріемъ и называется обратнымъ приведеніемъ къ единицѣ: рѣшая задачу 1-мъ способомъ, мы должны были бы сдѣлать переходъ черезъ единицу отъ 435 къ 667: сначала узнать, во сколько времени поѣздъ проходитъ одну версту; затѣмъ найти, во сколько времени пройдетъ онъ 667 верстъ. Примѣнительно къ задачѣ съ величинами обратно пропорціональными этотъ способъ приводитъ къ такому разсужденію (см. ту же зад. № 185): для того, чтобы выполнить работу въ одинъ день, надо не 24 человѣка, а въ 60 разъ больше, т.-е. 1440 рабочихъ; если же будутъ работать только 45 человѣкъ, то имъ потребуется не одинъ день, а во столько разъ больше, т.-е. столько дней, сколько разъ 45 содержится въ 1440.

Какъ видно изъ приведенныхъ примѣровъ, способъ обратнаго приведенія къ единицѣ можетъ быть иногда очень удобенъ при рѣшеніи задачъ съ прямо пропорціональными величинами. Въ примѣненіи же къ задачамъ съ величинами обратно пропорціональными никакихъ выгодъ онъ не представляетъ.

4) *Способъ отношеній.*

— Тѣнь отъ прямо поставленной палки, вышиною въ 2 аршина, имѣетъ въ длину 3 аршина; а тѣнь отъ колокольни въ то же самое время имѣетъ въ длину 45 аршинъ. Какъ высока колокольня? (Задача № 183.)

Узнаемъ, во сколько разъ тѣнь отъ колокольни длиннѣе, чѣмъ тѣнь отъ палки, узнаемъ *отношеніе* длины одной тѣни къ длинѣ другой тѣни; для этого дѣлимъ 45 на 3; такъ какъ тѣнь отъ колокольни въ 15 разъ длиннѣе тѣни отъ палки, то колокольня въ 15 разъ выше палки: находимъ ея высоту, умноживъ 2 на 15.

— Колесо, имѣющее въ окружности 76 вершковъ, на нѣкоторомъ разстояніи обернулось 523 раза. Сколько разъ обернется на томъ же разстояніи другое колесо, окружность котораго равна 38-ми вершкамъ? (Задача № 186.)

Такъ какъ окружность второго колеса вдвое меньше, то число оборотовъ его будетъ вдвое больше: $523 \times 2 = 1046$.

Первая изъ приведенныхъ задачъ содержитъ величины прямо пропорціональныя, вторая — обратно пропорціональныя.

Способъ отношеній называютъ также *способомъ пропорціональнаго измѣненія*.

Этимъ способомъ рѣшаются задачи №№ 212—215 и №№ 244 и 245 (стр. 71) второго выпуска (четыре дѣйствія въ предѣлѣ тысячи).

5) *Способъ сложенія кратныхъ частей.* Онъ состоитъ въ томъ, что мы переходимъ отъ одного числа къ другому, напр. отъ 24-хъ къ 20-ти, представляя второе число, какъ сумму кратныхъ частей перваго: $20=12+8$, гдѣ 12 есть половина 24-хъ, а 8 — треть 24-хъ.

— Пудъ муки стоитъ 70 коп. Сколько стоятъ 28 фунтовъ этой муки? — 20 фунт. составляютъ полпуда и стоятъ 35 копеекъ ($70:2=35$); 8 фунт. — это пятая часть пуда, они стоятъ 14 коп. ($70:5=14$); слѣд., 28 фунт. муки стоятъ 49 копеекъ ($35+14=49$).

Этотъ способъ, довольно часто употребляемый въ житейскихъ расчетахъ, требуетъ въ разныхъ случаяхъ различныхъ комбинацій и дается дѣтямъ вообще не легко. Мы помѣстили лишь такія задачи, рѣшаемыя этимъ способомъ (годъ второй, стран. 72):

— Рожь при перемолѣ даетъ $85^0/_0$ чистой муки. Сколько муки получится отъ перемола 350 пуд. ржи? (№ 224.) — 300 (3 сотни) пуд. ржи дадутъ 255 пуд. муки ($85\times3=255$), 50 (полсотни) пуд. ржи дадутъ $42^1/_2$ пуд. муки ($85:2=42^1/_2$); слѣд., отъ перемола 350 пуд. ржи получится $297^1/_2$ пуд. муки ($255+42^1/_2=297^1/_2$).

— Въ школѣ учится 120 дѣтей; дѣвочки составляютъ $40^0/_0$ всѣхъ учащихся. Сколько дѣвочекъ учится въ этой школѣ? (№ 225). — На 100 учащихся приходится 40 дѣвочекъ; на 20 учащихся ихъ придется 8, такъ какъ 20 въ 5 разъ меньше ста; всего 48 дѣвочекъ.

Изъ такъ наз. задачъ на сложное тройное правило полагаемъ достаточнымъ ограничиться лишь задачами, которыя рѣшаются приведеніемъ къ единицѣ (безъ внесенія дробей) и содержатъ такія числа, которыя позволяютъ сначала привести всѣ данныя къ единицѣ, а потомъ уже перейти къ другимъ ихъ значеніямъ. (№№ 188 и 189.)

— Для продовольствія 24 человѣкъ въ продолженіе 30-ти дней заготовлено 36 пуд. муки. Сколько муки надо заготовить для продовольствія 40 человѣкъ въ продолженіе 45-ти дней, если на каждаго идетъ въ день по стольку же муки? (Зад. № 188.)

Узнаемъ, сколько муки полагается въ одинъ день на одного человѣка. Для этого сначала найдемъ, сколько муки приходится въ одинъ день на 24 человѣка (36 пуд. = 1440 фунт.; 1440 : 30 = 48; 48 фунт.), а потомъ и на одного (48 : 24 = 2; 2 фунта). (Или въ обратномъ порядкѣ: сначала опредѣляемъ, сколько муки идетъ на одного человѣка въ 30 дней, а потомъ и въ одинъ день.) Затѣмъ находимъ, сколько муки потребуется на 40 человѣкъ, сначала въ одинъ день ($2 \times 40 = 80$; 80 фунт. = 2 пуда), а потомъ и въ 45 дней ($2 \times 45 = 90$; 90 пуд.). (Или въ обратномъ порядкѣ.)

Такое рѣшеніе дается дѣтямъ легче, нежели измѣненіе даннаго сначала въ зависимости отъ измѣненія одной величины, потомъ другой: сначала узнаемъ, сколько муки идетъ на одного человѣка въ 30 дней, затѣмъ — на 40 человѣкъ тоже въ 30 дней; далѣе находимъ, сколько муки надо для 40 человѣкъ въ одинъ день, и, наконецъ, сколько муки потребуется тоже для 40 человѣкъ въ продолженіе 45-ти дней.

Считаемъ нелишнимъ познакомить учениковъ съ понятіями «рабочій день», «рабочій часъ». Введеніе этихъ понятій позволяетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ удобно рѣшать задачи на тройное правило и соразмѣрное дѣленіе.

Рабочимъ днемъ называется день работы одного человѣка. Если, напр., нѣкоторую работу исполнили 12 человѣкъ въ теченіе 5-ти дней, то вся работа сдѣлана въ 60 рабочихъ дней. При расчетѣ за работу, если только она сдана поденно, а не сдѣльно, высчитываютъ число рабочихъ дней. Пусть, напр., условленная поденная цѣна была 90 коп.; 2 дня работало по 3 человѣка, 3 дня — по 12-ти человѣкъ и одинъ день (послѣдній) — 10 человѣкъ; всѣхъ рабочихъ дней было $6 + 36 + 10 = 52$; $90 \times 52 = 4\,680$; слѣдуетъ за работу 46 р. 80 к. Подобное же значеніе имѣетъ рабочій часъ.

При помощи этихъ понятій рѣшимъ задачи:

— Подрядчикъ взялся починить дорогу въ 24 дня; для этого ему надо было ставить на работу по 30 человѣкъ ежедневно; но первые 10 дней работало только по 23 человѣка. По скольку человѣкъ въ день долженъ потомъ ставить подрядчикъ на работу, чтобы окончить ее къ сроку? (Зад. № 187.)

Для исполненія работы требуется 720 рабочихъ дней ($24 \times 30 = 720$); первые 10 дней работало по 23 человѣка, что̀ составляетъ 230 рабочихъ дней; для окончанія работы надо еще 490 рабочихъ дней ($720 - 230 = 490$); а такъ какъ до срока остается 14 дней ($24 - 10 = 14$), то ежедневно надо ставить на работу по 35 человѣкъ ($490 : 14 = 35$).

— Помѣщикъ нанялъ рабочихъ сжать рожь съ поля; 25 человѣкъ, работая ежедневно по 12-ти часовъ, въ 8 дней сжали третью часть всей ржи. Сколько человѣкъ надо прибавить къ прежнимъ рабочимъ для того, чтобы всѣ вмѣстѣ, работая въ день по 10 часовъ, дожали остальную рожь въ 6 дней? (Зад. № 191.)

25 человѣкъ работали 8 дней; это составляетъ 200 рабочихъ дней; въ день работали они по 12 часовъ, слѣд., было употреблено 2 400 рабочихъ часовъ ($12 \times 200 = 2\,400$); въ 2 400 рабочихъ часовъ была сдѣлана только треть работы; осталось двѣ трети, т.-е. вдвое больше, чѣмъ сдѣлано; на это потребуется 4 800 рабочихъ часовъ; оставшаяся работа должна быть окончена въ 6 дней, при занятіяхъ по 10 час. въ день; значитъ, на каждаго человѣка придется по 60 рабочихъ часовъ ($10 \times 6 = 60$); работниковъ потребуется столько, сколько разъ 60 содержится въ 4 800, т.-е. 80 человѣкъ; слѣдовательно, къ прежнимъ рабочимъ надо прибавить 55 человѣкъ ($80 - 25 = 55$).

II типъ. Здѣсь помѣстили мы такъ наз. *задачи на правило смѣшенія* (№№ 192—197).

Ариѳметическое содержаніе подобныхъ задачъ можетъ быть выражено такъ:

1) Даны числа 4 и 9; первое изъ нихъ берется 3 раза, второе 2 раза; найти среднее ариѳметическое всѣхъ этихъ чиселъ, т.-е. 3-хъ четверокъ и 2-хъ девятокъ[1]). *Рѣшеніе*: всѣ четверки составляютъ число 12 ($4 \times 3 = 12$), а девятки — 18 ($9 \times 2 = 18$); всѣ четверки и десятки вмѣстѣ равны 30 ($12 + 18 = 30$); число всѣхъ чиселъ 5 (3 четверки и 2 девятки); среднее ариѳметическое будетъ 6 ($30 : 5 = 6$).

Обратныя задачи:

2) Взяты два числа, изъ которыхъ одно (назовемъ его первымъ) есть 4, другое же (второе) неизвѣстно; первое (4) повторено 3 раза, второе 2 раза; среднее ариѳметическое всѣхъ этихъ чиселъ оказалось равнымъ 6-ти. Найти второе число. *Рѣшеніе:* всѣхъ чиселъ взято 5 (3 первыхъ и 2 вторыхъ), среднее ариѳметическое ихъ 6; слѣд., ихъ сумма

---

[1]) Среднимъ ариѳметическимъ нѣсколькихъ чиселъ, напр. трехъ чиселъ 6, 7 и 11, называется ихъ сумма, дѣленная на число ихъ: $(6 + 7 + 11) : 3 = 8$.

равна 30-ти ($6 \times 5 = 30$); 3 первыхъ числа (3 четверки) составляютъ 12; значитъ, 2 вторыхъ равны 18-ти ($30 - 12 = 18$); второе число есть 9 ($18 : 2 = 9$).

3) Даны два числа 4 и 9; взято нѣсколько четверокъ и нѣсколько девятокъ, всего 5 чиселъ; среднее ариѳметическое ихъ оказалось равнымъ 6-ти. Сколько взято четверокъ и сколько девятокъ? О рѣшеніи такихъ задачъ мы скажемъ ниже, въ статьѣ «болѣе трудныя задачи». (Глава VII, § 67.)

4) Даны два числа 4 и 9; то и другое взято слагаемымъ нѣсколько разъ; среднее ариѳметическое всѣхъ этихъ чиселъ равно 6-ти; первое число (4) взято 3 раза. Сколько разъ взято второе число? *Рѣшеніе:* когда составляется среднее ариѳметическое, тогда взятыя числа (четверки и девятки) уравниваются, обращаясь въ шестерки; для этого надо отъ каждой девятки отнять по 3 единицы ($9 - 6 = 3$) и всѣ эти единицы распредѣлить между четверками, прибавляя по 2 единицы къ каждой четверкѣ ($6 - 4 = 2$); такъ какъ всѣхъ четверокъ взято 3, и къ каждой изъ нихъ надо прибавить по 2 единицы, то ко всѣмъ четверкамъ придется приложить 6 ед. ($2 \times 3 = 6$), которыя должно отнять отъ девятокъ; отъ каждой девятки отнимается по 3 ед., слѣд. 6 ед. получается отъ 2-хъ девятокъ ($6 : 3 = 2$); итакъ, девятокъ взято 2.

Первыя двѣ задачи наз. задачами I рода на смѣшеніе. Конкретнымъ содержаніемъ ихъ служитъ, обыкновенно, составленіе смѣси, при чемъ искомымъ является *качество* или смѣси (зад. 1), или одного изъ смѣшиваемыхъ веществъ (зад. 2), которыхъ можетъ быть и болѣе двухъ. Подъ качествомъ мы разумѣемъ цѣну вѣсовой единицы (во что обойдется фунтъ смѣшаннаго чаю? сколько стоитъ пудъ муки перваго сорта?), вѣсъ единицы емкости (сколько вѣситъ мѣра смѣшаннаго овса?), пробу сплава, крѣпость раствора и т. п. Такія задачи принадлежатъ къ задачамъ чисто ариѳметическимъ.

Двѣ вторыя задачи наз. задачами II рода на смѣшеніе. Искомымъ служитъ здѣсь *количество* или обоихъ смѣшиваемыхъ веществъ, или одного изъ нихъ. Эти задачи можно отнести къ задачамъ алгебраическаго характера.

Въ разсматриваемомъ отдѣлѣ мы помѣщаемъ обѣ задачи I рода (№№ 192 и 193; №№ 194 и 195) и лишь послѣд-

нюю изъ задачъ II рода, какъ болѣе легкую (№№ 196 и 197).

Приведемъ рѣшеніе задачи № 197.

— Скупщикъ купилъ 40 овчинъ по 1 р. 20 к. за штуку и нѣсколько штукъ по 1 р. 50 к.; продавши всѣ эти овчины по 1 р. 40 к., онъ имѣлъ 5 р. 50 к. прибыли. Сколько купилъ онъ всѣхъ овчинъ?

Продавши 40 овчинъ по 1 р. 40 к., скупщикъ имѣлъ на штукѣ 20 к. прибыли (1 р. 40 к.—1 р. 20 к.=20 к.), а всего прибыли 8 р. (20×40=800; 8 р.). Въ дѣйствительности же полученная имъ прибыль равна 5 р. 50 к.; отсюда слѣдуетъ, что остальныя овчины онъ продалъ съ убыткомъ въ 2 р. 50 к. (8 р.—5 р. 50 к.=2 р. 50 к.); каждую изъ этихъ овчинъ онъ продалъ ниже своей цѣны на 10 к. (1 р. 50 к.—1 р. 40 к.=10 к.); стало-быть, этихъ овчинъ было 25 штукъ (250:10=25); а всѣхъ 40+25=65.

III типъ: *задачи на соразмѣрное (пропорціональное) дѣленіе* (№№ 198—203).

Задачи эти родственны задачамъ на троиное правило и могутъ бы рѣшаемы тѣми же способами, какіе приведены нами для задачъ I типа. Въ самомъ дѣлѣ, задача на соразмѣрное дѣленіе легко переходитъ въ задачу на тройное правило. Пояснимъ это примѣромъ.

— Два купца внесли для общей торговли: одинъ 6 500 р., другой 3 500 р.; спустя нѣкоторое время они получили 2 000 р. прибыли. Сколько изъ этой прибыли должно прійтись на долю каждаго?

Общій капиталъ участниковъ составляетъ 10 000 р. Имѣемъ задачу.

На 10 000 р. получено 2 000 р. прибыли. Сколько прибыли придется на 6 500 р.? На 3 500 р.?

Мы помѣстили такія задачи на соразмѣрное дѣленіе, которыя могутъ быть рѣшены *способомъ приведенія къ единицѣ* (№№ 198—200) и *способомъ обратнаго приведенія къ единицѣ* (№ 201).

— Двѣ артели заработали вмѣстѣ 1625 р. Въ одной было 40 человѣкъ, въ другой 25. Какъ подѣлить заработанныя деньги между артелями, если на долю каждаго работника той и другой артели должно прійтись поровну? (Зад. № 198.)

Способъ приведенія къ единицѣ. Узнаемъ, сколько долженъ получить *одинъ* работникъ; для этого опредѣляемъ, сколько всѣхъ работниковъ въ обѣихъ артеляхъ, и общій заработокъ дѣлимъ на ихъ число.

— Два брата купили 75 десятинъ земли по одной цѣнѣ. Сколько десятинъ придется каждому, если одинъ заплатилъ за землю 2 295 р., а другой 1 080 р.? (Зад. № 201, вторая.)

Способъ обратнаго приведенія къ единицѣ. Опредѣливъ стоимость всей покупки (2 295+1 080=3 375; 3 375 р.), узнаемъ цѣну *одной* десятины (3 375 : 75=45; 45 р.). Затѣмъ находимъ, сколько десятинъ земли можно купить на тѣ деньги, которыя заплатилъ каждый изъ братьевъ (2295 : 45=51; 51 дес.; 1 080 : 45=24; 24 дес.).

Задача № 199, въ которой требуется прибыль, равную 1 500 р., раздѣлить соразмѣрно капиталамъ 4 500 р. и 3 000 р., можетъ быть рѣшена тѣмъ и другимъ способомъ: можно узнать, сколько прибыли получено на *одинъ* рубль капитала (или на *одну* сотню рублей); это—приведеніе къ единицѣ; но можно также опредѣлить, съ какой суммы получается *одинъ* рубль прибыли; это—обратное приведеніе къ единицѣ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ удобно примѣняется *способъ отношеній.* Такъ, напр., дѣля 1 080 р. прибыли соразмѣрно капиталамъ 2 400 р., 3 000 р., и 1 800 р. (Зад. № 199, вторая), замѣчаемъ, что первый изъ этихъ капиталовъ составляетъ третью часть, а послѣдній четвертую часть общаго капитала (2 400+3 000+1 800=7 200); слѣд. на первый изъ нихъ приходится треть, на послѣдній четверть общей прибыли.

IV типъ. Ариѳметическое содержаніе задачъ этого типа таково. Данное число, напр. 112, разлагается на числа извѣстной величины, напр. на пятки и девятки, такъ, чтобы тѣхъ и другихъ чиселъ (пятковъ и девятокъ) было поровну; спрашивается, по скольку? *Рѣшеніе:* одинъ пятокъ и одна девятка составляютъ 14; слѣд., пятковъ и девятокъ будетъ по стольку, сколько разъ 14 содержится въ 112, т.-е. по 8-ми (№№ 204—208).

Эти задачи имѣютъ сходство съ приведенными выше задачами на соразмѣрное дѣленіе, какъ видно изъ слѣдующихъ примѣровъ.

— Два работника заработали вмѣстѣ 54 р.; одинъ изъ нихъ работалъ 4 недѣли, другой 5 недѣль. Сколько изъ

этихъ денегъ долженъ получить каждый, если недѣльная плата тому и другому одинакова? Это—задача III типа. Здѣсь требуется 54 р. раздѣлить соразмѣрно времени работы.

— Два работника заработали вмѣстѣ 54 р.; одинъ изъ нихъ получалъ въ недѣлю по 4 р., другой по 5 р. Сколько изъ этихъ денегъ долженъ получить каждый, если они работали одинаковое время? Здѣсь требуется 54 р. раздѣлить соразмѣрно недѣльному заработку.

Но весьма часто подобныя задачи ограничиваются вопросомъ: сколько времени (по скольку недѣль) работалъ каждый?

Къ задачамъ разсматриваемаго типа принадлежатъ т. н. задачи о встрѣчѣ. При выводѣ способа рѣшенія этихъ задачъ, для наглядности, удобно воспользоваться чертежомъ. Сначала задача можетъ быть рѣшена непосредственно на чертежѣ; это можетъ служить подготовкою къ выводу пріема ея рѣшенія. — Изъ двухъ деревень, между которыми 28 верстъ, вышли въ одно время два пѣшехода, по одной и той же дорогѣ, навстрѣчу другъ другу; одинъ изъ нихъ проходитъ въ часъ по 4 версты, другой по 3 версты. Черезъ сколько часовъ послѣ своего выхода они встрѣтятся и на какомъ разстояніи отъ той и другой деревни? — Чертимъ прямую линію, изображающую дорогу; откладываемъ на ней 28 равныхъ частей, означающихъ версты; концы этой линіи принимаемъ за пункты отправленія (двѣ деревни). Отмѣчаемъ, гдѣ будутъ путники черезъ часъ, черезъ два и т. д., пока не доведемъ ихъ до встрѣчи. Затѣмъ выясняемъ, какими дѣйствіями рѣшается задача; при этомъ числовыя данныя лучше измѣнить, взявши напр. такую задачу (№ 205). — Отъ деревни до города 30 верстъ; крестьянинъ вышелъ изъ деревни въ городъ, а въ это самое время изъ города въ деревню выѣхалъ торговецъ, по той же дорогѣ; крестьянинъ проходилъ въ часъ по 3 версты, а торговецъ проѣзжалъ въ часъ по 7 верстъ. Черезъ сколько часовъ они встрѣтятся и на какомъ разстояніи отъ деревни и города? — Изобразивъ, попрежнему, дорогу отъ деревни до города прямой линіей, но уже безъ дѣленія ея на версты, спрашиваемъ. — Гдѣ встрѣтится крестьянинъ съ торговцемъ: на полдорогѣ или нѣтъ? Почему не на полдорогѣ? Пусть они встрѣтятся вотъ въ этомъ мѣстѣ (отмѣчается, приблизительно, точка встрѣчи). Знаемъ ли мы, сколько

верстъ прошелъ крестьянинъ, и сколько верстъ проѣхалъ торговецъ до этого мѣста (до встрѣчи)? — Мы не знаемъ этого. — А сколько верстъ должны они сдѣлать оба вмѣстѣ, для того, чтобы встрѣтиться? — 30 верстъ. — Не встрѣтятся ли они черезъ часъ? Почему нѣтъ? — Потому что въ часъ оба вмѣстѣ дѣлаютъ только 10 верстъ (3+7=10). — Черезъ сколько же часовъ они встрѣтятся? — Черезъ столько часовъ, сколько разъ 10 содержится въ 30-ти, т.-е. черезъ 3 часа.

Подобнымъ же образомъ, при помощи чертежа, можетъ быть выяснено рѣшеніе такихъ задачъ, гдѣ требуется узнать, черезъ сколько времени одинъ путникъ догонитъ другого: сначала рѣшаемъ задачу непосредственно на чертежѣ, отмѣчая, гдѣ будутъ путники черезъ часъ, черезъ два и т. д.; потомъ (измѣнивъ числовыя данныя) дѣлаемъ чертежъ уже безъ обозначенія отдѣльныхъ верстъ и намѣчаемъ приблизительно то мѣсто, гдѣ одинъ догонитъ другого; мы не знаемъ, сколько верстъ сдѣлаетъ тотъ и другой путникъ до этого мѣста; но намъ извѣстно, на сколько верстъ одинъ сдѣлаетъ больше другого: на столько, на сколько одинъ былъ впереди другого во время отправленія (сколько верстъ между тѣми мѣстами, откуда они вышли въ одно время); зная это и узнавъ, на сколько верстъ одинъ дѣлаетъ больше другого въ часъ, найдемъ затѣмъ, черезъ сколько часовъ одинъ догонитъ другого.

Эти задачи (№№ 207 и 208) мы помѣстили здѣсь съ цѣлью сопоставленія ихъ съ задачами о встрѣчѣ (по сходству ихъ конкретнаго содержанія), хотя по содержанію ариѳметическому, задачи эти должны быть отнесены къ слѣдующему, V типу.

V типъ. Ариѳметическое содержаніе задачъ этого типа можетъ быть выражено такъ.

1) Неизвѣстное число повторено (взято) 9 разъ, оно же повторено 4 раза; первый результатъ (произведеніе) на 35 больше второго. Найти неизвѣстное. *Рѣшеніе:* 9 неизвѣстныхъ больше 4 неизвѣстныхъ на 5 неизвѣстныхъ и въ то же время на 35 единицъ; слѣд., 5 неизвѣстныхъ составляютъ 35; искомое равно 7 (35:5=7).

Въ этой задачѣ неизвѣстно множимое. Искомымъ можетъ служить и множитель.

2) Даны два числа 9 и 5; то и другое число повторено (взято) одинаковое число разъ; первый результатъ (произведеніе) на 32 больше второго. По скольку взято девятокъ и пятковъ? *Рѣшеніе:* одна девятка больше одного пятка на 4; девятокъ и пятковъ взято по стольку, сколько разъ 4 содержится въ 32, т.-е. по 8.

Эта задача отличается отъ задачъ IV типа тѣмъ, что вмѣсто суммы здѣсь является разность.

Итакъ, задачи разсматриваемаго типа состоятъ въ томъ, чтобы найти неизвѣстное число по извѣстной разности между произведеніями неизвѣстнаго на два данныхъ числа или между произведеніями двухъ данныхъ чиселъ на неизвѣстное.

Способъ рѣшенія такихъ задачъ называютъ иногда *способомъ остатковъ* (разностей).

Вниманіе рѣшающаго должно быть обращено: 1) на разность между результатами (эта разность весьма часто бываетъ замаскирована) и 2) на причину этой разности. Приведемъ примѣры.

— Купецъ въ уплату своего долга предлагаетъ: или 210 арш. сукна и сверхъ того 70 р. деньгами, или 180 арш. этого сукна и 175 руб. деньгами. Сколько стоитъ аршинъ этого сукна? (Задача № 209.)

Прежде всего обращаемъ вниманіе на то, что въ первомъ случаѣ дается деньгами меньше, именно меньше на 105 руб. (175—70=105). Затѣмъ соображаемъ: причина этого заключается въ томъ, что въ первомъ случаѣ предлагается сукна больше, именно больше на 30 арш. (210—180=30). Отсюда выводимъ: 30 арш. сукна стоятъ 105 р.; цѣна одного аршина равна 3 р. 50 к.

— Помѣщикъ хочетъ прикупить луговой земли и для этого продаетъ участокъ лѣсу; если онъ продастъ его по 120 руб. за десятину, то для покупки луга ему не хватитъ 360 р.; а если продастъ лѣсъ по 150 р. за десятину, то отъ покупки луга у него останется 300 р. Сколько десятинъ лѣсу хочетъ продать помѣщикъ? Сколько стоитъ лугъ, который онъ желаетъ купить? (Задача № 212.)

Обращаемъ вниманіе на то, что во второмъ случаѣ помѣщикъ получитъ за лѣсъ больше на 660 р. (360+300=660). Это — оттого, что онъ возьметъ за десятину больше на 30 р. (150—120=30). Выводъ: въ лѣсномъ участкѣ столько де-

сятинъ, сколько разъ 30 содержится въ 660, т.-е. 22 десятины. Цѣна луга равна цѣнѣ 22 десятинъ лѣса, считая по 120 р. за десятину, съ прибавленіемъ 360 р.; или равна цѣнѣ тѣхъ же 22 десятинъ лѣсу, считая по 150 р. за десятину, за вычетомъ 300 р.

VI типъ. *Дѣленіе числа на части, разностно неравныя* (№№ 215—219).

— Число 20 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы одна была на 4 больше другой.

Способы рѣшенія такихъ задачъ могутъ быть названы *способами уравниванія неизвѣстныхъ*. Уравнять неизвѣстныя можно тремя пріемами.

1) Отнимаемъ отъ большаго числа 4, для того, чтобы сдѣлать его равнымъ меньшему. Сумма ихъ также уменьшится на 4 и обратится въ 16 (20—4=16). Итакъ, два меньшихъ числа равны 16; меньшее число будетъ 8 (16 : 2=8); большее — 12 (8+4=12).

2) Прибавимъ къ меньшему числу 4, для того, чтобы сравнять его съ бо́льшимъ. Сумма также увеличится на 4 и обратится въ 24 (20+4=24). Итакъ, два большихъ числа равны 24; большее число будетъ 12 (24 : 2=12); меньшее — 8 (12—4=8).

3) Уравнивая неизвѣстныя предыдущими способами, мы отнимали отъ большаго 4 единицы и откладывали ихъ *на сторону* или прибавляли къ меньшему 4 единицы *со стороны;* отъ этого сумма неизвѣстныхъ измѣнялась: уменьшалась или увеличивалась. Но можно уравнять неизвѣстныя и такъ: отнять нѣсколько единицъ отъ большаго и придать ихъ къ меньшему.

Легко понять, что для этого надо отъ большаго отнять, а къ меньшему прибавить половину ихъ разности, т.-е. 2. Отъ такого уравниванія неизвѣстныхъ сумма ихъ, очевидно, не измѣнится; поэтому, раздѣливъ 20 пополамъ, узнаемъ, во что обратится каждое число. Большее число обратилось въ 10, когда отъ него отняли 2; слѣд. оно равно было 12. Меньшее число обратилось въ 10, когда къ нему прибавили 2; слѣд. оно равно было 8.

Первый изъ изложенныхъ пріемовъ весьма удобно можетъ быть выясненъ при помощи наглядныхъ пособій. Учитель предлагаетъ дѣтямъ задачу: 20 кубиковъ раздать двумъ

ученикамъ такъ, чтобы одинъ получилъ на 4 кубика больше другого (лишку 4 кубика). Дѣти, обыкновенно, смекаютъ, какъ это сдѣлать: дать одному лишніе 4 кубика, остальные кубики раздѣлить между ними пополамъ. Затѣмъ надо перевести этотъ процессъ на ариѳметическій языкъ. — Мы дѣлили сейчасъ 20 кубиковъ между двумя учениками; теперь раздѣлимъ 20 единицъ на двѣ такія части, чтобы въ одной было 4 единицами больше, чѣмъ въ другой. Какъ же это сдѣлать? — Надо отложить въ одну часть (въ бóльшую) лишнія 4 единицы и узнать, сколько единицъ останется (сколько единицъ придется дѣлить поровну); для этого должно отъ 20 отнять 4; получится 16. Эти 16 единицъ надо раздѣлить пополамъ (раздѣлить между обѣими частями поровну); получится 8. Въ меньшей части и будетъ только 8 единицъ; а въ большей будетъ 8 единицъ, да еще раньше отложенныя 4 единицы: чтобы найти бóльшую изъ частей, надо къ 8 прибавить 4.

При рѣшеніи задачъ съ конкретнымъ содержаніемъ вопросъ, ведущій къ уравниванію неизвѣстныхъ, ставится обыкновенно въ такой формѣ: чему были бы равны обѣ части, если бъ онѣ были одинаковы (если бы въ нихъ было поровну)? — Въ имѣніи пахотной и луговой земли вмѣстѣ 1006 десятинъ, при томъ луговой земли на 122 десятины больше, чѣмъ пахотной. Сколько пахотной и сколько луговой земли въ этомъ имѣніи? (Задача № 215.) — Первый вопросъ: сколько земли было бы въ имѣніи, если бъ луговой и пахотной было поровну? (если бъ луговой было бы столько, сколько есть пахотной; если бы, напр., было продано 122 десятины луга). Второй вопросъ: по скольку было бы тогда той и другой земли? (или — чтó то же — сколько десятинъ пахотной земли въ имѣніи?)

По усвоеніи перваго пріема, второй пріемъ можетъ быть объясненъ прямо на задачѣ. — Два сына и дочь получили въ наслѣдство 9 000 р.: сыновья поровну, а дочь — на 1 500 р. меньше, чѣмъ каждый сынъ. По скольку получили сыновья, и сколько получила дочь? (Задача № 216.) — Вмѣсто того, чтобы узнавать, сколько получили бы всѣ дѣти, если бъ сыновьямъ назначено было столько же, сколько назначено дочери, — узнаемъ, сколько получили бы всѣ дѣти, если бъ дочери назначено было столько же, сколько каждому сыну.

Третій пріемъ, вообще, труднѣе, и его можно опустить. Онъ легко и удобно примѣняется лишь къ такимъ задачамъ, въ которыхъ полуразность искомыхъ дана, какова, напр., задача: въ двухъ корзинахъ вмѣстѣ было 300 яблоковъ; когда изъ одной корзины переложили въ другую 50 штукъ, тогда въ обѣихъ корзинахъ стало яблоковъ поровну; по скольку яблоковъ было сначала въ каждой корзинѣ?

Уравнивая неизвѣстныя, мы замѣняемъ одно изъ нихъ другимъ, дѣлаемъ подстановку одного на мѣсто другого. Поэтому изложенный способъ уравниванія неизвѣстныхъ (пріемы первый и второй) можетъ быть также названъ *способомъ подстановки, или замѣны.* (Третій пріемъ замѣняетъ оба неизвѣстныхъ новымъ, которое оказывается равнымъ ихъ полусуммѣ.) — Хозяинъ купилъ двухъ коровъ и лошадь, все за 230 р.; за коровъ заплатилъ онъ поровну, а за лошадь на 65 р. дороже, чѣмъ за каждую корову. По скольку заплатилъ онъ за корову и сколько за лошадь? (Задача № 216, вторая.) — Положимъ, что вмѣсто лошади куплена корова въ ту же цѣну, какъ и прочія; узнаемъ, сколько пришлось бы заплатить за трехъ коровъ.

VII типъ. *Дѣленіе числа на части, кратно неравныя.* (№№ 220—227).

— Число 28 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы одна изъ нихъ была въ 3 раза больше другой.

Это — простѣйшія задачи на пропорціональное дѣленіе, къ которому принадлежатъ и приведенныя выше задачи III типа.

Способы рѣшенія.

1) Изобразимъ меньшее искомое число какимъ-нибудь знакомъ, напр. крестикомъ; тогда большее изобразится тремя крестиками, а данное число 28 — четырьмя крестиками. Крестикъ — меньшее число — составляетъ *часть* (четвертую) даннаго числа 28. Итакъ, положимъ, что меньшее число равно одной части; тогда большее будетъ равно тремъ такимъ частямъ; въ обоихъ вмѣстѣ будетъ 4 части ($1+3=4$), которыя составляютъ 28. Раздѣливши 28 на 4, узнаемъ величину одной части и вмѣстѣ съ тѣмъ меньшее число. Умноживъ 7 на 3, находимъ величину трехъ частей, то-есть большее число.

Примѣчаніе. Если меньшее искомое будемъ называть словами «меньшая часть», другое — «большая часть», т.-е. такъ, какъ они названы въ задачѣ,— то при рѣшеніи ея будемъ выражаться: положимъ, что меньшая часть равна одной *долѣ*, тогда бо́льшая будетъ равна тремъ такимъ *долямъ*.

Этотъ способъ пропорціональнаго дѣленія назовемъ *способомъ частей.*

2) Положимъ, что меньшее искомое равно 1 единицѣ: тогда большее равно будетъ 3 единицамъ. Провѣримъ, такъ ли это на самомъ дѣлѣ. По нашему предположенію выходитъ, что оба числа вмѣстѣ равны 4 единицамъ ($1+3=4$), тогда какъ на самомъ дѣлѣ они составляютъ 28 единицъ. Слѣдовательно, — выразимся такъ — мы ошиблись въ 7 разъ ($28:4=7$), т.-е. предположенныя нами числа въ 7 разъ меньше, чѣмъ они въ дѣйствительности. Итакъ, одно искомое — не единица, а въ 7 разъ больше, т.-е. 7 ед. ($1\times7=7$); другое искомое не 3 ед., а въ 7 разъ больше, т.-е. 21 ($3\times7=21$).

Такой способъ рѣшенія назовемъ *способомъ повѣрки.* Его называютъ также *способомъ повѣряемаго допущенія* и *способомъ подобія**).

3) Такъ какъ второе искомое втрое больше перваго, то мы можемъ *замѣнить* его тремя первыми: отъ этого сумма ихъ не измѣнится. Тогда будемъ имѣть: 4 меньшихъ числа равны 28.

Такое разсужденіе есть *способъ подстановки, или замѣны.*

Примѣнимъ всѣ изложенные способы къ рѣшенію задачи № 220.

— Портной купилъ кусокъ драпу и кусокъ сукна, заплативши за оба 480 р.; кусокъ драпу въ 2 раза дороже, чѣмъ кусокъ сукна. Сколько стоитъ кусокъ сукна и сколько кусокъ драпу?

1) *Способъ частей.* Положимъ, что цѣна куска сукна будетъ одна часть (кусокъ сукна стоитъ одну часть); тогда цѣна куска драпу будетъ двѣ части (кусокъ драпу стоитъ двѣ части). Всѣхъ частей—3 ($1+2=3$). Узнаемъ, чему равна одна часть ($480:3=160$); за сукно портной заплатилъ

---

[1]) Послѣднее названіе объясняется тѣмъ, что предположенныя нами числа (1 и 3) *подобны* искомымъ въ томъ смыслѣ, что находятся между собою въ такомъ же отношеніи, какъ искомыя: одно втрое больше другого.

160 р.; потомъ найдемъ, чему равны 2 части ($160 \times 2 = 320$); кусокъ драпу стоитъ 320 р.

2) *Способъ повѣрки.* Положимъ, что кусокъ сукна стоитъ 1 рубль; тогда кусокъ драпу стоилъ бы 2 рубля; а оба вмѣстѣ—3 рубля. Но они стоятъ оба вмѣстѣ не 3 рубля, а 480 рублей; слѣдовательно, мы ошиблись въ 160 разъ ($480 : 3 = 160$). Кусокъ сукна стоитъ не 1 рубль, а въ 160 разъ больше, т.-е. 160 р. ($1 \times 160 = 160$); кусокъ драпу стоитъ не 2 рубля, а въ 160 разъ больше, т.-е. 320 р. ($2 \times 160 = 320$).

3) *Способъ замѣны.* Такъ какъ кусокъ драпу вдвое дороже, чѣмъ кусокъ сукна, то на деньги, заплаченныя за драпъ, можно купить 2 куска сукна. Слѣдовательно, на 480 р. можно купить 3 куска сукна ($1 + 2 = 3$). Теперь мы можемъ узнать, сколько стоитъ кусокъ сукна; а узнавши это, найдемъ и цѣну куска драпу.

Замѣтимъ, что изъ приведенныхъ трехъ способовъ дѣтямъ легче всего дается первый.

Въ разсматриваемой группѣ задачъ мы помѣстили и такія задачи, въ которыхъ кратное дѣленіе соединяется съ разностнымъ (№№ 224 и 225). Въ двухъ изъ нихъ (№ 224) уравниваніе достигается уменьшеніемъ большаго числа (типъ VI, пріемъ первый), въ двухъ другихъ (№ 225)—увеличеніемъ меньшаго (типъ VI, пріемъ второй).

— У помѣщика всей земли 1130 десятинъ: пахотной земли на 85 десятинъ меньше, чѣмъ луговой; лѣсу — въ 6 разъ меньше, чѣмъ пахотной; а усадебной земли въ 16 разъ меньше, чѣмъ лѣсу. Сколько у него пахотной земли, луговой, лѣсу и усадебной земли? (Задача № 224).

Рѣш. Уменьшимъ количество луговой земли на 85 десятинъ и узнаемъ, сколько было бы всей земли, если бъ луговой было столько же, сколько есть пахотной: $1130 - 85 = 1045$; 1045 десятинъ. Имѣемъ задачу: всей земли 1045 дес.; пахотной и луговой поровну, лѣсу—въ 6 разъ меньше, чѣмъ пашни или луговъ, усадебной—въ 16 разъ меньше, чѣмъ лѣсу; сколько земли каждаго рода? Положимъ, что усадебной земли 1 часть (ея меньше всего); тогда лѣсу 16 частей, пашни и луговъ по 96 частей ($16 \times 6 = 96$).

— Три артели заработали вмѣстѣ 1640 руб.; вторая заработала втрое больше первой, а третья — на 285 руб.

меньше второй. Сколько заработала каждая артель? (Задача № 225.)

Рѣш. Увеличимъ получку третьей артели на 285 руб. и узнаемъ, сколько получили бы всѣ артели, если бъ вторая и третья заработали поровну (если бъ третья заработала столько, сколько заработала вторая): 1640+285=1925; 1925 р. Имѣемъ задачу: три артели заработали вмѣстѣ 1925 р., при чемъ двѣ изъ нихъ поровну, а одна (первая)— втрое меньше, чѣмъ каждая изъ этихъ двухъ. Заработокъ первой артели — 1 часть, второй и третьей по 3 части.

Здѣсь же привели мы и такія задачи, въ которыхъ отыскиваются кратно неравныя числа по данной разности ихъ (№№ 226 и 227)[1]).

Способы рѣшенія остаются прежніе.

— Торговецъ купилъ партію чая и партію сахару; за чай заплатилъ онъ въ 4 раза дороже и отдалъ за него на 630 руб. больше, чѣмъ за сахаръ. Сколько заплатилъ онъ за чай и сколько за сахаръ? (Задача № 226.)

1) *Способъ частей.* Цѣна сахару — 1 часть, цѣна чаю — 4 части; чай дороже сахару на 3 части (4—1=3) и вмѣстѣ съ тѣмъ на 630 руб.; слѣд., 3 части составляютъ 630 руб.

2) *Способъ повѣрки.* Положимъ, что партія сахару стоитъ 1 рубль; тогда партія чаю стоила бы 4 руб. и была бы дороже на 3 руб. Но такъ какъ чай дороже сахару на 630 р., то мы ошиблись въ 210 разъ (630 : 3=210).

3) *Способъ замѣны.* На деньги, заплаченныя за чай, можно было бы купить 4 партіи сахару. Значитъ, 4 партіи сахару дороже, чѣмъ одна партія сахару, на 630 руб., т.-е. 3 партіи сахару стоятъ 630 руб.

Здѣсь, какъ и раньше, легче всего дается дѣтямъ первый способъ.

Приведемъ еще рѣшеніе задачи № 227.

— Въ одномъ закромѣ было овса на 35 мѣръ больше, чѣмъ въ другомъ; когда въ первый ссыпали еще 45 мѣръ,

---

[1]) Разсмотрѣнное нами дѣленіе даннаго числа на части, кратно неравныя, можетъ быть названо отысканіемъ кратно неравныхъ чиселъ по данной ихъ суммѣ.

а изъ второго взяли 160 мѣръ, тогда въ первомъ стало овса въ 3 раза больше, чѣмъ во второмъ. Сколько мѣръ овса было сначала въ каждомъ закромѣ?

Рѣш. Если бы, ссыпавши еще 45 мѣръ въ первый закромъ, изъ второго закрома не брали бы овса, то въ первомъ стало бы на 80 мѣръ больше, чѣмъ во второмъ (35+ +45=80). Но такъ какъ изъ второго при этомъ взяли 160 мѣръ, то въ первомъ стало больше, чѣмъ во второмъ, на 240 мѣръ (80+160=240) и притомъ больше въ 3 раза. Во второмъ стала 1 часть, въ первомъ —3 части, больше на 2 части, которыя и составляютъ 240 мѣръ. Узнавши, сколько овса оказалось въ каждомъ закромѣ, найдемъ, сколько овса было въ каждомъ изъ нихъ сначала.

VIII типъ. (№№ 228—230.) Къ этому типу отнесли мы задачи такого рода:

— Торговецъ продалъ въ одно мѣсто 130 саженъ березовыхъ и 170 саженъ осиновыхъ дровъ за 1460 руб.; а въ другое мѣсто, по тѣмъ же цѣнамъ, продалъ онъ 130 саженъ березовыхъ дровъ и 112 саженъ осиновыхъ за 1228 руб. Почемъ продавалъ онъ сажень тѣхъ и другихъ дровъ? (Задача № 228.)

Вниманіе рѣшающаго должно быть обращено: 1) на различіе результатовъ, даваемыхъ въ двухъ условіяхъ задачи, и 2) на причину этого различія. За первую партію дровъ торговецъ взялъ больше на 232 руб. (1460—1228=232), чѣмъ за вторую. Такъ какъ березовыхъ дровъ въ обѣихъ партіяхъ поровну, то первая дороже второй только потому, что въ ней больше осиновыхъ дровъ, именно больше на 58 саж. (170—112=58). Отсюда заключаемъ, что 58 саж. осиновыхъ дровъ стоятъ 232 руб. Узнавъ цѣну сажени осиновыхъ дровъ (232:58=4; 4 руб.), найдемъ цѣну сажени березовыхъ изъ того или другого условія задачи, напр. изъ перваго: вычтя изъ 1460 руб. стоимость 170 саж. осиновыхъ дровъ (4×170=680; 680 руб.), опредѣлимъ цѣну 130 саж. березовыхъ (1460—680=780; 780 руб.), а затѣмъ одной сажени (780:130=6; 6 руб.).

Изложенный способъ рѣшенія называютъ иногда *способомъ исключенія неизвѣстнаго посредствомъ вычитанія.*

Въ приведенной задачѣ искомыя (цѣна сажени тѣхъ и другихъ дровъ) служили множимыми. Искомыя могутъ

явиться и въ видѣ множителей, какъ это имѣетъ мѣсто въ слѣдующей задачѣ:

— Разносчикъ думалъ продать всѣ бывшія у него яблоки по 25 коп. за десятокъ, а апельсины — по 80 коп. за десятокъ, и выручить за весь товаръ 28 руб. 75 коп.; яблоки онъ продалъ по 25 коп., а апельсины — только по 70 коп. за десятокъ, и выручилъ за все 26 руб. 25 коп. Сколько десятковъ яблоковъ и апельсиновъ было у разносчика? (Задача № 230.)

Рѣш. Разносчикъ выручилъ меньше, чѣмъ думалъ, на 2 руб. 50 коп. (28 руб. 75 коп. — 26 руб. 25 коп. = 2 руб. 50 коп.). Яблоки продалъ онъ за ту же цѣну, какъ и предполагалъ; слѣд. недовыручка произошла только отъ того, что апельсины пришлось ему продать дешевле, чѣмъ онъ думалъ, именно дешевле 10-ью копейками (80 — 70 = =10; 10 коп.) за десятокъ. Отсюда заключаемъ: апельсиновъ было столько десятковъ, сколько разъ 10 коп. содержатся въ 2 руб. 50 коп., т.-е. 25 десятковъ.

IX типъ. (№№ 231—234.) Здѣсь помѣстили мы такія задачи, которыя приводятъ къ отысканію цѣлаго по части[1]).

— Въ одномъ имѣніи $^7/_{20}$ всей земли занято пашней, $^9/_{20}$ — лугами, $^3/_{20}$ — лѣсомъ, остальныя 6 десятинъ — усадьбой. Сколько десятинъ земли въ этомъ имѣніи? (Задача № 231.) *Рѣш.* Опредѣлимъ, какая часть всей земли находится подъ пашней, лугами и лѣсомъ: $^7/_{20}+^9/_{20}+^3/_{20}=^{19}/_{20}$. Узнаемъ, какая часть всей земли занята усадьбой: $^{20}/_{20}-^{19}/_{20}=^1/_{20}$. Находимъ, сколько всей земли въ имѣніи: $^1/_{20}$ всей земли составляетъ 6 десятинъ, $^{20}/_{20}$ (вся земля) — 120 десятинъ ($6\times20=120$).

— Полкъ солдатъ долженъ былъ перейти изъ одного города въ другой; когда пройдено было $^7/_{10}$ всего пути, тогда оказалось, что осталось итти на 76 верстъ меньше полдороги. Сколько верстъ между этими городами? (Задача № 234.) *Рѣш.* Опредѣлимъ, какую часть всего пути оставалось итти: $^{10}/_{10}-^7/_{10}=^3/_{10}$. Узнаемъ, на сколько $^3/_{10}$ меньше $^1/_2$. $^1/_2-^3/_{10}=^5/_{10}-^3/_{10}=^2/_{10}=^1/_5$. Находимъ разстояніе между городами: $^1/_5$ этого разстоянія составляетъ 76 верстъ, а все разстояніе равно 380 вер. ($76\times5=380$).

---

[1]) Отысканіе цѣлаго по данной его части уже имѣло мѣсто среди упражненій съ дробями.

Изъ приведенныхъ девяти типовъ задачъ къ задачамъ алгебраическаго характера могутъ быть отнесены задачи типовъ VI и VII, а также послѣднія двѣ задачи II типа.

ГЛАВА VII.

Составныя именованныя числа.

55. Таблицы русскихъ мѣръ. Простыя именованныя числа проходятъ черезъ весь курсъ ариѳметики, постоянно встрѣчаясь въ задачахъ, рѣшая которыя, дѣти попутно знакомятся со многими мѣрами и ихъ единичными отношеніями (въ аршинѣ 16 вершковъ, пудъ содержитъ 40 фунтовъ и т. д.)[1]). Теперь — по изученіи дѣйствій надъ числами любой величины — слѣдуетъ привести въ порядокъ, въ систему, знакомыя дѣтямъ мѣры, дополнивши ихъ такими мѣрами и ихъ единичными отношеніями, которыхъ ученики еще не знаютъ.

Прежде всего должно повести бесѣду объ измѣреніи величинъ, а затѣмъ составить съ учениками таблицы мѣръ, указавши на то, что для измѣренія какой-либо величины существуетъ нѣсколько мѣръ, такъ какъ пользоваться только одною мѣрою было бы во всѣхъ случаяхъ неудобно.

— Что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько учениковъ въ классѣ?
— Надо сосчитать.
— А что надо сдѣлать, чтобы узнать длину класса?
— Надо ее смѣрить (измѣрить).
— Чѣмъ стали бы вы измѣрять длину класса?
— Аршиномъ.

Производится измѣреніе.

— Что еще можно измѣрить аршиномъ? Да, измѣрять можно длину, ширину, вышину, глубину, толщину. Что еще измѣряютъ? Когда покупаютъ или продаютъ рожь, считаютъ ли ее по зернамъ?
— Нѣтъ, ее мѣряютъ.
— Чѣмъ измѣряютъ рожь?
— Четвертями, мѣрами.

---

[1]) Раньше встрѣчались и составныя именованныя числа, выраженныя въ рубляхъ и копейкахъ (1358 руб. 75 коп.): такія числа, вслѣдствіе простоты единичнаго отношенія, можно ввести въ задачи и до прохожденія особой статьи объ именованныхъ числахъ.

— Что еще измѣряютъ четвертями, мѣрами?

— Овесъ, горохъ, картофель, огурцы, лукъ, морковь...

— Такіе предметы, которые измѣряютъ четвертями, мѣрами, называются *сыпучими тѣлами*. Когда продаютъ молоко, вино, считаютъ ли *жидкія тѣла*, напр., по каплямъ?

— Нѣтъ, ихъ мѣряютъ: бутылками, кувшинами, ведрами.

— Когда сыпучія тѣла измѣряютъ, напр., мѣрами, а жидкія ведрами, то узнаютъ, сколько мѣста занимаютъ эти тѣла, или измѣряютъ ихъ *объемъ*. Но сыпучія и жидкія тѣла иногда измѣряютъ иначе. Напр., рожь продаютъ четвертями, а еще какъ?

— Пудами.

— Да, овесъ, рожь иногда продаютъ съ вѣса, вѣшаютъ. Какъ продаютъ масло, керосинъ? Сыпучія и жидкія тѣла можно измѣрить и по объему (сколько мѣста занимаютъ), и по вѣсу. А тѣла несыпучія и нежидкія (которыхъ нельзя ни ссыпать, ни влить въ сосудъ) большею частью измѣряютъ по вѣсу.

— Чѣмъ измѣряется цѣна? (За сколько можно купить корову?) Чѣмъ измѣряется время? Скажите же теперь: что измѣряютъ?

— Измѣряютъ: длину (ширину, вышину, глубину, толщину), объемъ сыпучихъ и жидкихъ тѣлъ, вѣсъ, цѣну, время.

— То, чѣмъ измѣряютъ, называется *мѣрою*. Напр. длину измѣряютъ аршиномъ, поэтому аршинъ есть мѣра длины. Когда мы измѣряемъ аршиномъ, напр., длину класса, то мы *считаемъ*, сколько разъ отложился аршинъ по длинѣ класса; а то, что считаютъ, наз. *единицею*; значитъ, аршинъ есть мѣра длины, или единица длины. Какъ назовете вы фунтъ?

— Фунтъ есть мѣра вѣса, или единица вѣса.

— Нельзя ли измѣрить длину нашего класса какой-нибудь палкой или вотъ этой линейкой? Если мы скажемъ кому-нибудь, кто не видалъ этой комнаты, что нашъ классъ длиною въ 20 линеекъ, а линейки не покажемъ, будетъ ли онъ знать, какъ длиненъ нашъ классъ? Почему нѣтъ?

— Потому что онъ не знаетъ, какой линейкой мы измѣряли; а линейки бываютъ разныя.

— А если мы скажемъ ему, что наша комната имѣетъ въ длину 12 аршинъ, будетъ ли онъ знать длину класса? Почему?

— Потому что онъ знаетъ, что такое аршинъ; всѣ аршины одинаковы.

— Жители одного и того же государства употребляютъ для измѣренія мѣры, которыя утверждены закономъ. Напр., торговецъ ситцемъ долженъ имѣть аршинъ, на которомъ отмѣчено, что этотъ аршинъ вѣрный: на аршинѣ должно быть клеймо.

— Длину классной комнаты удобно измѣрить аршиномъ. Но удобно ли измѣрять аршиномъ длину поля? Почему неудобно? Да, долго; и число получится большое. Чѣмъ же лучше измѣрить длину поля? — Саженью. — А чѣмъ измѣряется длина дороги, напр. отъ деревни до города? — Верстами. — Чѣмъ стали бы вы измѣрять

длину грифельной доски? — Вершкомъ. — Вотъ видите: для измѣренія длины (а также ширины, вышины и проч.) неудобно пользоваться одною только мѣрою, напр. аршиномъ; кромѣ аршина употребляются и другія мѣры: однѣ изъ нихъ крупнѣе аршина, другія мельче его. Кто знаетъ, какая самая крупная мѣра длины? (Если дѣти не скажутъ, учитель самъ сообщитъ это). Самая крупная мѣра длины — *миля*, она содержитъ 7 верстъ[1]). Миля и верста называются *путевыми* мѣрами: ими измѣряются дороги, пути. Какая послѣ версты самая крупная мѣра длины? Сколько саженъ въ верстѣ? Какая мѣра идетъ за саженью? Сколько аршинъ въ сажени? Какая мѣра мельче аршина[2])? Сколько вершковъ содержитъ аршинъ? Какъ еще раздѣляется сажень? Сколько футовъ въ сажени? Какъ раздѣляется футъ? Сколько въ футѣ дюймовъ? Какъ раздѣляется дюймъ? Сколько въ дюймѣ линій?

Съ подраздѣленіемъ сажени на футы, дюймы и линіи дѣти могли до сихъ поръ и не встрѣчаться. Тогда самъ учитель сообщаетъ ученикамъ это подраздѣленіе. Не лишнее заставить учениковъ высчитать, сколько дюймовъ въ аршинѣ ($12 \times 7 = 84$; въ сажени 84 дм.; въ сажени 3 аршина; $84 : 3 = 28$; въ аршинѣ 28 дм.). Говоря объ аршинѣ, вершкѣ, футѣ, дюймѣ, линіи учитель показываетъ дѣтямъ эти мѣры, при чемъ ученики сравниваютъ футъ съ аршиномъ, дюймъ съ вершкомъ: на складномъ аршинѣ, раздѣленномъ съ одной стороны на вершки, а съ другой на дюймы, дѣти увидятъ, что футъ нѣсколько меньше полъ-аршина (около 7-ми вершковъ); вершокъ равенъ $1^6/_8$, или $1^3/_4$ дюйма (обыкновенно дюймы и вершки раздѣляются на 8 равныхъ частей). Считаемъ нелишнимъ показать ученикамъ, что аршинъ есть приблизительно длина руки (взрослаго человѣка), считая отъ плеча, или величина шага; четверть аршина — разстояніе между концами растянутыхъ большого и указательнаго пальца; вершокъ — верхъ пальца (два сустава мизинца; дюймъ — одинъ суставъ). Затѣмъ ученики производятъ нѣсколько измѣреній аршиномъ, вершкомъ, дюймомъ; опредѣляютъ на глазъ ширину класса, длину книги, вышину двери и т. п., послѣ чего тѣ же протяженія измѣряются аршиномъ, вершкомъ или дюймомъ, для того, чтобы узнать, насколько вѣрно было сдѣлано измѣреніе на глазъ.

Послѣ бесѣды о мѣрахъ длины ученики прочитываютъ по книжкѣ и заучиваютъ таблицу этихъ мѣръ (стран. 51 нашего сборника).

Подобнымъ же образомъ приводятся въ систему мѣры сыпучихъ и жидкихъ тѣлъ, мѣры вѣса, мѣры бумаги, мѣры цѣны и мѣры

---

[1]) Эта миля наз. нѣмецкою, а также географическою. Есть еще миля морская (узелъ), которая равна $1^3/_4$ версты.

[2]) Въ отвѣтъ на этотъ вопросъ дѣти часто называютъ полъ-аршина и особенно четверть. На это учитель можетъ сказать, что полъ-аршинами и четвертями дѣйствительно измѣряютъ, но мѣрою называютъ собственно такую единицу, которой дано особое названіе; между тѣмъ какъ полъ-аршина и четверть не имѣютъ своихъ названій: здѣсь указана только извѣстная часть аршина.

времени. По возможности, дѣтямъ должны быть показаны образцы мѣръ: ведро; четверикъ, или мѣра (немного болѣе двухъ ведеръ), гарнецъ; фунтовикъ съ его подраздѣленіями, гири въ нѣсколько фунтовъ; если можно достать вѣсы, то полезно сдѣлать въ классѣ нѣсколько примѣровъ взвѣшиванія; кромѣ того, ученики опредѣляютъ приблизительно вѣсъ предметовъ, держа ихъ въ рукѣ или поднимая; различные кредитные билеты и монеты; десть бумаги. Вообще, слѣдуетъ стремиться къ тому, чтобы названіе какой-либо мѣры не было для учениковъ лишь однимъ звукомъ, чтобы съ названіемъ мѣры у дѣтей связывалось болѣе или менѣе ясное о ней представленіе.

Что касается мѣръ времени, здѣсь достаточно привести названія этихъ мѣръ и ихъ единичныя отношенія, безъ всякаго дальнѣйшаго объясненія. Болѣе подробное ознакомленіе съ мѣрами времени, а также изученіе квадратныхъ и кубическихъ мѣръ, мы отложимъ до тѣхъ поръ, пока дѣти не пройдутъ дѣйствій надъ составными именованными числами. Съ одной стороны, изученіе этихъ мѣръ заняло бы довольно много мѣста, такъ какъ здѣсь слѣдуетъ сообщить нѣкоторыя свѣдѣнія о движеніи земли и луны и нѣкоторыя геометрическія понятія; такимъ образомъ, пришлось бы слишкомъ долго держать учениковъ на таблицахъ мѣръ, не имѣя надлежащаго матеріала для вычисленій. Съ другой стороны, задачи на вычисленіе времени и задачи на квадратныя и кубическія мѣры представляютъ такія особенности, которыя требуютъ выдѣленія ихъ въ особыя группы изъ числа задачъ вообще на составныя именованныя числа.

56. Простое и составное именованное число. Именованнымъ числомъ называютъ иногда вообще число, имѣющее при себѣ названіе единицъ, изъ которыхъ оно состоитъ: и 5 карандашей, и 5 вершковъ — будутъ именованныя числа. Однако такія числа, какъ «5 карандашей» и «5 вершковъ», отличаются одно отъ другого постольку, поскольку простой счетъ отличается отъ измѣренія сплошныхъ величинъ (часть I, глава I, §§ 3 и 4). Поэтому число, происходящее отъ счета, называютъ иногда числомъ *предметнымъ*, присвоивая терминъ «именованное число» числу, полученному отъ измѣренія сплошныхъ величинъ. Но въ курсѣ начальной ариѳметики можно не дѣлать такого различенія, называя именованнымъ вообще число, имѣющее при себѣ названіе единицъ, и раздѣляя, такимъ образомъ, числа на именованныя и неименованныя. Для послѣднихъ можно ввести и терминъ «отвлеченное число»: если мы станемъ считать, не обращая вниманія на то, какіе предметы считаемъ (одинъ, два, три, четыре и т. д.), то получимъ число, напр. восемь, единицы котораго названія не имѣютъ; это — отвлеченное число,

такъ какъ здѣсь мы не обращаемъ вниманія, отвлекаемъ вниманіе, отвлекаемся, отъ того, какіе предметы считаемъ. Когда эти термины будутъ извѣстны ученикамъ, слѣдуетъ, время отъ времени, указывать дѣтямъ на то, что въ дѣйствіяхъ надъ именованными числами являются отвлеченными: множитель, дѣлитель при дѣленіи на части и частное въ дѣленіи по содержанію.

— Что надо сдѣлать, чтобы узнать, сколько книгъ находится въ шкафу?

— Надо сосчитать.

— Я считалъ, и насчиталъ 45 книгъ (пишетъ на классной доскѣ: 45 книгъ). А что сдѣлали мы для того, чтобы узнать длину классной комнаты?

— Мы измѣрили длину.

— Длина нашей комнаты 12 аршинъ (пишетъ: 12 аршинъ). 45 книгъ, 12 аршинъ — это числа. Первое изъ этихъ чиселъ получилось отъ счета; а второе?

— Второе получилось отъ измѣренія.

— Когда мы считаемъ предметы, то каждый предметъ служитъ единицей; когда мы измѣряемъ, напр., длину аршиномъ, то мѣра — аршинъ — есть также единица. Обозначено ли въ первомъ числѣ, какіе предметы сосчитаны? Обозначено ли при второмъ числѣ, какой единицей сдѣлано измѣреніе? Слушайте, дѣти: такія числа, при которыхъ поставлено названіе — имя — единицъ, называются *именованными* числами. Придумайте нѣсколько именованныхъ чиселъ, которыя получаются отъ измѣренія.

— Теперь я буду считать такъ: одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь. Я насчиталъ восемь (пишетъ: 8). Показано ли здѣсь, какіе предметы сосчитаны? Такое число, при которомъ нѣтъ названія единицъ, будетъ число неименованное. Его называютъ числомъ *отвлеченнымъ*, потому что здѣсь мы не обращаемъ вниманія на то, что считаемъ; не обращать вниманія — иначе можно сказать: отвлечь вниманіе, отвлечься.

— Стали измѣрять аршиномъ высоту окна; аршинъ отложился ровно 2 раза. Чему равна высота окна? (Записываетъ: 2 ар.). Потомъ стали измѣрять ширину окна; аршинъ отложился одинъ разъ, но съ остаткомъ. Чѣмъ можно измѣрить этотъ остатокъ? Вершокъ отложился въ остаткѣ 6 разъ. Чему равна ширина окна? (Записываетъ: 1 ар. 6 вр.). — У насъ здѣсь два именованныхъ числа: одно (2 ар.) показываетъ высоту окна, другое (1 ар. 6 вр.) — ширину окна. Какую разницу замѣчаете вы между этими числами? — Въ первомъ числѣ аршины, во второмъ и аршины и вершки. — Слушайте, дѣти: именованное число, въ которомъ есть только однѣ мѣры, мѣры одного только наименованія, называется *простымъ* именованнымъ числомъ; а такое именованное число, въ которомъ есть мѣры нѣсколькихъ наименованій, называется *составнымъ* именованнымъ числомъ. 5 верстъ,

15 фунтовъ, 9 рублей — какія это числа? 6 дестей 2 листа, 15 рублей 75 копеекъ, 7 фунтовъ 8 лотовъ 2 золотника — это какія числа? Придумайте сами нѣсколько простыхъ именованныхъ чиселъ, составныхъ.

Примѣчаніе. Считаемъ нелишнимъ обратить вниманіе на то, чтобы при письмѣ составныхъ именованныхъ чиселъ ученики держались опредѣленнаго сокращенія наименованій. При этомъ надо имѣть въ виду, что слово не принято обрывать на гласной, такъ что названіе «аршинъ» не слѣдуетъ писать сокращенно одною буквою а; затѣмъ, если названія двухъ мѣръ начинаются одинаковыми буквами, то надо ввести въ сокращенную запись такія буквы, по которымъ можно было бы отличить одно слово отъ другого (чт., чк.); съ внѣшней стороны красивѣе, когда въ одномъ и томъ же составномъ именованномъ числѣ всѣ наименованія обозначены однимъ и тѣмъ же числомъ буквъ. Въ таблицахъ мѣръ, помѣщенныхъ въ нашемъ сборникѣ, мы поставили въ скобкахъ предлагаемыя нами сокращенія наименованій.

57. Раздробленіе и превращеніе.

— Длину комнаты измѣрили саженью, сажень отложилась 4 раза. Чему равна длина комнаты? Если теперь мы желаемъ узнать, сколько аршинъ содержитъ длина комнаты, надо ли еще разъ дѣлать измѣреніе, измѣрить аршиномъ? Какъ же узнать, сколькимъ аршинамъ равна длина комнаты? (Задача № 235).

— Надо 3 умножить на 4: въ одной сажени 3 аршина, въ 4-хъ саженяхъ — въ 4 раза больше; будетъ 12 аршинъ.

— Сажень и аршинъ: которая изъ этихъ мѣръ болѣе крупная и которая болѣе мелкая? Когда мы узнаёмъ, сколько мелкихъ мѣръ выйдетъ изъ мѣръ крупныхъ, мы дѣлаемъ *раздробленіе* крупныхъ мѣръ въ мелкія. Мы узнали, сколько аршинъ въ 4-хъ саженяхъ: мы *раздробили* 4 сажени въ аршины.

Приведенное выше разсужденіе требуетъ умноженія единичнаго отношенія на данное число мѣръ; для раздробленія 4-хъ саженъ въ аршины надо 3 умножить на 4: въ одной сажени 3 аршина, а въ 4-хъ саженяхъ — 4 раза по 3 аршина, въ 4 раза больше. Но при письменномъ вычисленіи бываетъ удобнѣе дѣлать множителемъ единичное отношеніе. Въ виду этого должно объяснить дѣтямъ (хотя они и знаютъ, что отъ перестановки множимаго и множителя произведеніе не измѣняется), что для раздробленія 4-хъ саженъ въ аршины можно 4 умножить на 3: сажень отложилась по длинѣ

комнаты 4 раза; аршинъ втрое меньше сажени; значитъ, онъ отложится втрое бо́льшее число разъ — надо 4 умножить на 3.

— Учитель раздалъ ученикамъ 2 дс. 8 лс. бумаги, по 1 листу каждому ученику. Сколькимъ ученикамъ раздалъ онъ бумагу? (Зад. № 236). Какъ это узнать?

— Надо узнать, сколько листовъ въ 2 дс. 8 лс.; въ 2 дс. содержится 48 лс.; 48 лс. да 8 лс. — всего 56 лс. Учитель раздалъ бумагу 56-ти ученикамъ[1]).

— Мы узнали, сколько листовъ въ 2 дс. 8 лс. Какъ иначе сказать: что сдѣлали мы съ числомъ 2 дс. 8 лс.?

— Мы раздробили 2 дс. 8 лс. въ листы

Скажемъ нѣсколько словъ о записяхъ, которыя могутъ имѣть мѣсто при раздробленіи. Пусть надо 264 сажени раздробить въ аршины. Наиболѣе правильная запись была бы такая:

$$\begin{array}{r} \times 3 \text{ ар.} \\ 264 \\ \hline 792 \text{ ар.} \end{array}$$

(Въ одной сажени 3 арш., въ 264 саженяхъ — въ 264 раза больше.) Но, какъ мы уже говорили, при письменномъ вычисленіи удобнѣе брать множителемъ единичное отношеніе: во-первыхъ, потому, что оно часто бываетъ меньше раздробляемаго числа, а умножать (письменно) большее число на меньшее удобнѣе, нежели наоборотъ; во-вторыхъ, потому, что въ случаѣ дальнѣйшаго раздробленія 792 арш. въ вершки, умножая единичное отношеніе, мы не можемъ воспользоваться записаннымъ результатомъ, но должны еще разъ написать его:

$$\begin{array}{r} 16 \text{ вр.} \\ \times 792 \\ \hline 32 \\ +144 \\ 112 \\ \hline 12672 \text{ вр.} \end{array}$$

Если же мы станемъ умножать на единичное отношеніе, то было бы неправильно писать: 264 сж.

$$\begin{array}{r} \times 3 \\ \hline 792 \text{ ар.,} \end{array}$$

потому что отъ умноженія 264-хъ саженъ на 3 получится 792 тоже сажени. Думаемъ, что возможно обойтись безъ приписыванія наименованій ко множимому и произведенію, располагая вычисленіе такъ:

$$\begin{array}{l} 246 \text{ сж.} = 792 \text{ ар.} \\ \hline 264 \\ \times 3 \\ \hline 792 \end{array}$$

Пишемъ раздробляемое число 264 сж. и ставимъ послѣ него знакъ равенства; внизу проводимъ черту, подъ которою и помѣщаемъ вычисленіе; найдя результатъ, пишемъ его послѣ знака равенства съ соотвѣтствующимъ наименованіемъ.

Еще примѣръ: 37 пд. 23 фн. 11 лт. раздробить въ золотники:

---

[1]) Полагаемъ возможнымъ опустить здѣсь дѣленіе на единицу; бумага раздана столькимъ ученикамъ, сколько разъ 1 листъ содержится въ 56-ти листахъ.

37 пд. 23 фн. 11 лт. = 144 321 зл.

```
   37
  ×40
 1480
 +23
 1503
 ×32
 3006
+4509
48096
 +11
48107
  ×3
144321.
```

Примѣчаніе. Учитель долженъ пріучить дѣтей къ тому, чтобы при всѣхъ вычисленіяхъ они устно производили тѣ расчеты, которые могутъ сдѣлать устно. Такъ, въ послѣднемъ примѣрѣ слѣдуетъ устно умножить 37 на 40 (несмотря на то, что множитель подписанъ подъ множимымъ) и уже потомъ записать произведеніе; то же относится къ сложенію чиселъ 1480 и 23, 48096 и 11. Во многихъ случаяхъ все раздробленіе совершается устно, и записывается только окончательный результатъ: 5 чт. 6 чк. 3 гр. = 371. гр.

— Молотилка обмолачиваетъ по 1 снопу ржи въ 1 минуту. Во сколько часовъ обмолотитъ она 720 сноповъ? (Зад. № 241).

— 720 сноповъ обмолотитъ она въ 720 минутъ. Надо узнать, сколько часовъ въ 720-ти минутахъ: 60 минутъ составляютъ 1 часъ, а 720 минутъ составятъ столько часовъ, сколько разъ 60 содержится въ 720-ти (во сколько разъ 720 больше 60-ти); 720 раздѣлить на 60, получится 12: въ 12 часовъ.

— Узнать, сколькимъ часамъ равны 720 минутъ, — значитъ *превратить* 720 минутъ въ часы. Когда намъ даны мѣры болѣе крупныя, а мы узнаемъ, сколько выйдетъ мѣръ болѣе мелкихъ, то мы дѣлаемъ раздробленіе. А когда дѣлаемъ мы *превращеніе?*

— Мы дѣлаемъ превращеніе, когда намъ даны мѣры болѣе мелкія, а мы узнаемъ, сколько выйдетъ мѣръ болѣе крупныхъ.

Приведеннымъ выше разсужденіемъ превращеніе выполняется посредствомъ дѣленія по содержанію: 720 минутъ составляютъ столько часовъ, сколько разъ 60 минутъ содержатся въ 720 минутахъ. Но можно разсматривать относящееся сюда дѣленіе и какъ дѣленіе на части; минутъ 720, часовъ будетъ въ 60 разъ меньше; чтобы узнать, сколько будетъ часовъ, надо 720 уменьшить въ 60 разъ, т.-е. раздѣлить на 60 равныхъ частей.

Скажемъ нѣсколько словъ относительно записей. Было бы неправильно писать:

720 мн. | 60
12 чс.

Отсутствіе наименованія у дѣлителя означаетъ дѣленіе на части; но если 720 мн. раздѣлить на 60 равныхъ частей, то получится 12 мн., а не 12 чс. Неправильно было бы писать и такъ:

720 мн. | 60 мн.
12 чс.

Именованный дѣлитель показываетъ, что мы дѣлаемъ дѣленіе по содержанію, т.-е узнаемъ, сколько разъ 60 мн. содержатся въ 720 мн.; но въ такомъ случаѣ частное должно быть числомъ отвлеченнымъ. Поэтому совсѣмъ не слѣдуетъ приписывать наименованій ни къ дѣлимому, ни къ дѣлителю, ни къ частному, располагая вычисленіе такъ:

720 мн. = 12 чс.

720 | 60
60 | 12
120
0

Примѣчаніе. Если дѣленіе выполняется устно, то ученики пишутъ прямо: 720 мн. = 12 чс.

— Мастеръ сдѣлалъ 460 колецъ, употребивши на каждое по 1 золотнику серебра. Сколько серебра пошло на всѣ эти кольца? (Зад. № 243).

— На всѣ кольца пошло 460 золотниковъ серебра.

— Сдѣлайте превращеніе: превратите сначала въ лоты.

Выполнивъ дѣленіе, ученики будутъ имѣть въ частномъ 153 и въ остаткѣ 1; значитъ, всѣ 460 зл. не превращаются въ лоты: одинъ золотникъ остается. Затѣмъ 153 лота превращаются въ фунты: получаются 4 фунта, и остаются 25 лотовъ.

Запись:

460 зл. = 4 фн. 25 лт. 1 зл.

460 | 3
16 | 153 | 32
10 | 128 | 4
1 | 25

Примѣчаніе. Дѣленіе на однозначное, а иногда и на двузначное число, можетъ быть выполнено устно; тогда слѣдуетъ только записать подъ дѣлимымъ окончательный остатокъ.

58. Сложеніе. Сначала мы разсматриваемъ дѣйствіе надъ простыми именованными числами, а затѣмъ переходимъ къ составнымъ именованнымъ числамъ, такъ какъ дѣйствіе надъ послѣдними сводится къ дѣйствіямъ надъ первыми.

Сложеніе простыхъ именованныхъ чиселъ.

а) Сумму превратить нельзя: 15 фн. + 23 фн. = 38 фн. (Задача № 244).

— Какія числа мы складывали? (Какъ называются такія числа?) — Простыя именованныя. — Какое число получили въ суммѣ? — Простое именованное того же наименованія.

б) Сумма превращается безъ остатка: 14 вр.+10 вр.+ +8 вр.=32 вр.=2 ар. (Зад. № 245).

— Какія числа мы складывали? — Простыя именованныя. — Какое число получили въ суммѣ? — Простое именованное. — Того же ли оно наименованія, какъ и слагаемыя? — Нѣтъ, другого, высшаго наименованія.

в) Въ суммѣ получается составное именованное число: 4 чк.+7 чк.=11 чк.=1 чт. 3 чк. (Зад. № 246).

— Какія числа мы складывали? — Простыя именованныя. — Какое число получили въ суммѣ? — Составное именованное.

Сложеніе составныхъ именованныхъ чиселъ.

— Хозяйка купила голову сахару вѣсомъ въ 27 фн. 16 лт., да отъ прежняго запаса у нея оставалось еще 5 фн. Сколько сахару стало у хозяйки? (Зад. № 247). Какъ это узнать? — Надо къ 27 фн. 16 лт. прибавить 5 фн. — Какое число первое слагаемое? Какія есть въ немъ мѣры? Какое число второе слагаемое? Къ чему же вы придадите 5 фн.? (Запись: 27 фн. 16 лт.+5 фн.=32 фн. 16 лт.)

— Въ школѣ была бумага двухъ сортовъ: одного сорта 4 ст. 15 дс., а другого на 3 ст. 2 дс. болѣе. Сколько было бумаги другого сорта? (Зад. № 248). Какъ это узнать? — Надо къ 4 ст. 15 дс. прибавить 3 ст. 2 дс. — (4 ст. 15 дс.+ +3 ст. 2 дс.). — Какія числа наши слагаемыя? Какъ будете складывать? — Стопы со стопами, дести съ дестями. (Выполняется сложеніе, сумма записывается послѣ знака равенства.)

На приведенныхъ примѣрахъ ученики уяснили себѣ, что для сложенія составныхъ именованныхъ чиселъ должно складывать между собою мѣры одинаковаго наименованія.

Затѣмъ указывается другая запись: подписываніе слагаемыхъ одного подъ другимъ такъ, чтобы мѣры одного наименованія были въ одномъ столбцѣ:

$$\begin{array}{r} 4 \text{ ст. } 15 \text{ дс.} \\ +\ 3 \text{ — } \ \ 2 \text{ —} \\ \hline 7 \text{ ст. } 17 \text{ дс.} \end{array}$$

Далѣе дѣти дѣлаютъ выводъ, что удобнѣе начинать сложеніе съ мѣръ низшаго наименованія. Это можетъ быть сдѣлано при рѣшеніи задачи № 249, которая приводитъ къ сложенію чиселъ 5 чт. 4 чк. 6 гр. и 4 чт. 3 чк. 5 гр. Учитель за-

ставляетъ учениковъ выполнить сложеніе, начиная съ мѣръ высшаго наименованія. Потомъ дѣти дѣлаютъ сложеніе тѣхъ же чиселъ, начиная съ мѣръ низшаго наименованія. Сравнивая оба пріема, ученики увидятъ, что удобнѣе начинать сложеніе съ мѣръ низшаго наименованія, такъ какъ въ первомъ случаѣ (т.-е. при сложеніи съ высшихъ мѣръ) приходится записанныя уже числа замѣнять другими, стирая или зачеркивая ихъ. При сложеніи съ низшихъ мѣръ этого не будетъ, если только сложеніе и превращеніе въ каждомъ отдѣльномъ столбцѣ мы сдѣлаемъ устно; а это въ большинствѣ случаевъ возможно; тогда мы записываемъ подъ чертою число мѣръ, оставшихся послѣ превращенія; число выдѣленныхъ мѣръ высшаго наименованія держимъ въ умѣ или пишемъ надъ столбцомъ высшихъ мѣръ:

$$\begin{array}{rrrr} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ + & 5\ \text{чт.} & 4\ \text{чк.} & 6\ \text{гр.} \\ & 4\ \text{—} & 3\ \text{—} & 5\ \text{—} \\ \hline & 10\ \text{чт.} & 0\ \text{чк.} & 3\ \text{гр.} \end{array}$$

Примѣчаніе. Когда въ однихъ слагаемыхъ отсутствуютъ мѣры, имѣющіяся въ другихъ слагаемыхъ, на мѣстѣ отсутствующихъ мѣръ удобно ставить нули. Напр., сложеніе чиселъ 2 ст. 17 чс., 18 чс. 30 мн. и 1 ст. 12 чс. (задача № 251) можно записать такъ:

$$\begin{array}{rrrr} 2\ \text{ст.} & 17\ \text{чс.} & 0\ \text{мн.} & \\ 0\ \text{—} & 18\ \text{—} & 30\ \text{—} & \\ 1\ \text{—} & 12\ \text{—} & 0\ \text{—} & \\ \hline 4\ \text{ст.} & 23\ \text{чс.} & 30\ \text{мн.} & \end{array}$$

Когда дѣтямъ приходится самостоятельно дѣлать подобныя записи, выписывая данныя числа изъ задачника (возьмемъ для примѣра № 211), ученики должны сначала вглядѣться въ эти числа и замѣтить всѣ встрѣчающіяся въ нихъ наименованія; затѣмъ писать первое слагаемое, не пропуская ни одного наименованія и ставя нули на мѣстѣ отсутствующихъ мѣръ.

$$\begin{array}{rrrrr} & 4\ \text{вс.} & 0\ \text{сж.} & 2\ \text{ар.} & 12\ \text{вр.} \\ + & 6\ \text{—} & 256\ \text{—} & 0\ \text{—} & 8\ \text{—} \\ \hline & 0\ \text{—} & 243\ \text{—} & 0\ \text{—} & 10\ \text{—} \end{array}$$

59. Вычитаніе.

Вычитаніе простыхъ именованныхъ чиселъ.

а) Данныя числа одного наименованія: 432 сж.—158 сж.= =274 сж. (Задача № 252).

б) Данныя числа разнаго наименованія: 4 пд.—31 фн. (Задача № 253). На вопросъ: какъ станете вычитать? дѣти иногда отвѣчаютъ: раздробимъ 4 пд. въ фунты. Въ этомъ случаѣ можно спросить: какъ вычесть 7 изъ 50-ти?—Надо разложить на 40 и 10.—Сколько десятковъ отдѣляете вы отъ 5 десятковъ и раздробляете въ единицы?—Одинъ десятокъ.—Точно такъ же вычтемъ 31 фн. изъ 4 пд.

Вычитаніе составныхъ именованныхъ чиселъ.

— Хозяинъ собралъ 24 чт. 6 чк. 7 гр. ржи; 5 чт. 4 чк. 2 гр. онъ оставилъ для посѣва, а прочую рожь смололъ. Сколько ржи смололъ хозяинъ? (Задача № 254). Какъ это узнать? Какъ станете вычитать?—Изъ четвертей вычтемъ четверти, изъ четвериковъ—четверики, изъ гарнцевъ—гарнцы. (Дѣти дадутъ такой отвѣтъ, зная сложеніе составныхъ именованныхъ чиселъ.)—Какъ удобнѣе записать данныя числа? Подпишите вычитаемое подъ уменьшаемымъ и сдѣлайте вычитаніе.

Далѣе ученики выводятъ, что удобнѣе начинать вычитаніе съ мѣръ низшаго наименованія. Это можетъ быть сдѣлано при рѣшеніи задачи № 255, гдѣ требуется изъ 4 сж. 1 ар. 8 вр. вычесть 1 сж. 2 ар. 12 вр. Учитель заставляетъ ученика выполнить вычитаніе, начиная съ мѣръ высшаго наименованія. Вычтя 1 сж. изъ 4 сж. и записавъ 3 сж., дѣти скажутъ, что 2 ар. нельзя вычесть изъ 1 ар.—Когда изъ 4 сж. 1 ар. 8 вр. мы вычли 1 сж., какое число осталось?—Осталось 3 сж. 1 ар. 8 вр.—Какъ вычесть отсюда 2 ар.? Въ случаѣ затрудненія, на желаемый отвѣтъ можно навести учениковъ соотвѣтствующимъ случаемъ вычитанія отвлеченныхъ чиселъ.—Какъ вы станете вычитать 7 изъ 64?—Мы разложимъ 64 на 50 и 14.—Значитъ, отъ 6 десятковъ вы берете десятокъ, раздробляете его въ единицы и придаете еще 4 единицы. Какъ же намъ вычесть 2 ар.?—Надо отъ полученныхъ 3 сж. взять (занять) 1 сж., раздробить ее въ аршины и прибавить 1 арш.; аршинъ будетъ 4, саженъ останется 2 (написанная раньше цифра 3 зачеркивается или стирается и замѣняется цифрою 2). Изъ 4 ар. вычесть 2 ар., останется 2 ар. И т. д. Потомъ дѣти снова дѣлаютъ то же вычитаніе, начиная съ низшихъ мѣръ. Сравнивая оба пріема, ученики увидятъ, что удобнѣе начинать вычитаніе съ мѣръ низшаго наименованія, такъ какъ въ первомъ случаѣ (при вычитаніи съ высшихъ мѣръ) приходится записанныя уже цифры замѣнять другими, стирая или зачеркивая ихъ.

Примѣчаніе 1. Когда бываетъ нужно занимать мѣру высшаго наименованія, лучше, если дѣти привыкнутъ сначала вычитать изъ раздробленной мѣры, а потомъ придавать къ полученному остатку имѣющіяся въ уменьшаемомъ мѣры того же названія: изъ 8-ми вершковъ нельзя

вычесть 12 вершковъ; занимаемъ 1 арш. и раздробляемъ его въ вершки; вычитаемъ 12 вр. изъ 16 вр., остается 4 вр.; 4 вр. да еще 8 вр. — всего 12 вр.

Примѣчаніе 2. Такъ же, какъ и при сложеніи, въ случаѣ отсутствія какихъ-либо мѣръ въ уменьшаемомъ или вычитаемомъ на ихъ мѣстахъ удобно ставить нули. Напр., рѣшеніе задачи № 257 можетъ быть записано такъ:

	3 фн.	0 лт.	0 зл.	0 дл.
—	0 —	30 —	2 —	72 —
	2 фн.	1 лт.	0 зл.	24 дл.

60. Умноженіе.

Умноженіе простыхъ именованныхъ чиселъ.

а) Произведеніе нельзя превратить: 112 сж. × 4 = 448 сж. (задача № 258).

б) Произведеніе превращается безъ остатка (въ простое именованное число): 6 лс. × 20 = 120 лс. = 5 дс. (задача № 259).

в) Въ произведеніи получается составное именованное число: 3 гр. × 30 = 90 гр. = 1 чт. 3 чк. 2 гр. (задача № 260).

Примѣчаніе. Считаемъ нелишнимъ поупражнять дѣтей въ умноженіи въ случаяхъ, подобныхъ слѣдующимъ: 1) 27 лт. × 32 = 27 фн.; здѣсь не производится никакого вычисленія: сколько дано лотовъ, столько будетъ фунтовъ; 2) 7 гр. × 24 = (7 гр. × 8) × 3 = 7 чк. × 3 = 21 чк. = 2 чт. 5 чк.: умножимъ, по предыдущему, 7 гр. на 8; имѣемъ 7 чк.; затѣмъ 7 чк. множимъ на 3; получимъ 21 чк., или 2 чт. 5 чк.

Умноженіе составныхъ именованныхъ чиселъ.

— Мѣдникъ сдѣлалъ 3 кастрюли; на каждую пошло мѣди 4 фн. 9 лт. Сколько мѣди пошло на всѣ кастрюли? (Задача № 261). Какъ это узнать? Какъ станете умножать? — Сначала умножимъ фунты, потомъ лоты (сначала лоты, потомъ фунты). — Умножайте. Записываетъ: 4 фн. 9 лт. × 3 = = 12 фн. 27 лт. Какъ можно иначе записать это? Является другая запись:

	4 фн.	9 лт.	
		× 3	
	12 фн.	27 лт.	

Затѣмъ на подходящемъ примѣрѣ (для этого можетъ служить задача № 262, требующая умноженія 1 чт. 3 чк. 6 гр. на 4) выясняется (подобно тому, какъ это сдѣлано, напр., для сложенія), что удобнѣе начинать умноженіе съ мѣръ низшаго наименованія.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда для дѣтей трудно сдѣлать устно умноженіе и превращеніе мѣръ каждаго отдѣльнаго

наименованія, вычисленія эти могутъ быть выполнены письменно на сторонѣ; подъ чертою же, на соотвѣтствующемъ мѣстѣ, пишется число мѣръ, оставшихся послѣ превращенія.

Примѣчаніе. Задачи въ родѣ №№ 263 и 264 напоминаютъ, что множитель есть число отвлеченное. — Поѣздъ ж. д. проходитъ въ минуту 283 сж. 5 фт. 8 дм. Сколько пройдетъ онъ въ 5 чс. 15 мн.? — Чтобы узнать это, надо 5 чс. 15 мн. раздробить въ минуты и затѣмъ именованное число 283 сж. 5 фт. 8 дм. умножить на отвлеченное число 315 (повторить 315 разъ).

61. Дѣленіе.

1. Дѣленіе на части, или дѣленіе на отвлеченное число.

Дѣленіе простыхъ именованныхъ чиселъ.

а) Частное — простое именованное число, одного наименованія съ дѣлимымъ: 336 вс. : 24 = 14 вс. (Задача № 265).

б) Частное—простое именованное число низшаго наименованія: 7 пд. : 35 = 280 фн. : 35 = 8 фн. (Задача № 266).

Примѣчаніе. Считаемъ нелишнимъ обратить вниманіе дѣтей на случаи дѣленія, подобные слѣдующимъ: 1) 15 дс. : 24 = 15 лс.; здѣсь не производится никакого вычисленія: сколько дано дестей, столько получится листовъ: 2) 18 фн. : 64 = (18 фн. : 32) : 2 = 18 лт. : 2 = 9 лт.: дѣлимъ, подобно предыдущему, 18 фн. на 32, имѣемъ 18 лт.; затѣмъ 18 лт. дѣлимъ на 2.

в) Частное—составное именованное число.

— На 16 десятинъ высѣяна 21 чт. ржи. Сколько это приходится на десятину? (Задача № 267). Какъ это узнать? Дѣлите. Сколько четвертей придется на десятину? Сколько четвертей осталось еще дѣлить? Какъ раздѣлить 5 чт. на 16? — Надо 5 чт. раздробить въ четверики. И т. д.

Дѣленіе составныхъ именованныхъ чиселъ.

— Виноторговецъ купилъ 24 вд. 9 шт. краснаго вина, а бѣлаго въ 3 раза менѣе. Сколько купилъ онъ бѣлаго вина? (Задача № 268). Какъ это узнать? Какъ станете дѣлить? — Сначала раздѣлимъ ведра, потомъ штофы. (Выполняется дѣленіе.)

— Изъ 9 пд. 33 фн. желѣза кузнецъ сдѣлалъ 6 одинаковыхъ осей. Сколько желѣза пошло на каждую ось? (Задача № 269). Какъ это узнать? Дѣлите. — 9 пд. раздѣлить на 6, получится 1 пд. и въ остаткѣ 3 пд. — Что сдѣлаете вы съ этимъ остаткомъ? — Раздробимъ его въ фунты: будетъ 120 фн. — Сколько фунтовъ есть еще въ дѣлимомъ?

Сколько будетъ всего фунтовъ? Какъ это узнать? — Къ 120 фн. прибавить 33 фн. — Что станете теперь дѣлить? Дѣлите. И т. д. По мѣрѣ выполненія дѣйствій является запись:

```
  9 пд.        33 фн.| 6
 -                +
  6            120    1 пд. 25 фн. 16 лт.
 -             ---
  3            153
×              -
 40            12
 ---           ---
 120            33
               -
               30
               ---
                3
              ×
               32
               ---
               96
              -
                6
               ---
               36
              -
               36
               --
                0
```

Примѣчаніе 1. Конечно, многихъ вычисленій, выполняемыхъ устно, можно и не записывать. Запись можетъ тогда принять такой видъ:

```
9 пд. 33 фн. | 6
3     120      1 пд. 25 фн. 16 лт.
      153
        3 × 32 = 96
                 0.
```

Примѣчаніе 2. При рѣшеніи задачъ №№ 271 и 273 должно обратить вниманіе учениковъ на то, что дѣлителемъ является здѣсь число отвлеченное. — 6 чт. 6 чк. коноплянаго сѣмени вѣсятъ 55 пд. 5 фн. Сколько вѣситъ четверикъ этого сѣмени? — Чтобы узнать это, надо 6 чт. 6 чк. раздробить въ четверики (54) и затѣмъ 55 п. 5 фн. раздѣлить на 54 равныя части.

2. Дѣленіе по содержанію, или дѣленіе на именованное число.

Дѣленіе простыхъ именованныхъ чиселъ.

а) Данныя числа одного наименованія.

— Отъ Москвы до Кіева 946 верстъ. Во сколько дней можно доѣхать отъ Москвы до Кіева, проѣзжая въ день по 473 версты? (Задача № 274). Какъ это узнать? Почему надо 946 вс. раздѣлить на 473 вс.? — Доѣхать можно во столько дней, сколько разъ 473 вс. содержатся въ 946 вс. — Сколько разъ 473 вс. содержатся въ 946 вс.? Во сколько же дней можно доѣхать отъ Москвы до Кіева? Чтобы рѣшить эту задачу, мы раздѣлили 946 вс. на 473 вс. Какое число дѣлимое? Дѣлитель? А частное — именованное число? — Нѣтъ, частное — отвлеченное число. — Вѣрно, частное показываетъ, что 473 вс. содержатся въ 946 вс. 2 раза: это число 2 есть число отвлеченное.

Примѣчаніе. Со стороны дѣтей возможно недоразумѣніе такого рода: они будутъ считать полученное частное именованнымъ, потому что въ задачѣ оно означаетъ 2 дня. Для устраненія этого недоразумѣнія учитель подробнѣе остановится на томъ, что частное, получаемое отъ дѣленія именованнаго числа на именованное, показываетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, и само по себѣ не имѣетъ никакого наименованія, вслѣдствіе чего въ разныхъ задачахъ можетъ означать разное. Возьмемъ задачи. Торговецъ разсыпалъ 28 пд. муки въ мѣшки, по 4 пд. въ каждый. Сколько вышло такихъ мѣшковъ? У торговца было 28 пд. муки; каждый день продавалъ онъ по 4 пд. Во сколько дней продалъ онъ всю муку? Торговецъ продалъ 28 пуд. муки нѣсколькимъ покупателямъ, по 4 пд. каждому. Сколькимъ покупателямъ продалъ онъ муку? Для рѣшенія всѣхъ этихъ задачъ надо 28 пд. раздѣлить на 4 пд. Частное 7 означаетъ и число мѣшковъ, и число дней, и число покупателей; само же по себѣ оно показываетъ только, что 4 пд. содержится въ 28 пд. 7 разъ, и никакого наименованія не имѣетъ.

б) Данныя числа разнаго наименованія.

— Изъ 5-ти фунтовъ серебра мастеръ сдѣлалъ ложки, употребивъ на каждую по 15 золотниковъ серебра. Сколько ложекъ сдѣлалъ мастеръ? (Задача № 275). Какъ это узнать? — Надо узнать, сколько разъ 15 зл. содержатся въ 5 фн. — Да, т.-е. надо 5 фн. раздѣлить на 15 зл. Какъ станете дѣлить? — Мы раздробимъ 5 фн. въ золотники.

Дѣленіе составныхъ именованныхъ чиселъ. Оно можетъ быть объяснено на задачахъ №№ 276—278. Въ первой изъ нихъ приходится дѣлить составное именованное 15 дс. 4 лс. на простое именованное 7 лс.; во второй — простое именованное 81 пд. на составное 4 пд. 20 фн.; въ третьей — составное именованное 7 чт. 7 чк. 6 гр. на составное именованное 1 чт. 2 чк. 5 гр. Дѣти легко понимаютъ, что для всѣхъ такихъ дѣленій должно дѣлимое и дѣлителя раздробить въ мѣры одного и того же наименованія. Относящіяся сюда записи могутъ быть расположены такъ (задача № 278):

7 чт. 7 чк. 6 гр. : 1 чт. 2 чк. 5 гр. = 6; самъ 6.

7	8	
×8	+2	
56	10	
+7	×8	
63	80	
×8	+5	
504	85	
+6		510|85
510		6

Въ большинствѣ случаевъ многія вычисленія по раздробленію выполняются устно, и запись можно значительно сократить. Иногда же (сюда подходитъ приведенный примѣръ) все раздробленіе производится въ умѣ, и записываются только результаты раздробленія (510, 85).

Пройдя оба вида дѣленія именованныхъ чиселъ (на части и по содержанію), полезно сопоставить ихъ на подходящихъ задачахъ. — Изъ 1 ст. 2 дс. 12 лс. бумаги сдѣлано 18 одинаковыхъ тетрадей. Сколько бумаги пошло на каждую тетрадь? (Задача рѣшается). — Изъ 1 ст. 2 дс. 12 лс. бумаги сдѣланы тетради, въ 1 дс. 6 лс. каждая. Сколько сдѣлано тетрадей? (Задача рѣшается). Какимъ дѣйствіемъ рѣшили мы первую задачу? Вторую? Какое число дѣлили въ первой задачѣ? Во второй? На какое число дѣлили въ первой задачѣ? — На отвлеченное, дѣлили на равныя части. — Какое число получили въ частномъ? На какое число дѣлили во второй задачѣ? — На именованное: узнавали, сколько разъ одно именованное число содержится въ другомъ. — Какое число получили въ частномъ? На какія же числа можно дѣлить именованное число? — Именованное число можно дѣлить на отвлеченное, или на равныя части; именованное число можно дѣлить на именованное, или узнавать, сколько разъ одно именованное число содержится въ другомъ. Ученики должны ясно понимать различіе между обоими видами дѣленія и — какъ объ этомъ уже сказано выше — въ задачахъ, въ родѣ: за 9 пд. 26 фн. масла заплачено 92 р. 64 к.; что стоитъ фунтъ этого масла? должны видѣть задачи, относящіяся къ дѣленію на отвлеченное число: 92 р. 64 к. раздѣлить на 386 равныхъ частей. Замѣтимъ, что одинъ изъ двухъ видовъ дѣленія можетъ быть провѣренъ посредствомъ другого.

62. Задачи на всѣ дѣйствія. Въ отдѣлѣ задачъ на всѣ дѣйствія съ составными именованными числами мы помѣстили сначала задачи, не имѣющія опредѣленно выраженнаго типа (№№ 279—328); затѣмъ привели типическія задачи уже знакомыхъ ученикамъ девяти типовъ (№№ 329—395), о рѣшеніи которыхъ сказано въ § 54 главы VI.

63. Вычисленіе времени. Учитель сообщаетъ дѣтямъ свѣдѣнія о шаровидной формѣ земли, о ея движеніи вокругъ своей оси и вокругъ солнца, о движеніи луны вокругъ земли [1]). За неимѣніемъ дорогого прибора — теллурія — при этихъ объясненіяхъ можно воспользоваться глобусомъ или просто какимъ-либо шарикомъ, напр. клубкомъ нитокъ,

---

[1]) Свѣдѣнія эти могутъ быть почерпнуты изъ «Книги для чтенія».

проткнутымъ вязальною спицею. Здѣсь учитель разъясняетъ дѣтямъ, что мѣры времени зависятъ отъ движенія земли и луны. Сутками называется то время, въ которое земля обернется одинъ разъ вокругъ своей оси; а годъ есть время, въ которое земля дѣлаетъ одинъ обходъ около солнца. Въ то время, какъ земля обходитъ одинъ разъ около солнца, она обернется вокругъ своей оси 365 разъ и сверхъ того дѣлаетъ еще почти четверть оборота — Сколько же сутокъ въ году? — Но считать въ году $365^1/_4$ сутокъ неудобно; надо брать въ году ровное (цѣлое) число сутокъ. Будемъ узнавать, сколько сутокъ въ четырехъ годахъ: $365^1/_4+365^1/_4+$ $+365^1/_4+365^1/_4$. Сложите только дроби: сколько получится? Эти сутки прибавимъ къ послѣднему изъ четырехъ годовъ; сколько будетъ въ немъ сутокъ? Изъ каждыхъ четырехъ годовъ три года считаютъ по 365 сутокъ и одинъ въ 366 сутокъ: $365+365+365+366$. Тѣ годы, въ которыхъ считаютъ по 365 сутокъ, называются *простыми* годами; а годъ въ 366 сутокъ называется *високоснымъ*. Христіане считаютъ года отъ Рождества Христова. Какой теперь годъ послѣ Рождества Христова? Годъ, въ который родился Іисусъ Христосъ, былъ годъ високосный; 1-ый, 2-ой, 3-ій годы послѣ Р. Х. были простыми, 4-ый — високосный. Какіе были 5-ый, 6-ой, 7-ой годы послѣ Р. Х.? А 8-ой? Первымъ послѣ Р. Х. високоснымъ годомъ былъ годъ 4-ый, затѣмъ 8-ой; а потомъ? Вы видите, что нумера високосныхъ годовъ дѣлятся безъ остатка на 4. Какъ узнать, какимъ былъ 1862-ой годъ? Узнайте. Нѣсколько упражненій.

Когда земля обращается вокругъ оси, то какое-нибудь мѣсто на землѣ, напр. Москва, не все время будетъ освѣщено солнцемъ: часть сутокъ солнце будетъ свѣтить на это мѣсто; эта часть сутокъ — день; а другую часть сутокъ солнце освѣщать этого мѣста не будетъ; эта часть сутокъ — ночь. День и ночь у насъ вообще не одинаковы: то день больше ночи, то ночь больше дня; только два раза въ годъ они равны (9 марта и 10 сентября). (Это происходитъ отъ того, что ось земли стоитъ не прямо, а наклонно къ ея пути; отъ этого же происходятъ и времена года: весна, лѣто, осень, зима). Какъ раздѣляются сутки? Какъ раздѣляется часъ? Минута? Сутки начинаются въ *полночь*, или въ 12 часовъ ночи. Черезъ 12 часовъ послѣ полуночи бы-

ваетъ *полдень*. Время отъ полуночи до полудня называется временемъ *пополуночи:* когда послѣ полуночи (послѣ начала сутокъ) пройдетъ 2 часа, то будетъ 2 часа пополуночи; пройдетъ 10 часовъ, будетъ 10 часовъ пополуночи. Время пополуночи называется также временемъ *ночи* и *утра:* 2 часа пополуночи — 2 часа ночи; 10 часовъ пополуночи — 10 часовъ утра. Время отъ полудня до слѣдующей полуночи называется временемъ *пополудни:* отъ полудня пройдетъ 3 часа — будетъ 3 часа пополудни; пройдетъ 9 часовъ — будетъ 9 часовъ пополудни. Время пополудни называютъ также временемъ *дня* и *вечера:* 3 часа пополудни — 3 часа дня; 9 часовъ пополудни — 9 часовъ вечера. — 6 час. 30 мин. иначе называются *половина седьмого* (часа); 8 час. 15 мин. — *четверть девятаго;* 5 час. 45 мин. — *три четверти шестого,* или *безъ четверти шесть;* 11 час. 10 мин. — *десять минутъ двѣнадцатаго;* 8 час. 50 мин. — *безъ десяти минутъ девять.*

Мѣсяцемъ называется время, въ которое луна обходитъ одинъ разъ вокругъ земли; луна обходитъ одинъ разъ кругомъ земли приблизительно въ 30 дней (сутокъ). Если класть въ мѣсяцѣ 30 дней, сколько мѣсяцевъ будетъ въ году? Ровно ли 12 мѣсяцевъ? Для того, чтобы въ году было ровно 12 мѣсяцевъ, чтобы 12 мѣсяцевъ заняли ровно весь годъ, считаютъ въ мѣсяцахъ не поровну дней. — Приводятся названія мѣсяцевъ съ указаніемъ числа дней въ каждомъ мѣсяцѣ[1]). (Нелишнее — показать дѣтямъ, какъ узнать число дней въ мѣсяцахъ по косточкамъ и углубленіямъ на пальцахъ обѣихъ рукъ). Годъ начинается въ полночь 1-го января. — Для рѣшенія послѣдующихъ задачъ на вычисленіе времени надо заставить дѣтей заучить нумера мѣсяцевъ: апрѣль — 4-ый мѣсяцъ; обратно: 8-ой мѣсяцъ — августъ. Для той же цѣли весьма полезно будетъ, если ученики сразу станутъ брать полугодовые промежутки впередъ и назадъ: мартъ — черезъ полгода: сентябрь; августъ — полгода назадъ: февраль.

— Сколько дней (сутокъ) въ недѣлѣ? Назовите эти дни. Начальный день недѣли — воскресенье.

---

[1]) Въ денежныхъ расчетахъ, напр. при вычисленіи процентовъ, считаютъ обыкновенно всѣ мѣсяцы по 30 дней, а годъ — въ 360 дней. Объ этомъ можно сообщить ученикамъ при рѣшеніи соотвѣтствующихъ задачъ.

Задачи на вычисленіе времени рѣшаются сложеніемъ и вычитаніемъ; такихъ задачъ три типа: одинъ на сложеніе и два на вычитаніе.

I. На сложеніе. Французы заняли Москву 2 сентября 1812 года, а русскіе взяли Парижъ спустя 1 годъ 6 мѣсяцевъ 17 дней. Когда русскіе взяли Парижъ?

Въ этихъ задачахъ дается время предшествующаго событія (занятія Москвы) и промежутокъ, отдѣляющій его отъ событія послѣдующаго (взятія Парижа). Отыскивается время послѣдующаго событія.

II. На вычитаніе. Одинъ братъ старше другого на 7 лѣтъ 5 мѣсяцевъ 20 дней; младшій родился 9 февраля 1886 года. Когда родился старшій?

Въ этихъ задачахъ дается время послѣдующаго событія (рожденія младшаго брата) и промежутокъ, отдѣляющій его отъ событія предшествующаго (рожденія старшаго брата). Отыскивается время предшествующаго событія.

III. На вычитаніе. Петръ Великій родился 30 мая 1672 г., скончался 28 января 1725 года. Сколькихъ лѣтъ отъ роду скончался Петръ Великій?

Въ этихъ задачахъ даются времена двухъ событій (рожденія и кончины Петра Великаго) и отыскивается промежутокъ между ними.

Число, обозначающее время какого-нибудь событія, называютъ *календарнымъ* числомъ; таковы числа: 2 сентября 1812 года, 30 мая 1672 года. Число, которое выражаетъ время, протекшее отъ одного момента до другого, есть собственно *ариѳметическое* число: 1 гд. 6 мц. 17 дн.; 7 лт. 5 мц. 20 дн.; это — обыкновенное составное именованное число, выраженное въ мѣрахъ времени.

Въ задачахъ I и II одно изъ данныхъ чиселъ — календарное, другое — ариѳметическое; искомое — календарное число. Въ задачѣ III оба данныя — календарныя числа, искомое — ариѳметическое.

Задачи на вычисленіе времени обыкновенно рѣшаются при помощи перевода календарнаго числа въ ариѳметическое и обратно. Перевести календарное число въ ариѳметическое значитъ высчитать, сколько времени прошло до извѣстнаго событія отъ Рождества Христова (или отъ начала

столѣтія, начала года и т. д.). 2 сентября 1812 года — соотвѣтствующее ариѳметическое число будетъ 1811 лт. 8 мц. 1 д. (отъ Р. Х. прошло *полныхъ* 1811 лт. 8 мц. 1 дн.), или 1811 лт. 245 дн. (здѣсь мѣсяцы раздроблены въ дни; февраль, какъ принадлежащій 1812-му, т.-е. високосному, году, принятъ въ 29 дн.). 29-ое іюня—соотвѣтствующее ариѳметическое число: 5 мц. 28 дн. (отъ начала года) или 28 дн. (отъ начала мѣсяца). Перевести ариѳметическое число въ календарное значитъ опредѣлить, когда случилось событіе, зная время, протекшее до него отъ Р. Х. (или начала года, мѣсяца и т. д.). Отъ Р. Х. до освобожденія крестьянъ прошло 1860 лт. 1 мц. 18 дн.; освобожденіе крестьянъ было 19-го февраля 1861 года. Отъ начала года до праздника св. Пасхи прошло 3 мц. 8 дн. — Пасха была въ этомъ году 9-го апрѣля.

Рѣшимъ приведенныя три задачи.

I. Отъ Р. Х. до занятія Москвы прошло 1811 лт. 8 мц. 1 дн., а до взятія Парижа прошло времени больше на 1 гд. 6 мц. 17 дн.

+ 1811 лт. 8 мц. 1 дн.
  1 — 6 — 17 —
1813 лт. 2 мц. 18 дн. . . . . 19 марта 1814 года.

II. Отъ Р. Х. до рожденія младшаго брата прошло 1885 лт. 1 мц. 8 дн.; а до рожденія старшаго прошло времени меньше на 7 лт. 5 мц. 20 дн.

— 1885 лт. 1 мц. 8 дн.
  7 — 5 — 20 — (занимаемъ январь=31 дн.)
1877 лт. 7 мц. 19 дн. . . . . 20 августа 1878 г.

III Отъ Р. Х. до кончины Петра В. прошло 1724 гд. 27 дн., а до рожденія его—1671 гд. 4 мц. 29 дн. Продолжительность жизни опредѣлимъ, узнавъ, на сколько больше времени прошло отъ Р. Х. до кончины, нежели до рожденія:

— 1724 гд. 0 мц. 27 дн.
  1671 — 4 — 29 — (раздробляется въ дни послѣдній
52 гд. 7 мц. 29 дн. мѣсяцъ года — декабрь=31 дн.).

Тѣ же самыя задачи могутъ быть рѣшены и безъ перевода календарныхъ чиселъ въ ариѳметическія и обратно. Приводимъ это рѣшеніе.

I. 2 сентября 1812 г. Какое число, какого мѣсяца и года было черезъ 1 гд. 6 мц. 17 дн.?

	2 сентября 1812 г.
Черезъ 1 гд.	2 сентября 1813 г. (1812+1=1813).
Черезъ 1 гд. 6 мц. . . .	2 марта 1814 г.
Черезъ 1 гд. 6 мц. 17 дн.	19 марта 1814 г. (2+17=19).

II. 9 февраля 1886 гд. Какое число, какого мѣсяца и года было 7 лт. 5 мц. 20 дн. тому назадъ?

	9 февраля 1886 г.
Тому назадъ 7 лт.	9 февраля 1879 г. (1886—7=1879).
Тому назадъ 7 лт. 5 мц.	9 сентября 1878 г.
Тому назадъ 7 лт. 5 мц. 20 дн. .	20 августа 1878 г.

Послѣднiй переходъ можетъ быть сдѣланъ такъ: откинемъ 9 дней сентября и, слѣдовательно, 11 дней августа (20—9=11); придемъ къ 20-му августа (31—11=20). Или же можно условиться 1-ое сентября называть 32-мъ августа; тогда 9-ое сентября будетъ 40-ое августа (31+9=40); 20 дней тому назадъ было 20-ое августа (40—20=20).

III. Найти промежутокъ времени отъ 30 мая 1672 г. до 28 января 1725 г.

Отъ 30 мая 1672 г. до 30 мая 1724 г. прошло 52 г.	52 гд. 7 мц. 29 дн.
Отъ 30 мая 1724 г. до 30 декабря 1724 г. прошло 7 мц.	
Отъ 30 дек. 1724 г. до 28 января 1725 г. прошло 29 дн.	

Первый изъ этихъ расчетовъ дѣлается такъ: отъ какого-нибудь числа и мѣсяца 1672 г. до того же числа и мѣсяца 1725 г. прошло 53 гд. (1725—1672=53); слѣдовательно, если мы возьмемъ впередъ 53 года отъ 30 мая 1672 г., то придемъ къ 30 мая 1725 г., тогда какъ намъ надо дойти только до 28 января 1725 г.; поэтому отъ 30 мая 1672 г. беремъ впередъ 52 года (а не 53). Третiй расчетъ: до января остался 1 день (31—30=1), до 28 января 29 дней (28+1=29); или такъ: 28-ое января есть 59-ое декабря (31+28=59); отъ 30-го декабря до 59-го декабря прошло 29 дней (59—30=29).

Какъ видимъ, при такомъ рѣшеніи задачъ на вычисленіе времени весьма полезно умѣть брать сразу (на память), по крайней мѣрѣ, полугодовые промежутки времени впередъ и назадъ: 2-ое сентября 1813 г.; черезъ 6 мц. было 2-ое марта 1814 г. (задача I); 9-ое февраля 1879 г.: полгода тому назадъ было 9-ое августа 1878 г., а назадъ тому 5 мц. было 9-ое сентября 1878 г. (задача II); промежутокъ времени отъ 30 мая 1724 г. до 30 декабря 1724 г. (задача III) можетъ быть найденъ такъ: черезъ полгода отъ 30 мая будетъ 30 ноября, слѣд. отъ 30 мая до 30 декабря 7 мѣсяцевъ; или же опредѣлимъ этотъ промежутокъ времени слѣдующимъ образомъ: декабрь — 12-й мѣсяцъ, май — 5-й мѣсяцъ; изъ 12-ти вычесть 5, получится 7.

Пріемы рѣшенія задачъ на вычисленіе времени безъ обращенія календарныхъ чиселъ въ ариѳметическія и ариѳметическихъ въ календарныя часто употребляются на практикѣ, въ житейскихъ расчетахъ. Считаемъ нелишнимъ познакомить съ ними учениковъ. При этомъ должно замѣтить, что такіе пріемы очень удобны въ тѣхъ случаяхъ, когда моменты времени отдѣлены одинъ отъ другого сравнительно небольшимъ промежуткомъ, когда напр. они заключены въ предѣлахъ полусутокъ, сутокъ, недѣли, мѣсяца, года, двухъ лѣтъ. А такими преимущественно задачами и придется ограничиться въ начальной школѣ, какъ задачами, болѣе простыми и чаще встрѣчающимися на практикѣ[1]).

Въ нашемъ сборникѣ эти задачи расположены въ порядкѣ возрастающаго промежутка времени, который заключенъ сначала въ предѣлахъ полусутокъ, сутокъ и двухъ сутокъ (№№ 402—407), затѣмъ въ предѣлахъ недѣли (№№ 408—410), мѣсяца (№№ 411—413), двухъ и трехъ смежныхъ мѣсяцевъ (№№ 414—416), въ предѣлахъ года (№№ 417—419), двухъ смежныхъ лѣтъ (№№ 420—422); лишь въ послѣднихъ трехъ задачахъ (№№ 423—425) событія отдѣлены значительнымъ промежуткомъ времени.

Помѣщенныя вначалѣ подъ №№ 396 — 401 задачи служатъ къ тому, чтобы ученики освоились съ обозначеніями времени дня и ночи (съ часами) и вмѣстѣ съ тѣмъ подготовились къ рѣшенію тѣхъ задачъ, въ которыя входятъ эти обозначенія. Переходимъ собственно къ задачамъ на вычисленіе времени.

---

[1]) Въ объяснительной запискѣ къ министерской программѣ сказано: «Знаніе мѣръ времени необходимо, но долго останавливаться на нихъ не слѣдуетъ: нужны только несложныя задачи на вычисленіе времени».

— Крестьянинъ вышелъ изъ деревни на ярмарку утромъ въ половинѣ 7-го и шелъ 3 чс. 15 мн. Когда пришелъ онъ на ярмарку? (Зад. № 402).

Одно рѣшеніе. — Сколько времени прошло отъ начала сутокъ (отъ полуночи) до выхода крестьянина на ярмарку? — 6 чс. 30 мн. — А сколько времени прошло отъ начала сутокъ до прихода его на ярмарку? — На 3 чс. 15 мн. больше; надо къ 6 чс. 30 мн. прибавить 3 чс. 15 мн.; получится 9 чс. 45 мн. — Который будетъ часъ, когда отъ полуночи пройдетъ 9 чс. 45 мн.? Когда же пришелъ крестьянинъ на ярмарку? — Безъ четверти въ 10 чс. утра.

Другое рѣшеніе. — Крестьянинъ вышелъ въ половинѣ 7-го чс. утра. Который часъ будетъ черезъ 3 часа? — Черезъ 3 часа будетъ половина 10-го чс. утра. — А еще черезъ 15 мн. который будетъ часъ? — 45 мн. 10-го, или безъ четверти 10 утра.

— Уроки начинаются въ школѣ въ 9 чс. утра и кончаются черезъ 5 чс. 30 мн. Когда кончаются въ школѣ уроки? (Зад. № 403).

Одно рѣшеніе. — Сколько времени отъ полуночи до начала уроковъ? А до окончанія ихъ? — До начала уроковъ 9 чс., до окончанія на 5 чс. 30 мн. больше; къ 9 чс. прибавить 5 чс. 30 м., получится 14 чс. 30 мн. Отъ полуночи до окончанія уроковъ 14 чс. 30 мн., а отъ полудня 2 чс. 30 м. (Отъ 14 чс. 30 мн. отнять 12 чс., будетъ 2 чс. 30 мн.) Уроки кончаются въ 2 чс. 30 мн. дня, или въ половинѣ 3-го чс. дня.

Другое рѣшеніе. Отъ 9 чс. утра до полудня 3 чс. (12 чс.—9 чс. = 3 чс.); значитъ отъ полудня до окончанія уроковъ 2 чс. 30 мн. (5 чс. 30 мн. — —3 чс. = 2 чс. 30 мн.).

— Крестьянинъ пахалъ до обѣда 6 чс. 45 мн., а обѣдать онъ сталъ въ половинѣ двѣнадцатаго. Когда началъ онъ пахать? (Задача № 404).

Одно рѣшеніе. — Сколько времени прошло отъ начала сутокъ до обѣда крестьянина? А до того времени, когда онъ началъ пахать? — Меньше на 6 чс. 45 мн.; надо изъ 11 чс. 30 мн. вычесть 6 чс. 45 мн.: получится 4 чс. 45 мн. Крестьянинъ началъ пахать безъ четверти въ 5 утра.

Другое рѣшеніе. Крестьянинъ сталъ обѣдать въ половинѣ двѣнадцатаго; 6 чс. тому назадъ была половина шестого (12—6 = 6); еще назадъ полчаса — пять часовъ; еще назадъ четверть часа — безъ четверти пять.

— Поѣздъ ж. д. шелъ отъ Москвы до Твери 4 чс. 55 мн. и прибылъ въ Тверь въ 2 чс. 15 мн. ночи. Когда вышелъ онъ изъ Москвы? (Зад. № 405).

Одно рѣшеніе. — Въ тотъ же ли день прибылъ поѣздъ въ Тверь, въ какой вышелъ изъ Москвы? — Нѣтъ, на другой день (на другія сутки). — Сколько времени прошло отъ полудня тѣхъ сутокъ, въ которыя онъ вышелъ изъ Москвы, до прибытія его Тверь? — 14 чс. 15 мн. (12 чс. + 2 чс. 15 мн. = 14 чс. 15 мн.). — Что теперь будемъ узнавать? — Сколько времени прошло отъ полудня тѣхъ же сутокъ до его отправленія изъ Москвы: меньше на 4 чс. 55 мн.; отъ 14 чс. 15 мн.

отнять 4 чс. 55 мн., получится 9 чс. 20 мн. Поѣздъ вышелъ изъ Москвы въ 20 мн. десятаго чс. вечера.

Другое рѣшеніе. — Сколько времени шелъ поѣздъ до полуночи? 2 ч. 40 мн. (4 чс. 55 мн. — 2 чс. 15 мн. = 2 чс. 40 мн.). — Когда же онъ вышелъ изъ Москвы? — Онъ вышелъ, когда до полуночи оставалось 2 чс. 40 мн., т.-е. въ 20 мн. десятаго чс. вечера (12 чс. — —2 чс. 40 мн. = 9 чс. 20 мн.).

— Хозяйка пришла въ гости въ половинѣ 4-го чс. дня, а ушла безъ четверти въ 8 чс. вечера. Сколько времени была она въ гостяхъ? (Зад. № 406).

Одно рѣшеніе. Отъ полудня до ухода изъ гостей прошло 7 чс. 45 мн., до прихода въ гости 3 чс. 30 мн. Хозяйка была въ гостяхъ 4 чс. 15 мн. (7 чс. 45 мн. — 3 чс. 30 мн. = 4 чс. 15 мн.).

Другое рѣшеніе. Отъ половины 4-го до половины 8-го прошло 4 чс. (8—4=4), а до безъ четверти восьми — 4 чс. 15 мн.

— Коровъ выгнали въ поле въ три четверти 7-го чс. утра, а погнали домой въ половинѣ 8-го чс. вечера. Сколько времени коровы были на пастбищѣ? (Зад. № 407).

Одно рѣшеніе. Отъ начала сутокъ до загона прошло 19 чс. 30 мн. (12 чс. + 7 чс. 30 мн.), до выгона — 6 чс. 45 мн. Коровы были на пастбищѣ 12 чс. 45 мн. (19 чс. 30 мн. — 6 чс. 45 ун. = 12 чс. 45 мн.).

Другое рѣшеніе. Отъ трехъ четвертей 7-го чс. утра до трехъ четвертей 7-го чс. вечера прошло 12 чс.; до 7-ми чс. вечера — еще 15 мн., до половины восьмого — еще 30 мн.; всего 12 чс. + 15 мн. + 30 мн. = =12 чс. 45 мн.

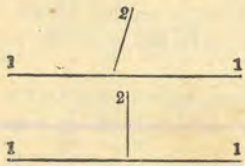
Приведенныхъ примѣровъ вмѣстѣ съ ранѣе сдѣланными указаніми, полагаемъ, учителю достаточно, для того чтобы проработать съ учениками остальныя задачи этого отдѣла.

64. Квадратныя мѣры. Приступая къ ознакомленію учениковъ съ квадратными мѣрами, учитель сообщаетъ дѣтямъ нѣкоторыя геометрическія понятія: объ углѣ, прямомъ углѣ, четырехугольникѣ, квадратѣ, прямоугольникѣ. Всѣ эти понятія удобно вывести, разсматривая съ учениками кубъ и квадратную призму (брусокъ). Если въ школѣ не окажется моделей этихъ тѣлъ, то учитель можетъ самъ склеить ихъ изъ толстой бумаги. (Кубики и бруски ариѳметическаго ящика слишкомъ малы для этой цѣли.)

Показывая ученикамъ кубъ, учитель ведетъ съ ними такую бесѣду.

— Какъ называется этотъ предметъ? Изъ сколькихъ частей состоитъ поверхность куба? Эти части поверхности называются *гранями* куба. Какъ расположены грани у того куба, который находится предъ вами? — Вверху, внизу, справа, слѣва, спереди, сзади. — Которая изъ граней куба больше другихъ? Да, всѣ грани куба одинаковы. Чтобы провѣрить это, я приложу кубъ одною гранью къ классной доскѣ и обведу эту грань мѣломъ. Теперь на этотъ

рисунокъ стану накладывать кубъ прочими гранями; вы видите, что каждая изъ этихъ граней какъ разъ покрываетъ нашъ рисунокъ. — Каждыя двѣ грани, сходясь вмѣстѣ, образуютъ *ребро* куба. Сколько реберъ имѣетъ кубъ? Какъ расположены ребра у нашего куба? — 4 наверху, 4 внизу и 4 съ боковъ. — На нашемъ рисункѣ ребро куба изображено чертой, линіей. — Три ребра куба, сходясь вмѣстѣ, образуютъ *вершину* куба. Ребро куба есть *линія*, а вершина куба есть *точка*. Сколько вершинъ имѣетъ кубъ? Какъ расположены онѣ у нашего куба? — Какъ называется то мѣсто, гдѣ сходятся двѣ стѣны? Два ребра куба, сходящіяся вмѣстѣ, образуютъ также *уголъ*. (Указываетъ на рисунокъ, изображающій грань куба.) Сколько угловъ имѣетъ грань куба? Какъ поэтому можно назвать грань куба? — Грань куба можно назвать *четырехугольникомъ*. — Линіи, которыя окружаютъ этотъ четырехугольникъ, называются *сторонами* его. Которая изъ этихъ сторонъ больше другихъ? Да, всѣ онѣ равны между собою. Провѣримъ это при помощи нитки. Далѣе учитель чертитъ на классной доскѣ двѣ прямыя линіи (1, 2) и спрашиваетъ: одинаково ли наклонена вторая линія къ первой какъ справа, такъ и слѣва? Проводятся еще двѣ прямыя линіи, и предлагается тотъ же вопросъ. — Когда одна линія наклонена къ другой одинаково съ обѣихъ сторонъ, тогда углы между этими линіями называются *прямыми* углами. Учитель чертитъ на классной доскѣ различные углы (острый, прямой, тупой) и спрашиваетъ учениковъ, который изъ этихъ угловъ прямой и какіе не прямые. (Можно сообщить названія: *острый* уголъ и *тупой* уголъ.) — Какіе углы имѣетъ четырехугольникъ, изображающій грань куба? Четырехугольникъ, у котораго всѣ углы прямые и всѣ стороны равны между собою, называется *квадратомъ*. Всѣ грани куба — квадраты.



Затѣмъ разсматривается квадратная призма, которую дѣти могутъ назвать словомъ „брусокъ“; учитель сообщаетъ, что этотъ предметъ называется призмой. — Похожа ли эта призма на кубъ? — Похожа, только выше. — Изъ сколькихъ граней состоитъ поверхность призмы? Какъ расположены эти грани у нашей призмы? Всѣ ли шесть граней призмы одинаковы? Которыя грани равны между собою? — Верхняя и нижняя равны между собою; правая, лѣвая, передняя и задняя (боковыя) равны между собою. (Дѣлается повѣрка: обчерчивается нижняя грань, и на полученный рисунокъ

накладывается призма верхней гранью; обчерчивается одна изъ боковыхъ граней, и на рисунокъ накладывается призма прочими боковыми гранями.) — Сколько угловъ имѣетъ каждая грань призмы? Какъ же можно назвать каждую грань призмы? Какіе углы имѣетъ каждая грань? Одинаковы ли всѣ стороны въ первомъ четырехугольникѣ (изображающемъ нижнюю или верхнюю грань призмы)? Провѣрьте это при помощи нитки. Какъ же назовете вы этотъ четырехугольникъ? Одинаковы ли всѣ четыре стороны во второмъ четырехугольникѣ (изображающемъ боковую грань призмы)? Провѣрьте ниткой. Всѣ ли четыре стороны разныя? Которыя стороны одинаковы? — Одинаковы нижняя и верхняя; одинаковы правая и лѣвая. — Такой четырехугольникъ, у котораго углы прямые, но стороны не всѣ равны между собою, называется прямоугольнымъ четырехугольникомъ, или — короче — *прямоугольникомъ*. Какъ назовете вы верхнюю и нижнюю грань призмы? Какъ назовете каждую изъ боковыхъ граней? Найдите въ классѣ примѣры прямоугольниковъ. (Полъ, потолокъ, оконное стекло и т. д.) Найдите примѣры квадратовъ. (Классная доска и др.) — Ту сторону прямоугольника, которая больше, будемъ называть *длиною* прямоугольника; а ту, которая меньше, *шириною* его. Укажите длину и ширину квадрата. Здѣсь что больше: длина или ширина? Да, у квадрата длина и ширина одинаковы.

— Что занимаетъ на доскѣ больше мѣста: квадратъ (изображающій нижнюю или верхнюю грань призмы) или прямоугольникъ (изображающій боковую грань)? Мѣсто, занимаемое прямоугольникомъ или квадратомъ, называется *площадью* прямоугольника или квадрата. — Выкрасить съ одной стороны квадратную доску, длина (и ширина) которой равна аршину, стоитъ 10 коп. Какъ узнать, что̀ будетъ стоить выкрасить полъ нашей комнаты? Узнать, во сколько разъ площадь пола больше площади этой доски — значитъ измѣрить площадь пола. Квадратная доска будетъ въ этомъ случаѣ мѣра, или единица. Вообще, площади измѣряются квадратами, у которыхъ сторона равна аршину, футу, сажени и т. д. Квадратъ, у котораго сторона равна аршину, называется *квадратный аршинъ*. Что такое кв. сажень? кв. футъ?

На классной доскѣ чертится прямоугольникъ, площадь котораго измѣряется *непосредственно* квадратнымъ футомъ: квадратный футъ (деревянная доска или картонный листъ) накладывается (рядами) на измѣряемую площадь и обчерчивается въ каждомъ положеніи. Ученики считаютъ, сколько разъ уложился кв. футъ. — Сосчитать,

сколько разъ уложился кв. футъ въ измѣряемой площади, удобнѣе всего такъ. Сосчитайте сначала, сколько кв. футовъ въ первомъ (верхнемъ) ряду? Сколько футовъ содержитъ длина прямоугольника? (4). А если бы длина прямоугольника была 5 или 6 футовъ, сколько было бы квадратныхъ футовъ въ первомъ ряду? Теперь сосчитайте, сколько такихъ рядовъ? (3). Какова ширина прямоугольника? А если бы ширина была 4 или 5 футовъ, тогда сколько было бы такихъ рядовъ? Итакъ, въ каждомъ ряду 4 кв. фута, а рядовъ 3. Какъ же узнать, сколько разъ уложился кв. футъ въ измѣряемой площади? Чему равна площадь этого прямоугольника?

На классной доскѣ чертится другой прямоугольникъ. — Я хочу измѣрить площадь этого прямоугольника квадратнымъ вершкомъ; но квадратнаго вершка у насъ нѣтъ: есть только простой (линейный) вершокъ (аршинъ, раздѣленный на вершки). Нельзя ли съ помощью линейнаго вершка узнать, сколько квадратныхъ вершковъ содержитъ площадь этого прямоугольника? Какъ же это сдѣлать? — Надо измѣрить длину и ширину прямоугольника. (Дѣлается измѣреніе: длина оказывается напр. 9 вр., ширина 7 вр.) — Какъ теперь узнать, сколько квадратныхъ вершковъ содержится въ площади этого прямоугольника? — Надо 9 умножить 7; $9 \times 7 = 63$; 63 кв. вершка. — Почему надо 9 умножить на 7? — Если бъ у насъ былъ квадратный вершокъ, и мы стали бы его укладывать рядами по длинѣ прямоугольника, то въ каждомъ ряду было бы 9 кв. вершковъ, потому что длина прямоугольника = 9 вр.; такихъ рядовъ вышло бы 7, потому что ширина прямоугольника равна 7 вр. Въ каждомъ ряду 9 кв. вершковъ, рядовъ 7; чтобы узнать, сколько всего кв. вершковъ, надо 9 умножить на 7. — Итакъ, что надо сдѣлать, чтобы измѣрить площадь прямоугольника? — Надо измѣрить его длину и ширину; потомъ умножить длину на ширину. — Если мы измѣримъ длину и ширину линейнымъ дюймомъ, то въ какихъ мѣрахъ узнаемъ площадь прямоугольника? Длину пола измѣрили аршиномъ, и она оказалась равною 17 арш.; ширину пола измѣрили саженью, въ ней вышло 3 сажени. Въ какихъ квадратныхъ мѣрахъ найдете вы площадь пола? Найдите. Длина (высота) двери равна 2 ар. 14 вр., ширина 1 ар. 12 вр. Въ какихъ кв. мѣрахъ узнаете вы площадь двери? Узнайте.

На классной доскѣ чертится квадратъ. — Измѣримъ площадь этого квадрата кв. вершкомъ. Что надо для этого сдѣлать? У квадрата длина и ширина одинаковы; стало-быть, достаточно измѣрить только одну сторону его. (Дѣлается измѣреніе: пусть сторона = 11 вр.)

Какъ же узнать теперь, сколькимъ квадратнымъ вершкамъ равна площадь квадрата? — Сторона квадрата равна 7 дм. Какова площадь его? Сторона квадрата содержитъ 3 саж. 2 вр. Въ какихъ квадратныхъ мѣрахъ найдете вы площадь его? Найдите.

Послѣ этого составляется таблица квадратныхъ мѣръ (стран. 80 нашего сборника).

Затѣмъ ученики упражняются въ раздробленіи и превращеніи именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ квадратныхъ мѣрахъ (№№ 426 и 427; №№ 428 и 429), и продѣлываютъ нѣсколько задачъ и примѣровъ на каждое изъ четырехъ дѣйствій съ такими числами (№№ 430—434).

Особенное вниманіе должно быть обращено на рѣшеніе задачъ, относящихся къ вычисленію поверхностей (№№ 435—448). Задачи эти двухъ родовъ: 1) найти площадь прямоугольника (или квадрата), когда извѣстны его стороны; 2) найти одну изъ сторонъ прямоугольника, когда даны его площадь и другая сторона.

65. Кубическія мѣры.

Учитель показываетъ дѣтямъ уже знакомую имъ квадратную призму и затѣмъ призму съ прямоугольнымъ основаніемъ (высота и ширина у второй призмы такія же, какъ у первой; только длина побольше). — Которая изъ этихъ призмъ больше? Которая выше? Сравните ихъ высоты съ помощью нитки. Высоты у нихъ одинаковы. Которая шире? (Дѣлается сравненіе ширины: ширина призмъ одинакова). Что же у этихъ призмъ не одинаково? Сравните ихъ длину. Покажите длину, ширину и высоту призмы. Длина ширина и высота призмы называются *измѣреніями* ея. Покажите длину, ширину и высоту куба. Которое изъ этихъ измѣреній у куба больше? — У куба всѣ измѣренія одинаковы. — Покажите длину, ширину и высоту вотъ этой призмы (даетъ квадратную призму). Которыя изъ этихъ измѣреній одинаковы? — Одинаковы длина и ширина. — А у этой призмы (показываетъ прямоугольную призму) есть ли одинаковыя измѣренія? — У этой призмы всѣ три измѣренія разныя.

— Чѣмъ измѣряютъ рожь, овесъ, спиртъ, масло? Когда измѣряютъ овесъ четвериками или спиртъ ведрами, то узнаютъ, сколько мѣста занимаетъ овесъ или спиртъ. Мѣсто, которое занимаетъ предметъ, называется *объемомъ* его (объ этомъ я уже говорилъ вамъ раньше). Сыпучее вещество (напр. овесъ) или жидкое (напримѣръ,

спиртъ) можно насыпать или налить въ сосудъ; для сыпучихъ тѣлъ одинъ изъ такихъ сосудовъ есть четверикъ, для жидкихъ ведро. Но можно ли измѣрить какимъ-либо сосудомъ объемъ тѣла не сыпучаго и не жидкаго, напримѣръ объемъ деревянной балки? Для измѣренія объемовъ берутъ за единицу кубъ, у котораго ребро равно какой-нибудь линейной единицѣ. Кубъ, котораго ребро равно аршину, называется *кубическимъ аршиномъ*. Что такое кубическая сажень? кубическій футъ? (Показываетъ кубикъ ариѳметическаго ящика). Вотъ у этого кубика ребро равно дюйму; какъ назовете вы этотъ кубикъ? Измѣрить кубическимъ дюймомъ объемъ нашей призмы — значитъ узнать, во сколько разъ призма больше этого кубика (узнать, сколько кубиковъ можно было бы напилить изъ призмы).

Способъ измѣренія объема призмы выясняется наглядно. Для этой цѣли можетъ служить пустой ариѳметическій ящикъ или — лучше — ящикъ (коробка), у котораго всѣ измѣренія различны; съ такого ящика снимается крышка и передняя грань, обращенная къ ученикамъ. Единицей для измѣренія можетъ быть взятъ кубикъ ариѳметическаго ящика, принимаемый за кубическій дюймъ (если онъ не есть таковой и на самомъ дѣлѣ). Измѣримъ объемъ этого ящика кубическимъ дюймомъ, т.-е. узнаемъ, сколько такихъ кубиковъ можетъ помѣститься въ ящикѣ. Будемъ класть кубики въ ящикъ. Кладетъ рядъ кубиковъ на дно ящика вдоль задняго ребра (по длинѣ) и затѣмъ рядъ кубиковъ вдоль праваго или лѣваго ребра (по ширинѣ). — Сколько кубиковъ помѣщается по длинѣ дна? (8). Сколько по ширинѣ? (6). Для того, чтобы узнать, сколько кубиковъ можно поставить на дно ящика, надо ли покрывать кубиками все дно? Какъ же узнать, сколько кубиковъ помѣстится на днѣ ящика? Эти 48 кубиковъ покроютъ все дно и составятъ нижній слой; на этотъ слой можно поставить другой такой же слой, потомъ третій... Узнаемъ, сколько будетъ такихъ слоевъ. Ставитъ рядъ кубиковъ по заднему боковому ребру (правому или лѣвому), т.-е. по высотѣ (такъ, чтобы кубики были размѣщены внутри ящика по тремъ ребрамъ, выходящимъ изъ одной вершины). — Сколько кубиковъ укладывается по высотѣ? (5). На дно можно поставить слой въ 48 кубиковъ; сколько будетъ такихъ слоевъ? Сколько же кубиковъ можетъ помѣститься въ ящикѣ? Чему равенъ объемъ ящика? Могли бы мы узнать это, если бы у насъ не было кубика (кубическаго дюйма), а былъ бы только линейный дюймъ? Какъ стали бы мы узнавать? — Мы измѣрили бы длину, ширину и высоту ящика: длину умно-

жили бы на ширину; а то, что получилось, умножили бы на высоту. — Когда мы умножимъ длину на ширину, что этимъ узнаемъ? — Этимъ узнаемъ, сколько кубиковъ можно поставить на дно (узнаемъ площадь дна). — А когда полученное число умножимъ на высоту, что тогда узнаемъ? — Тогда узнаемъ, сколько кубиковъ помѣстится въ ящикѣ, узнаемъ его объемъ. — Длина комнаты 5 саж., ширина 10 арш., высота 1 саж. 2 арш. Въ какихъ кубическихъ мѣрахъ узнаете вы объемъ этой комнаты? Узнайте.

— Ребро куба равно 9 вершкамъ. Найдите объемъ этого куба. — Длина, ширина и высота у куба одинаковы, по 9 вершковъ; длину умножимъ на ширину: $9 \times 9 = 81$; 81 умножимъ на высоту: $81 \times 9 = 729$; 729 куб. вершковъ. — Когда вычисляется объемъ куба, тогда вмѣсто словъ „длина, ширина, высота" можно говорить „ребро". Какъ же вычислить объемъ куба? — Чтобы вычислить объемъ куба, надо ребро куба умножить само на себя; то, что получится, еще разъ умножить на ребро; или: надо ребро куба умножить само на себя два раза. — Ребро куба равно 2 фт. 6 дм. Въ какихъ кб. мѣрахъ найдете вы объемъ его? Найдите.

Послѣ этого составляется таблица кубическихъ мѣръ (стран. 83 нашего сборника).

Затѣмъ ученики упражняются въ раздробленіи и превращеніи именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ кубическихъ мѣрахъ (№№ 449 и 450; №№ 451 и 452), и продѣлываютъ нѣсколько задачъ и примѣровъ на каждое изъ четырехъ дѣйствій съ такими числами (№№ 453—457).

Главнымъ же образомъ, упражненія съ кубическими мѣрами состоятъ въ рѣшеніи задачъ, относящихся къ вычисленію объемовъ (№№ 458—471). Задачи эти трехъ родовъ: 1) найти объемъ призмы, когда извѣстны три измѣренія ея; 2) найти площадь одной изъ граней (напр. дна), когда извѣстны объемъ и одно измѣреніе (высота, глубина); 3) найти одно изъ измѣреній, когда извѣстны объемъ и прочія два измѣренія (порознь или въ видѣ площади образуемаго ими прямоугольника).

66. Задачи на проценты. Сначала дѣтямъ можетъ быть дано понятіе о процентѣ, какъ о прибыли, получаемой въ годъ со 100 рублей капитала. Потомъ понятіе о процентѣ расширяется примѣненіемъ процентовъ къ инымъ, не денежнымъ, вопросамъ.

Предлагаемъ указать ученикамъ слѣдующіе пріемы рѣшенія задачъ на проценты.

1) Сначала вычислить прибыль, приходящуюся на круглыя сотни капитала, затѣмъ на остальную часть его, меньшую сотни.

Задача. Сколько прибыли (процентныхъ денегъ) получится въ годъ съ капитала 12587 р., отданнаго по $6^0/_0$?

Рѣш. Капиталъ 12587 р. состоитъ изъ 125 сотенъ рублей и изъ 87 рублей. Одна сотня приноситъ 6 р., 125 сотенъ дадутъ 125 разъ по 6-ти рублей (въ 125 разъ больше 6-ти рублей): $6 \times 125 = 750$; 750 р. Прибыль съ остальной части капитала, т.-е. съ 87 рублей, можетъ быть найдена приведеніемъ къ единицѣ: 100 р. приносятъ 6 р., одинъ рубль приноситъ въ 100 разъ меньше, т.-е. 6 коп., 87 р. дадутъ въ 87 разъ больше 6-ти коп.: $6 \times 87 = 522$; 5 р. 22 к. Прибыль со всего капитала будетъ 750 р. + 5 р. 22 к. = 755 р. 22 к.

Процентныя деньги со второй части капитала могутъ быть найдены способомъ отношеній, если эта часть равна напр. 50 р., 25 р., 20 р. и т. д., или способомъ сложенія кратныхъ частей, если она будетъ напр. 75 р. (Гл. VI, § 54, I типъ). Такъ, если бы въ приведенной задачѣ капиталъ былъ 12550 р., то прибыль съ 50-ти р. мы нашли бы, раздѣливши 6 р. пополамъ; если бъ онъ былъ 12520 р., то прибыль съ 20-ти руб. мы узнали бы, раздѣливши 6 р. на 5; если бъ капиталъ былъ 12575 р., то прибыль съ 75-ти руб. мы опредѣлили бы, разсматривая 75 руб. какъ 50 р. + 25 р., т.-е. полсотни и четверть сотни (6 р. : 2 = 3 р., 6 р. : 4 = 1 р. 50 к.; 3 р. + 1 р. 50 к. = 4 р. 50 к.).

2) Разсматривая $1^0/_0$ какъ сотую часть капитала, сначала найти прибыль, соотвѣтствующую $1^0/_0$, а затѣмъ — данному числу процентовъ. Такъ, для рѣшенія приведенной выше задачи разсуждаемъ: $1^0/_0$ съ 12587 руб. (т.-е. прибыль съ этого капитала, считая по $1^0/_0$) равенъ 125 р. 87 к. (13587 р. : 100 = 125 р. 87 к.), а $6^0/_0$—въ 6 разъ больше: 125 р. 87 к. $\times 6 = 755$ р. 22 к.

3) Разсматривать данный размѣръ процентовъ, какъ опредѣленную часть капитала. Напр. $5^0/_0$ есть $^1/_{20}$ капитала, $10^0/_0$—$^1/_{10}$, $20^0/_0$—$^1/_5$, $40^0/_0$—$^2/_5$, $75^0/_0$—$^3/_4$. Тогда опредѣленіе процентныхъ денегъ сведется къ отысканію частей даннаго числа.

Задача. Сколько процентныхъ денегъ получится въ 4 года съ капитала 9530 р., отданнаго по $5^0/_0$?

Рѣш. Прибыль за годъ составляетъ $^1/_{20}$ капитала, прибыль за 4 года равна $^4/_{20}$, или $^1/_5$ капитала. 9530 р. : 5 = 1906 р.

Этотъ пріемъ бываетъ очень удобенъ въ процентныхъ вычисленіяхъ, относящихся къ вопросамъ не денежнымъ.

Задача. У помѣщика 532 десятины земли, изъ которыхъ 25% находится подъ лѣсомъ. Сколько десятинъ лѣсу у помѣщика?

Рѣш. 25% — это $^1/_4$; 532 : 4 = 133; 133 десятины.

Мы говорили до сихъ поръ о рѣшеніи такихъ задачъ, въ которыхъ отыскивается прибыль (процентныя деньги). Этимъ задачамъ среди процентныхъ вычисленій должно быть отведено болѣе мѣста, такъ какъ онѣ чаще встрѣчаются на практикѣ. Приведемъ нѣсколько примѣровъ задачъ обратныхъ.

а) Опредѣлить капиталъ.

— Какой капиталъ, будучи отданъ по 4%, дастъ въ годъ 144 рубля прибыли?

Рѣш. Капиталъ состоитъ изъ столькихъ сотенъ (во столько разъ больше сотни рублей), сколько разъ 4 р. содержатся въ 144 р.; 144 : 4 = 36; капиталъ равенъ 36 сотнямъ рублей, или 3600 р.

— Какой капиталъ надо отдать по 6%, чтобы имѣть въ годъ 392 р. 40 к. процентныхъ денегъ?

Рѣш. Найдемъ 1%, т.-е. узнаемъ, сколько прибыли приносилъ бы въ годъ капиталъ, если бъ онъ былъ отданъ по 1%; 392 р. 40 к. : 6 = 65 р. 40 к. Это есть сотая часть капитала: капиталъ въ 100 разъ больше этой прибыли; онъ равенъ 6540 р.

— Въ старшемъ отдѣленіи училища находится 20% всѣхъ учащихся, а именно 12 человѣкъ. Сколько всѣхъ учащихся въ этомъ училищѣ?

Рѣш. 20% — это $^1/_5$. Всѣхъ учащихся въ 5 разъ больше 12-ти; 12 × 5 = 60; 60 человѣкъ.

б) Опредѣлить размѣръ процентовъ.

— По скольку процентовъ надо отдать 3500 р., чтобы имѣть въ годъ 245 р. процентныхъ денегъ?

Рѣш. 3500 — это 35 сотенъ; съ нихъ приходится 245 р., съ одной сотни — въ 35 разъ меньше; 245 : 35 = 7; по 7%.

— Кузнецъ выковалъ косы изъ 2 пудовъ желѣза; во всѣхъ нихъ оказалось вѣсу 1 пд. 32 фн., такъ какъ желѣзо при ковкѣ угораетъ. Какой процентъ желѣза угораетъ при ковкѣ?

Рѣш. 2 пд. — 1 пд. 32 фн. = 8 фн.; изъ 2 пд., или изъ 80 фн., желѣза угораетъ 8 фн.; это составляетъ десятую часть (80 : 8 = 10), а десятая часть есть 10%.

в) Опредѣлить время.

— Во сколько времени 4800 р., отданные по 8%, принесутъ 768 р. процентныхъ денегъ?

Рѣш. Узнаемъ процентныя деньги за годъ: $8 \times 48 = 384$; 384 руб. Опредѣляемъ, во сколько разъ 768 р. больше, чѣмъ 384 р.: 768 р. : $384 = 2$. Искомое время — 2 года.

Задачи на проценты мы помѣстили во второмъ и третьемъ выпускѣ нашего сборника: годъ второй, стран. 71—73, №№ 216—235 и №№ 246—251[1]); годъ третій, стран. 87—91, №№ 472—489. Попутно съ рѣшеніемъ задачъ на проценты, ученики получаютъ понятіе о банкѣ, сберегательной кассѣ, процентныхъ бумагахъ, купонахъ и т. д.

67. Болѣе трудныя задачи. Эти задачи, помѣщенныя въ концѣ третьяго выпуска нашего сборника, представляютъ собою дальнѣйшее развитіе тѣхъ типовъ, которые приведены нами въ отдѣлѣ задачъ на всѣ дѣйствія надъ числами любой величины и составными именованными числами (§ 54 главы VI)[2]). Задачами, которыя назвали мы болѣе трудными, школа, по нашему мнѣнію, можетъ воспользоваться лишь при особенно благопріятныхъ условіяхъ или же по отношенію только къ нѣкоторымъ, лучшимъ, ученикамъ.

Вначалѣ поставили мы задачи такого содержанія:

— Даны два числа 4 и 9: взято нѣсколько четверокъ и нѣсколько девятокъ, всего 5 чиселъ; среднее ариѳметическое ихъ оказалось равнымъ 6-ти. Сколько взято четверокъ и сколько девятокъ? (Задача второго рода на смѣшеніе; см. 3-ю задачу II типа, § 54 главы VI).

Такъ какъ всѣхъ чиселъ взято 5, а среднее ариѳметическое ихъ равно 6-ти, то сумма всѣхъ взятыхъ чиселъ будетъ 30. Задачу можно выразить въ такой формѣ:

— Сколько надо взять четверокъ и сколько девятокъ, такъ чтобы всѣхъ чиселъ взято было 5, и чтобы сумма ихъ равнялась 30-ти? Или такъ:

— Число 30 разложить на четверки и девятки такимъ образомъ, чтобы всѣхъ четверокъ и девятокъ вмѣстѣ было 5. Сколько будетъ тѣхъ и другихъ?

---

[1]) Мы привели здѣсь эти задачи, имѣя въ виду тѣхъ учениковъ, которые оставляютъ школу послѣ двухъ лѣтъ обученія въ ней (кончаютъ среднимъ отдѣленіемъ).

[2]) Разсмотрѣнныя выше задачи на проценты также принадлежатъ къ одному изъ этихъ типовъ (I типъ — тройное правило).

Сюда принадлежатъ задачи №№ 490—493.

Способъ рѣшенія такихъ задачъ можетъ быть выясненъ наглядно.

— У матери 7 человѣкъ дѣтей; всѣмъ имъ она купила 36 ар. ситцу: сыновьямъ — на рубашки, по 3 ар. каждому; дочерямъ — на платья, каждой по 8 ар. Сколько у матери сыновей и сколько дочерей? (Зад. № 490).

— Скажемъ эту задачу по-другому; 36 ар. ситцу надо раздѣлить семерымъ дѣтямъ; каждому сыну дать (отрѣзать) по 3 ар., каждой дочери — по 8 ар. Вотъ 36 кубиковъ: ихъ надо раздѣлить на 7 кучекъ такъ, чтобы въ однѣхъ кучкахъ было по 3 кубика, въ другихъ — по 8 кубиковъ.

Весьма возможно, что ученики смекнутъ, какъ это сдѣлать (въ противномъ случаѣ учитель покажетъ это самъ).

— Поставимъ въ каждую изъ 7-ми кучекъ по 3 кубика. — Всѣ ли кубики будутъ разложены? Что же сдѣлать съ оставшимися кубиками? — Ихъ надо тоже разложить: ими надо добавлять кучки. Мы поставили въ каждую кучку по 3 кубика, а въ иныхъ кучкахъ должно быть по 8 кубиковъ: надо добавлять по 5 кубиковъ. Поставимъ еще 5 кубиковъ въ первую кучку, поставимъ еще 5 кубиковъ во вторую кучку; поставимъ еще 5 кубиковъ въ третью кучку. Всѣ оставшіеся кубики вышли. Мы разложили 36 кубиковъ такъ, какъ требовалось: кучекъ по 8-ми кубиковъ оказалось три, а кучекъ по 3 кубика — четыре.

Отъ наглядныхъ пособій слѣдуетъ перейти къ отвлеченнымъ числамъ: выразить сдѣланный процессъ разложенія при помощи ариѳметическихъ дѣйствій.

— Число 36 (36 единицъ) надо разложить на 7 частей такимъ образомъ, чтобы въ однѣхъ частяхъ было по 3 единицы, а въ другихъ по 8-ми единицъ. Какъ это сдѣлать? — Надо положить въ каждую часть по 3 единицы. — Сколько единицъ будетъ тогда разложено? Какъ это узнать? — $3 \times 7 = 21$. — Всѣ ли единицы разложены? Что теперь надо узнать? — Надо узнать, сколько единицъ не разложено. — Какъ это узнать? — $36 - 21 = 15$. — Что теперь надо дѣлать? — Надо добавлять части: класть еще по 5-ти единицъ. — Какъ узнать, что надо класть еще по 5-ти единицъ? — Изъ 8-ми вычесть 3, будетъ 5 (въ иныхъ частяхъ должно быть по 8-ми единицъ, а мы положили только по 3 единицы). — Сколько частей можно добавить? — Столько частей, сколько разъ отъ 15-ти можно брать по пяти, сколько разъ 5 содержится въ 15-ти; $15 : 5 = 3$. — Во сколькихъ же частяхъ будетъ по 8-ми единицъ? Во сколькихъ

частяхъ будетъ будетъ по 3 единицы? Какъ это узнать?—7—3=4 (всѣхъ частей семь, частей по 8-ми единицъ—три; остальныя части будутъ по 3 единицы).

Послѣ этого можно обратиться къ задачѣ.

— На сколько частей (сколькимъ дѣтямъ) надо раздѣлить 36 ар. ситцу? По скольку аршинъ должно быть въ однѣхъ частяхъ? въ другихъ? Какъ станете рѣшать задачу?—Положимъ въ каждую часть по 3 аршина. — Слушайте: когда мы кладемъ въ каждую часть по 3 ар., то этимъ самымъ мы предполагаемъ, что всѣ 7 человѣкъ дѣтей—сыновья. Что же будемъ узнавать?—Будемъ узнавать, сколько аршинъ ситцу потребовалось бы для 7-ми сыновей: $3 \times 7 = 21$; 21 ар.—Что узнаете дальше?—Сколько аршинъ останется: $36 - 21 = 15$; 15 ар.—Вотъ видите: если бы всѣ дѣти были сыновья, имъ надо было бы 21 ар.; но мать купила еще лишку 15 ар.; что же это значитъ?—Это значитъ, что не всѣ дѣти сыновья: между ними есть и дочери. — На сколько больше ситцу идетъ для дочери, чѣмъ для сына? Какъ это узнать?—$8 - 3 = 5$; на 5 ар.—Если бъ изъ семи человѣкъ дѣтей у матери была одна дочь, тогда сколько лишнихъ аршинъ ситцу купила бы мать (сверхъ 21 аршина)?—Лишнихъ 5 ар.—А на самомъ дѣлѣ сколько лишку купила мать?—15 ар.—Что же можно изъ этого узнать?—Можно узнать, сколько у матери дочерей?—Какъ это узнать? Почему надо 15 раздѣлить на 5?—Дочерей столько, сколько разъ 5 содержится въ 15-ти: 3 дочери.

Иначе можно разсуждать такъ. Предположимъ, что всѣ дѣти—дочери. Тогда имъ потребовалось бы 56 ар. ситцу ($8 \times 7 = 56$); куплено же меньше этого на 20 ар. ($56 - 36 = 20$). Значитъ, не всѣ дѣти дочери. Если бъ изъ семи человѣкъ былъ одинъ сынъ, то ситцу надо было бы купить меньше (противъ 56-ти ар.) на 5 ар. ($8 - 3 = 5$); а такъ какъ ситцу куплено меньше на 20 ар., то заключаемъ, что сыновей столько, сколько разъ 5 содержится въ 20-ти, т.-е. 4 сына.

Предполагая, что всѣ слагаемыя одинаковы, равны меньшему или большему изъ данныхъ чиселъ (всѣ дѣти—сыновья или всѣ дѣти—дочери), мы находимъ сумму этихъ слагаемыхъ (21 или 56) и затѣмъ опредѣляемъ недостатокъ или излишекъ этой суммы сравнительно съ требуемой суммой (36). Этотъ недостатокъ (15) или излишекъ (20) вмѣстѣ съ разностью данныхъ чиселъ ($8 - 3 = 5$) позволяетъ найти число тѣхъ или другихъ изъ нихъ (въ первомъ случаѣ число восьмерокъ, во второмъ число троекъ). Изложенный

пріемъ рѣшенія можетъ быть названъ, поэтому, *способомъ недостатка или излишка сравнительно съ требуемой суммой.*

Вмѣсто того, чтобы находить недостатокъ или излишекъ противъ требуемой суммы, можно взять излишекъ и недостатокъ сравнительно съ требуемымъ среднимъ ариѳметическимъ; этотъ излишекъ и недостатокъ даютъ отношеніе между числомъ тѣхъ и другихъ чиселъ и приводятъ къ задачѣ на пропорціональное дѣленіе.

— Съ завода отправили кирпичъ на 24 подводахъ; на однѣ подводы клали по 120 штукъ кирпича, на другія — по 150, а если бы положить весь этотъ кирпичъ на всѣ подводы поровну, то на каждую пришлось бы по 130 штукъ. На сколько подводъ положили по 120 штукъ кирпича и на сколько по 150 штукъ? (Задача № 492).

Рѣш. Представимъ себѣ, что весь кирпичъ положенъ на 24 подводы, по 130 штукъ на каждую. Теперь съ однѣхъ изъ этихъ подводъ надо снять по 10 штукъ (130 — 120 = 10), а на другія положить по 20 штукъ (150 — 130 = 20). Какихъ подводъ больше: тѣхъ ли, съ которыхъ надо снять, или тѣхъ, на которыя надо положить? Первыхъ больше, именно въ 2 раза больше, потому что 20 кирпичей, которые кладутся на *одну* подводу, снимаются съ *двухъ* подводъ. Итакъ, всѣхъ подводъ 24, при чемъ однѣхъ вдвое больше, чѣмъ другихъ. (Дѣленіе на части, кратно неравныя).

Примѣчаніе. Вся трудность заключается здѣсь въ томъ, чтобы сообразить, во сколько разъ однихъ чиселъ должно быть больше, чѣмъ другихъ. Разсужденія, ведущія къ отысканію этого отношенія, могутъ быть различны. Возьмемъ, напр., такую задачу. Въ лавкѣ были орѣхи двухъ сортовъ; первый сортъ торговецъ продавалъ по 26 к. за фунтъ, второй сортъ — по 18 к.; когда всѣхъ орѣховъ оставалось 36 фн., торговецъ смѣшалъ ихъ и, продавши смѣсь по 20 к. за фунтъ, выручилъ столько же, сколько выручилъ бы, если бъ продалъ эти сорта отдѣльно. Сколько оставалось орѣховъ того и другого сорта? — Продавая фунтъ перваго сорта по 20 к., торговецъ недовыручилъ 6-ти коп.; продавая фунтъ второго сорта по 20 коп., онъ перевыручилъ 2 коп. Далѣе разсуждаемъ различно. 1) 1 коп недовыручки приходится на $^1/_6$ фн. перваго сорта; 1 коп. перевыручки на $^1/_2$ фн. второго сорта; 1 коп. недовыручки покрывается 1 коп. перевыручки; слѣд., на $^1/_6$ фн. перваго сорта надо взять $^1/_2$ фн. второго сорта; $^1/_2$ въ 3 раза больше, чѣмъ $^1/_6$: второго сорта втрое больше, чѣмъ перваго. 2) Возьмемъ перваго сорта 2 фн. (сколько фунтовъ, сколькимъ копейкамъ равна перевыручка со вто-

рого сорта), а второго сорта 6 фн. (столько фунтовъ, сколькимъ копейкамъ равна недовыручка съ перваго сорта); тогда недовыручка 12 коп. покроется перевыручкой 12 коп.; итакъ, на 2 фн. перваго сорта приходится 6 фн. второго: второго сорта въ 3 раза больше, чѣмъ перваго. 3) Назначимъ произвольно количество, напр., перваго сорта, возьмемъ его 10 фн.; они дадутъ недовыручки 60 коп.; узнаемъ, сколько надо взять второго сорта, чтобы покрыть эту недовыручку: 60 : 2 = 30; 30 фн.; итакъ, на 10 фн. перваго сорта приходится 30 фн. второго: второго сорта втрое больше, чѣмъ перваго. Замѣтимъ еще, что вмѣсто задачи на пропорціональное дѣленіе можно имѣть задачу на тройное правило: напр., найдя, что на 2 фн. перваго сорта приходится 6 фн. второго, продолжаемъ такъ: въ 8 фн. смѣси (2 + 6 = 8) перваго сорта входитъ 2 фн.; сколько войдетъ его въ 36 фн. смѣси?

Къ разсматриваемому типу могутъ быть отнесены и такія задачи, въ которыхъ вмѣсто суммы является разность (№№ 494—496).

— Мастеръ нанялся къ хозяину съ такимъ условіемъ: за каждый день, который онъ проработаетъ на хозяина, онъ получаетъ по 2 р.; а за каждый день, который онъ проработаетъ на сторону или прогуляетъ, онъ не только ничего не получаетъ съ хозяина, но, напротивъ, хозяинъ вычитаетъ съ него за содержаніе по 75 к.; по прошествіи 30 дней мастеръ взялъ расчетъ, получивши съ хозяина за все это время 38 р. Сколько дней работалъ онъ на хозяина? (Зад. № 494).

Рѣш. Предположимъ, что всѣ 30 дней мастеръ работалъ на хозяина; тогда ему пришлось бы получить 60 р. (2 × 30 = 60); получилъ же онъ только 38 р.; значитъ онъ лишился 22-хъ р. (60 — 38 = 22); съ каждымъ днемъ, который онъ не работалъ на хозяина, лишался онъ 2 р. 75 к. (не получалъ 2-хъ рублей и отдавалъ 75 к.); онъ не работалъ на хозяина столько дней, сколько разъ 2 р. 75 к. содержится въ 22-хъ руб., т.-е. 8 дней (2200 : 275 = 8).

Иначе. 38 р. приходится получить мастеру за 19 дней работы на хозяина (38 : 2 = 19). Слѣдовательно, за остальные 11 дней (30 — 19 = 11) онъ не получилъ ничего: то, что въ теченіе этихъ 11 дней ему надо было получить, съ него вычтено. Получалъ онъ въ день по 2 р., или по 8-ми четвертаковъ; вычитали съ него въ день по 75 к., или по 3 четвертака; на хозяина работалъ онъ меньше дней, нежели на сторону или прогулялъ: во столько разъ меньше, во сколько разъ 3 меньше 8-ми. (Хозяйскихъ дней

3 части, стороннихъ или прогульныхъ — 8 частей, всего 11 частей, которыя составляютъ 11 дней; каждая часть равна 1 дню; на хозяина работалъ онъ 3 дня, чтобы вмѣстѣ съ прежними 19-ью составляетъ 22 дня).

Ариѳметическое содержаніе задачъ подъ №№ 497—499 можетъ быть выражено такъ.

— Число 62 разложить на 7 частей такимъ образомъ, чтобы первыя 3 части были одинаковы между собою, а вторыя 4 части равны между собою, и при томъ наждая изъ первыхъ частей была бы на 9 больше каждой изъ вторыхъ. (Гл. VI, § 54, VI типъ).

Рѣш. Уравняемъ части: уменьшимъ каждую изъ трехъ первыхъ частей на 9; тогда сумма уменьшится на 27 ($9 \times 3 = 27$) и будетъ равна 35-ти ($62 - 27 = 35$); это есть сумма 7-ми одинаковыхъ частей (вторыхъ), изъ которыхъ каждая будетъ 5 ($35 : 7 = 5$). Или: увеличимъ каждую изъ вторыхъ частей на 9; тогда сумма увеличится на 36 ($9 \times 4 = 36$) и обратится въ 98 ($62 + 36 = 98$); это есть сумма 7-ми одинаковыхъ частей (первыхъ), изъ которыхъ каждая будетъ 14 ($98 . 7 = 14$).

Въ примѣненіи къ задачамъ съ конкретнымъ содержаніемъ наиболѣе удобнымъ является способъ замѣны.

— Мастеръ сдѣлалъ 3 одинаковыхъ самовара и 4 одинаковыхъ кастрюли; на все это пошло мѣди 1 пд. 22 фн.; на каждый самоваръ шло мѣди 9-ью фунтами больше, чѣмъ на каждую кастрюлю. Сколько мѣди шло на самоваръ и сколько на кастрюлю? (Зад. № 497.)

Рѣш. Если бы вмѣсто 3 самоваровъ мастеръ сдѣлалъ 3 кастрюли, то на всѣ издѣлія, т.-е. на 7 кастрюль, пошло бы мѣди 27-ью фунтами менѣе, нежели 1 пд. 22 фн., т.-е. 35 фн. Или: если бы вмѣсто 4 кастрюль мастеръ сдѣлалъ 4 самовара, то на всѣ издѣлія, т.-е. на 7 самоваровъ, пошло бы мѣди 36-ью фунтами болѣе, т.-е. 2 пд. 18 фн., или 98 фн.

Ариѳметическое содержаніе задачъ №№ 501—503 таково:

— Число 96 разложить на 15 чиселъ такъ, чтобы первыя 7 чиселъ были одинаковы между собою, вторыя 8 равны между собою, и чтобы каждое изъ первыхъ было въ 3 раза больше каждаго изъ вторыхъ. (Гл. VI, § 54, VII типъ.)

Эти задачи рѣшаются способами частей, повѣрки, замѣны.

— Торговецъ купилъ 2 пд. 36 фн. чаю и 22 пд. сахару и заплатилъ за все 345 р. 80 к.; за пудъ сахару платилъ онъ

втрое дороже, чѣмъ за фунтъ чаю. Почемъ платилъ онъ за пудъ сахару и за фунтъ чаю? (Зад. № 501.)

Способъ частей. Цѣна фунта чаю 1 часть, цѣна пуда сахару 3 части; цѣна всего купленнаго чаю 116 частей (2 пд. 36 фн. = 116 фн.), всего сахару 66 частей.

Способъ замѣны. Вмѣсто 22 пд. сахару (па тѣ же деньги) можно купить 66 фн. чаю; слѣд., 345 р. 80 к. есть стоимость 182 фн. чаю (116 + 66 = 182).

Въ задачахъ № 504 вмѣсто суммы имѣемъ разность. Способы рѣшенія тѣ же.

Подъ №№ 505—507 помѣщены задачи слѣдующаго содержанія:

— Число 136 разложить на четверки и пятки такъ, чтобы четверокъ было втрое больше, чѣмъ пятковъ. (Гл. VI, § 54, IV типъ).

— Лѣсоторговецъ продалъ на 798 руб. березовыхъ и осиновыхъ дровъ, осиновыхъ въ 4 раза больше, чѣмъ березовыхъ; березовыя дрова продалъ онъ по 5 р. 80 к., осиновыя по 4 р. 25 к. за сажень. Сколько продалъ онъ тѣхъ и другихъ дровъ? (Зад. № 505.)

Рѣш. На одну сажень березовыхъ дровъ приходится 4 сажени осиновыхъ; одна сажень березовыхъ стоитъ 5 р. 80 к., 4 сажени осиновыхъ — 17 р.; всего 22 р. 80 к. Продано столько саженъ березовыхъ дровъ и столько разъ по 4 сажени осиновыхъ, сколько разъ 22 р. 80 к. содержатся въ 798 руб. Въ этомъ разсужденіи можно видѣть способъ повѣрки: положимъ, что продана 1 сажень березовыхъ дровъ и, слѣд., 4 сажени осиновыхъ.

Примѣчаніе. Къ задачамъ разсматриваемаго типа иногда удобно можетъ быть примѣненъ способъ уравниванія неизвѣстныхъ — Сшиты тетради изъ бѣлой бумаги, въ 6 листовъ каждая, и изъ сѣрой бумаги, въ 15 листовъ каждая; первыхъ сдѣлано втрое больше, чѣмъ вторыхъ; всей бумаги пошло 132 листа. Сколько сшито тѣхъ и другихъ тетрадей? — Кромѣ приведеннаго выше пріема, можно разсуждать и такъ: пусть изо всей бѣлой бумаги сдѣлано столько же тетрадей, сколько изъ сѣрой, т.-е. втрое меньше, чѣмъ на самомъ дѣлѣ; тогда каждая тетрадь должна быть втрое толще, т.-е. сшита не изъ 6-ти, а изъ 18-ти листовъ. Имѣемъ задачу: изъ 132 листовъ бумаги сшиты тетради — однѣ въ 18 листовъ, другія въ 15 листовъ; тѣхъ и другихъ сшито поровну; по скольку? Такія задачи уже разсмотрѣны раньше.

Въ задачахъ № 508 вмѣсто суммы входитъ разность. Способы рѣшенія тѣ же.

Задачи №№ 509—513 отличаются отъ предыдущихъ тѣмъ, что вмѣсто кратнаго отношенія неизвѣстныхъ здѣсь дается ихъ разность:

— Число 136 разложить на четверки и пятки такъ, чтобы четверокъ было на 7 больше, чѣмъ пятковъ.

Легко выполняемымъ уравниваніемъ неизвѣстныхъ эти задачи обращаются въ такія, которыя приведены, какъ IV типъ, въ § 54 главы VI.

— Помѣщикъ продалъ рожь по 5 р. 60 к. и овесъ по 3 р. 20 к. за четверть, а всего на 1044 р.; ржи продалъ онъ на 45 чт. больше, чѣмъ овса. Сколько продалъ онъ ржи и овса?

Рѣш. Предположимъ, что ржи продано столько же, сколько и овса, т.-е. на 45 чт. меньше, чѣмъ въ дѣйствительности; находимъ стоимость 45 чт. ржи и вычитаемъ ее изъ 1044 руб. Или предположимъ, что овса продано столько же, сколько и ржи, т.-е. на 45 чт. больше, чѣмъ на самомъ дѣлѣ; узнаемъ цѣну 45 чт. овса и придаемъ ее къ 1044 р.

Задачи №№ 514—521 представляютъ усложненіе тѣхъ задачъ V типа, о которыхъ было сказано въ § 54 главы VI.

1) Найти два неизвѣстныхъ, изъ которыхъ одно на 5 больше другого. Первое повторено 9 разъ, второе — 8 разъ; первый результатъ (произведеніе) на 52 больше второго.

Уравниваніемъ неизвѣстныхъ задача приводится къ названному V типу.

— Хозяинъ засѣялъ рожью 15 десятинъ, овсомъ 8 десятинъ; ржи собралъ онъ на 38 чт. 4 чк. больше, чѣмъ овса, хотя съ десятины собиралъ овса на 1 чт. 6 чк. больше, чѣмъ ржи. По скольку ржи и по скольку овса собиралъ онъ съ десятины? (Зад. № 514.)

Рѣш. Если бы ржи было собрано съ каждой десятины столько же, сколько и овса, т.-е. на 1 чт. 6 чк. больше, чѣмъ на самомъ дѣлѣ, то ея было бы собрано больше на 26 чт. 2 чк. (1 чт. 6 чк. $\times 15 =$ $= 26$ чт. 2 чк.), и количество собранной ржи превышало бы количество овса на 64 чт. 6 чк. (38 чт. 4 чк. $+$ 26 чт. 2 чк.). Такъ какъ теперь зерна того и другого рода приходится съ десятины поровну, то 64 чт. 6 чк. есть количество зерна (овса), получаемаго съ 7 десятинъ ($15 - 8 = 7$). Можно также уравнять неизвѣстныя, предположивъ, что овса съ каждой десятины собрано

столько же, сколько ржи, т.-е. на 1 чт. 6 чк. меньше, чѣмъ въ дѣйствительности.

Въ приведенной задачѣ неизвѣстными служатъ множимыя. Искомыми могутъ явиться и множители:

2) Даны два числа 9 и 5; то и другое повторено нѣсколько, но не одинаковое число, разъ: девятокъ взято на 4 меньше, чѣмъ пятковъ; первый результатъ (всѣ девятки) оказался больше второго (всѣхъ пятковъ) на 8. Сколько взято девятокъ и сколько пятковъ?

И здѣсь уравниваніемъ неизвѣстныхъ задача приводится къ V типу.

— Мельникъ смололъ ржи на 5 чт. больше, чѣмъ пшеницы; четверть ржи дала муки 7 пд. 26 фн., а четверть пшеницы — 8 пд. 14 фн.; всей же ржаной муки получено на 27 пд. 30 фн. больше, чѣмъ пшеничной. Сколько смолото четвертей ржи и сколько четвертей пшеницы? (Зад. № 515.)

Рѣш. Если бъ ржи было смолото столько же четвертей, сколько пшеницы, т.-е. на 5 чт. меньше, чѣмъ на самомъ дѣлѣ, то ржаной муки было бы получено меньше дѣйствительнаго количества на 38 пд. 10 фн. (7 пд. 26 фн. $\times$ 5) и меньше, чѣмъ пшеничной, на 10 пд. 20 фн. (38 пд. 10 фн. — 27 пд. 30 фн.). Такъ какъ теперь ржи и пшеницы смолото поровну четвертей, то ржаной муки получилось меньше, чѣмъ пшеничной, потому, что четверть ржи даетъ муки меньше, чѣмъ четверть пшеницы. Можно также уравнять неизвѣстныя, предположивъ, что пшеницы смолото столько же четвертей, сколько ржи, т.-е. на 5 чт. больше, чѣмъ въ дѣйствительности.

Приведемъ рѣшеніе двухъ задачъ, помѣщенныхъ въ концѣ этой группы.

№ 520. Хозяйка сдѣлала запасъ масла и разсчитывала, что ей хватитъ его на 40 дней; но такъ какъ ей пришлось изводить въ день масла на 12 золотниковъ болѣе, чѣмъ она думала, то масла хватило ей только на 32 дня. Сколько масла запасла хозяйка?

Рѣш. Здѣсь два неизвѣстныхъ: количество масла, которое предполагалось расходовать въ день, и то количество, которое на самомъ дѣлѣ расходовалось въ день; второе на 12 зл. больше перваго. Уравняемъ неизвѣстныя: если бъ хозяйка изводила въ теченіе 32-хъ дней по стольку же масла, по скольку думала раньше, т.-е. на 12 зл. менѣе, то масла осталось бы 384 зл. ($12 \times 32 = 384$); между тѣмъ, при такомъ же ежедневномъ расходѣ въ 40 дней выходитъ все масло; отсюда слѣдуетъ, что 384 зл. масла прихо-

дится на 8 дней ($40-32=8$), а ежедневный расходъ (предполагавшійся) равенъ 48 зл. ($384:8=48$). Масла было запасено 20 фн. (48 зл. $\times 40=20$ фн.). Можно уравнять неизвѣстныя и такъ: если бъ въ теченіе 40 дней хозяйка изводила масла по стольку, по скольку расходовала она въ продолженіе 32 дней, т.-е. на 12 зл. въ день больше, то къ сдѣланному запасу надо было бы прибавить еще 480 зл. ($12\times 40=480$); эти 480 зл. приходятся на 8 дней, а ежедневный расходъ (дѣйствительный) былъ 60 зл.

Иначе. Дѣйствительный расходъ больше предполагавшагося во столько разъ, во сколько 40 больше 32-хъ, и въ то же время больше на 12 зол. (См. типъ VII: отысканіе кратно неравныхъ чиселъ по данной разности ихъ.)

№ 521. Хозяйка сдѣлала запасъ керосина, разсчитывая жечь по 2 фунта въ день; но такъ какъ керосина выходило въ день только $1^1/_2$ фунта, то сдѣланнаго запаса хватило на 7 дней дольше. Сколько керосину запасла хозяйка?

Рѣш. Здѣсь два неизвѣстныхъ: время, въ теченіе котораго предполагалось израсходовать сдѣланный запасъ, и время, въ теченіе котораго онъ дѣйствительно израсходованъ; второе на 7 дней больше перваго. Уравняемъ неизвѣстныя: когда при ежедневномъ расходѣ въ $1^1/_2$ фн., пройдетъ то время, въ теченіе котораго раньше предполагалось извести весь запасъ, тогда останется керосина $10^1/_2$ фн. ($1^1/_2\times 7$); этого остатка не будетъ, если въ теченіе того же времени сжигать въ день по 2 фн., т.-е. на $^1/_2$ фн. болѣе; отсюда слѣдуетъ, что предполагалось израсходовать весь запасъ во столько дней, сколько разъ $^1/_2$ фн. содержится въ $10^1/_2$ фн., т.-е. въ 21 день ($10^1/_2 : {}^1/_2={}^{21}/_2 : {}^1/_2=21$). Керосина было запасено 42 фн., или 1 пд. 2 фн. ($2\times 21=42$). Можно уравнять неизвѣстныя и такъ: если бы расходовать въ день по 2 фн., то на лишніе 7 дней пришлось бы прибавить къ запасу еще 14 фн.; ихъ не надо прибавлять, если за то же время сжигать въ день по $1^1/_2$ фн., т.-е. на $^1/_2$ фн. менѣе; отсюда слѣдуетъ, что это время равно 28-ми днямъ ($14 : {}^1/_2=28$).

Иначе. Дѣйствительное время больше предполагавшагося во столько разъ, во сколько 2 больше $1^1/_2$, или 4 больше 3-хъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ больше на 7 дней. (См. типъ VII: отысканіе кратно неравныхъ чиселъ по данной разности ихъ.)

Задачи №№ 522—524 являются усложненіемъ тѣхъ задачъ VIII типа, о которыхъ мы говорили въ § 54 главы VI.

№ 522. Мужъ и жена нанялись работать въ огородѣ; оба вмѣстѣ получали они по 1 р. 40 к. въ день; мужъ работалъ 15 дней, а жена ушла съ работы за 4 дня до мужа; всего же они заработали 19 руб. Сколько получалъ въ день мужъ, и сколько жена?

Рѣш. Жена работала 11 дней (15—4=11), мужъ 15 дней; за 11 дней оба вмѣстѣ должны получить 15 р. 40 к. (1 р. 40 к. × 11); слѣд. 3 р. 60 к. (19—15 р. 40 к.) приходится одному мужу за 4 дня его работы.

1 дн.	1 дн.—	1 р. 40 к.
11 дн.	11 дн.—	15 р. 40 к.
11 дн.	15 дн.—	19 р.
	4 дн.—	3 р. 60 к.

№ 523. Торговецъ продалъ въ одно мѣсто 25 саж. березовыхъ дровъ и 20 саж. осиновыхъ за 225 р. 50 к.; въ другое мѣсто, по тѣмъ же цѣнамъ, продалъ онъ 75 сж. березовыхъ и 35 сж. осиновыхъ дровъ за 572 р. 75 к. Почемъ продавалъ онъ сажень тѣхъ и другихъ дровъ?

Рѣш. Въ обоихъ случаяхъ количество тѣхъ и другихъ дровъ не одинаково, такъ что разница въ цѣнѣ обѣихъ партій зависитъ отъ двухъ причинъ: и отъ количества березовыхъ, и отъ количества осиновыхъ дровъ. Устранимъ одну изъ этихъ причинъ: уравняемъ количество березовыхъ дровъ, для чего увеличимъ всю первую партію въ 3 раза. Приходимъ къ такой задачѣ, какія уже разсмотрѣны раньше (гл. VI, § 54, VIII типъ):

75 сж. бер. дровъ и 60 сж. осин. дровъ стоятъ 676 р. 50 к.		Сколько стоитъ саж. тѣхъ и другихъ дровъ?
75 сж. „ „ „ 35 сж. „ „ „ 572 р. 75 к.		

Въ приведенной задачѣ искомыя служатъ множимыми, въ слѣдующихъ затѣмъ задачахъ (№ 524) они являются множителями; рѣшеніе — подобно предыдущему.

Содержаніе II части

Введеніе.

Стран.

§ 1. Цѣль обученія ариѳметикѣ въ начальной народной школѣ. 69
§ 2. Объемъ и характеръ курса начальной ариѳметики. . 71
§ 3. Отсутствіе методовъ обученія начальной ариѳметикѣ 75
§ 4. Методъ изученія чиселъ. 77
§ 5. Методъ изученія дѣйствій. 82
§ 6. Совмѣстное изученіе дѣйствій и концентрическое расположеніе матеріала . 83
§ 7. Значеніе задачъ въ курсѣ начальной ариѳметики. . 92
§ 8. Наглядность обученія. . 95
§ 9. Устныя вычисленія . . . 96
§ 10. Форма обученія. 99
§ 11. Распредѣленіе занятій между группами. 100
§ 12. Самостоятельныя работы и повѣрка ихъ 101
§ 13. Распредѣленіе учебнаго матеріала по годамъ обученія 103

Глава I. Первый десятокъ.

§ 1. Счетъ прямой и обратный. 105
§ 2. Присчитываніе и отсчитываніе по единицѣ 106
§ 3. Присчитываніе и отсчитываніе нѣсколькихъ единицъ 110
§ 4. Ознакомленіе съ цифрами. 115
§ 5. Знаки «прибавить», «отнять» и знакъ равенства. 118
§ 6. Самостоятельныя упражненія въ сложеніи и вычитаніи. Переходъ отъ римскихъ цифръ къ арабскимъ 120
§ 7. Присчитываніе и отсчитываніе нѣсколькихъ единицъ (продолженіе) . . . 122
§ 8. Бѣглый счетъ на сложеніе и вычитаніе 124
§ 9. Задачи на сложеніе и вычитаніе 126
§ 10. Увеличеніе и уменьшеніе на нѣсколько единицъ. Разностное сравненіе . . 127
§ 11. Умноженіе. 132
§ 12. Дѣленіе. 137
§ 13. Увеличеніе и уменьшеніе въ нѣсколько разъ. Кратное сравненіе 145
§ 14. Сопоставленіе разностнаго и кратнаго сравненія . . 150
§ 15. Задачи на всѣ дѣйствія и бѣглый счетъ 151

Глава II. Счетъ до ста.

Круглые десятки.

§ 16. Устная нумерація круглыхъ десятковъ 152
§ 17. Письменная нумерація круглыхъ десятковъ. . . 154
§ 18. Дѣйствія надъ круглыми десятками. 156

Десятки вмѣстѣ съ единицами.

§ 19. Устная нумерація 156
§ 20. Письменная нумерація. . 159
§ 21. Обозначеніе чиселъ на счетахъ 160

Глава III. Первые два десятка.

Стран.
§ 22. Сложеніе 163
§ 23. Вычитаніе. 167
§ 24. Умноженіе. 170
§ 25. Дѣленіе. 171
§ 26. Задачи, примѣры и бѣглый счетъ на всѣ дѣйствія. 174

Глава IV. Первая сотня.

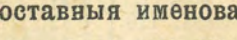
§ 27. Сложеніе 175
§ 28. Вычитаніе. 178
§ 29. Сложеніе и вычитаніе на счетахъ 181
§ 30. Умноженіе. Таблица умноженія. 184
§ 31. Дѣленіе. 194
§ 32. Дроби. 207
§ 33. Задачи и примѣры на всѣ дѣйствія 211
§ 34. Дроби. 215

Глава V. Первая тысяча.

§ 35. Устная нумерація 219
§ 36. Письменная нумерація. . 222
§ 37. Сложеніе 229
§ 38. Сложеніе дробей. 233
§ 39. Вычитаніе. 234
§ 40. Вычитаніе дробей 238
§ 41. Умноженіе 239
§ 42. Умноженіе дробей. . . . 243
§ 43. Дѣленіе. 244
§ 44. Дѣленіе дробей 250
§ 45. Сокращенныя вычисленія. 253
§ 46. Задачи и примѣры на всѣ дѣйствія. 258

Глава VI. Числа любой величины.

§ 47. Нумерація. 259
§ 48. Дроби. 269
§ 49. Сложеніе . . . . . —
§ 50. Вычитаніе. 273
§ 51. Умноженіе. 275
§ 52. Дѣленіе. 282
§ 53. О рѣшеніи задачъ. . . . 288
§ 54. Типическія задачи и способы ихъ рѣшенія. . . . 291

Глава VII. Составныя именованныя числа.

§ 55. Таблицы русскихъ мѣръ. 311
§ 56. Простое и составное именованное число 314
§ 57. Раздробленіе и превращеніе 316
§ 58. Сложеніе. 319
§ 59. Вычитаніе. 321
§ 60. Умноженіе. 323
§ 61. Дѣленіе. 324
§ 62. Задачи на всѣ дѣйствія. 327
§ 63. Вычисленіе времени . . . —
§ 64. Квадратныя мѣры. . . . 335
§ 65. Кубическія мѣры 339
§ 66. Задачи на проценты. . . 341
§ 67. Болѣе трудныя задачи. . 344